

## 비최소 위상 플랜트의 최소 위상 플랜트로의 균형 모델 저차화

### Balanced Model Reduction of Non-minimum Phase Plant into Minimum Phase Plant

°구 세 완, 권 혁 성, 오 원 근, 서 병 설

한양대학교 전자통신공학과(Tel:290-0364; Fax:281-9912; E-mail: drifty@apollo.hanyang.ac.kr)

**Abstracts** This paper proposes balanced model reduction of non-minimum phase plant. The algorithm presented in this paper is to convert high-order non-minimum phase plant into low-order minimum phase plant using balanced model reduction. Balanced model reduction requires the error bound that Hankel singular value produces. This algorithm shows the tolerance that admits the method of this paper.

**Keywords** Non-minimum phase, Balanced realization, Model reduction, Hankel singular value, Infinite norm

#### 1. 서론

비최소 위상 플랜트(non-minimum phase plant)의 연구는 Freudenberg 와 Looze[5], Stein 과 Athans[8] 등에 의해 시도되어 왔다. 그 중 하나인 Stein 과 Athans 의 방법[8]은 비최소 위상 플랜트를 불안정 영점을 포함하는 전역 통과 인수(all pass factor)와 최소 위상 플랜트로 분해하고 최소 위상 플랜트의 상태변수만 루프 전달 회복(loop transfer recovery, LTR)을 이루려는 시도였으나, 전역 통과 인수를 배제한 채 루프 전달 회복을 적용하기 때문에 위상에 대한 오차로 인해 가중 감도 함수(weighted sensitivity function)의 가중치를 변화시켜 감도의 크기를 감소시켜 주어야 하는 등의 제한 조건이 뒤따랐다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 가지고 있는 비최소 위상 플랜트를 제어하는데 있어, 고차의 비최소 위상 플랜트를 모델 저차화(model reduction)를 이용하여 저차의 최소 위상 플랜트로 변화시키는 방법을 제안하고자 한다. 고차의 플랜트 모델은 실제와 좀 더 가깝다는 이점이 있으나 시스템 구현이 힘들고 계산량이 증가하는 문제점을 지니고 있다. 그에 따라 모델의 차수를 낮추는 방법이 연구되었는데, 그 중 하나가 본 논문에서 다루어질 균형 모델 저차화(balanced model reduction)를 이용한 모델 저차화이다[9]. 이 방법은 본래 모델과 저차화 모델의 오차의 무한대 노름(infinite norm)값의 상한(upper bound)은 제거된 상태 변수들에 대한 Hankel 특이값(Hankel singular value)의 합으로 정해진다. 제어기 설계는 이 오차의 상한에 대해서 안정도-강인성과 성능-강인성을 보장받을 수 있도록 설계되어야 한다. 지금까지 제시된 모델 저차화 방법은 최소 위상 플랜트나 비최

소 위상 플랜트에 관계없이 이루어졌지만, 위에서 언급한 것처럼 본 논문에서는 비최소 위상 플랜트를 균형 모델 저차화를 이용하여 저차의 최소 위상 플랜트로 이끄는 방법을 제안한다.

논문 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 이미 잘 알려진 균형 실현화(balanced realization)과 균형 모델 저차화 방법에 대해 설명한다. 3 장은 본 논문에서 제안된 균형 모델 저차화 방법으로 비최소 위상 플랜트를 저차의 최소 위상 플랜트로 만드는 알고리즘을 제시하고, 4 장에서는 저차화된 최소위상플랜트의 LQG-LTR 제어기 설계를 모의 실험을 통해 분석한다. 마지막으로 5 장에서는 결론과 함께 향후 연구 방향을 제시함으로 마친다.

#### 2. 모델 저차화

##### 2.1 균형 실현화

$G(s)$  는 최소 실현화(minimal realization)이며,  $G(s) \in RH_{\infty}$  라고 가정하면,

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

는 상태방정식과 전달함수를 함께 표현한 것이다. 제어가능(controllability) Grammian 과 관측가능(observability) Grammian 을  $P$ ,  $Q$  라 하면, 이는 다음과 같은 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$AP + PA^* + BB^* = 0$$

$$QA + A^*Q + C^*C = 0$$

$P$  가 양의 한정 대칭행렬인 것은  $(A, B)$  가 제어가능한 것과 필요충분조건 관계이고,  $Q$  가 양의 한정 대칭행렬인 것은  $(C, A)$  가 관측가능한 것과 필요충분조건 관계이다. 제어가능 Grammian

과 관측가능 Grammian 에 의해 입력과 출력에서 플랜트 상태 변수들의 우세적인 특성들을 일반적으로 정확하게 예측할 수 없다. 즉, P의 특이값 과 Q의 특이값이 불균형을 이루어 덜 제어가능(관측가능) 하지만 더 관측가능(제어가능)한 상태변수들이 있을 수 있어서, 전체적인 플랜트 입,출력을 고려할 때, 이에 대한 정확한 정보를 얻을 수 없으며, 이에 대한 예는 [9]의 예제에서 잘 보여주고 있다. 따라서, 플랜트 상태 방정식을 실현화 하는데 있어서 P,Q에 의해 입,출력 관계에서 덜 중요한 상태 변수들을 정확히 알 수 있기 위해 P,Q의 특이값들을 균형 있게 설정 해야 한다. 즉,  $P=Q=\Sigma$ 가 되도록 플랜트  $G(s)$ 의 상태공간 방정식을 T에 의해 변화(transformation)시키는데, 이는  $z=Tx$ 에 의해 새로운 좌표계를 갖는 상태변수 z로서 x를 대체하여 본래의 플랜트를 균형있게 변화시키는 것이다. 이러한 실현화를 균형 실현화라고 하며, 대개의 경우 고차의 플랜트를 저차 플랜트로 근사화 할 때 유용한 방법이다. 즉, 이는 입,출력 관계에서 덜 중요한 플랜트 상태변수들을 삭제하기 위해 필요한 정보를 제공한다. 다음은 그 과정이다.

(단계 1) 주어진 플랜트  $G(s)$ 의 제어가능/관측가능 Grammian  $P,Q$ 를 구한다.

(단계 2) PQ를 고유벡터 분리(eigenvector decomposition)하여 변화 T를 구한다.

$$PQ = T^{-1} \Lambda T, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

(단계 3)  $P_r = TPT^* = \Sigma$ ,  $Q_r = (T^{-1})^*QT^{-1} = \Sigma$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \Sigma^2 = \Lambda$$

(단계 4) 균형 실현화

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right]$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  이 주어진 플랜트의 Hankel 특이값이며, 이 값들이 상태변수들의 제어/관측가능 측면에서의 중요도를 나타낸다. 따라서, 이 값들에 의해 모델 저차화를 수행하며, 이는 다음 절에서 보인다.

## 2.2 균형 모델 저차화

$G(s) \in RH_\infty$  이고,

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

가 균형 실현화 되어 있고, Grammian 을  $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r),$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

으로 가정하고, 저차화된 모델을 다음과 같이  $G_r(s)$ 라 할 때,

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D \end{array} \right]$$

은 균형 실현화 이고, 점근적으로 안정한(asymptotically stable) 플랜트이다[7]. 그리고, 본래 모델과 오차는 다음과 같은 식을 만족한다[3].

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n)$$

$\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ 인 경우, 저차화된 모델  $G_r(s)$ 은  $G(s)$ 에 비해 입,출력 행동이 크게 변하지 않는다[7]. 모델 저차화 방법은 큰 차수를 갖는 플랜트의 근사화 방법에 이용하지만, 본 논문에서는 비최소위상플랜트의 불안정한 영점을 발생시키는데 큰 영향을 갖는 상태변수를 제거하기 위해 이 방법을 이용한다.

## 3. 비최소위상플랜트의 최소위상플랜트로의 모델 저차화

균형 실현화는 Grammian  $P,Q$ 를  $P=Q=\Sigma$  되도록 하여 입력 측의 제어가능한 정도와 출력 측의 관측가능한 정도를 똑같이 균형을 맞추기 위하여 변화 T를 구하여 새로운 상태변수  $z=Tx$ 로 대체하는 것이다. 이때  $P,Q$ 는 invariant set 이 아니다.

불안정한 영점을 갖는 비최소위상플랜트에 이 방법을 이용하여 최소위상플랜트로 근사화 한다. 이 때 덜 제어가능하고 덜 관측가능한 상태변수들을 제거하며, 이에 대한 Hankel 특이값의 상한은 사전에 설정해 주어야 한다. 이에 대한 알고리즘을 제시하기 전에 Moore의 균형 실현화에 대한 확장된 형태[6]를 정리 1에 제안 한다.

정리 1: 다음과 같이 주어진 플랜트를 고려하자.

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 & A_3 & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \\ \hline C_1 & C_2 & C_3 & D \end{array} \right]$$

$G(s) \in RH_\infty$  이고, 최소 실현화와 균형 실현화 되어있고, 그때 Grammian  $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r), \quad \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_k),$$

$$\Sigma_3 = \text{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)$$

라고 가정하고,  $A_{12}, A_{21}$ 에 대응하는 상태변수들이 불안정한 영점을 발생시킨다면, 저차화된 플랜트  $G_r(s)$ 은 최소위상 플랜트이며, 다음과 같은 상태공간 모델식을 갖는다.

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D \end{array} \right].$$

$$A_r = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad C_r = [C_1 \quad C_2]$$

그리고,  $G_r(s)$ 는 균형 실현화 되어있으며, 점근적으로 안정한 플랜트이다. 원래의 플랜트와의 오차는 다음 식과 같은 상한을 갖는다.

$$\|G(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2\text{trace}(\Sigma_2)$$

증명 :  $G(s)$ 의 행과 열에 대한 연산에 의해 다음과 같은  $G^0(s)$ 를 얻을 수 있고,

$$G^0 = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_1 & A_3 & A_2 & B \\ A_{31} & A_{33} & A_{32} & B \\ A_{21} & A_{23} & A_{22} & B \\ \hline C_1 & C_3 & C_2 & D \end{array} \right]$$

결과적으로  $G(s)$ 와 같은 플랜트이므로

$$\|G(s) - G^0(s)\|_{\infty} = 0$$

이 되며,

$$\|G^0(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2\text{trace}(\Sigma_2)$$

이 성립하며, 이는 Moore에서와 같은 방법으로[6] 증명하므로 생략한다. 따라서,

$$\|G(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2\text{trace}(\Sigma_2)$$

이고, 또한  $G_r(s)$ 는 균형 실현화이고, 최소 실현화 되어있다 [7]. ■

$G(s)$ 와  $G_r(s)$ 가 각각 비최소위상플랜트, 최소위상플랜트이며, 정리 1의  $\Sigma_2$ 가 불안정한 영점을 발생시키는 상태변수이고  $\sigma_{r+1} < \text{tolerance}$ 가 되면, 최소위상플랜트로의 모델저차화를 수행할 가치가 있을 것이다. 그러나,  $\sigma_{r+1} > \text{tolerance}$ 가 되면, 최소위상플랜트로 저차화 하는데 신중을 기해야 할 것이다. 따라서, tolerance를 설정하는 것도 하나의 중요한 문제가 될 수 있으나, 이에 대한 해석적인 해를 제시하지는 못하였으며, 이는 앞으로 연구되어야 할 문제이다. 본 논문에서는 Hankel 특이값을 구하여 이를 보고 tolerance를 판정하였다. 다음은 비최소위상플랜트를 최소위상플랜트로 모델 저차화 하는 과정이다.

(단계 1) 균형 실현화를 수행하여 Grammian을 구함.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

(단계 2)  $\sigma_k \ll \sigma_{k+1}$  일 때,  $\sigma_k < \text{tol} < \sigma_{k+1}$ 이 되는  $\text{tol}$ 을 설정.

(단계 3)  $\sigma_n$ 부터  $\sigma_{k+1}$ 까지에 해당하는 상태변수들을 하나씩만 제거하면서 저차화된 모델의 영점의 안정, 불안정을 측정. 즉,  $\sigma_i (k < i \leq n)$ 에 상응하는 상태변수가 제거된 저차화 모델을

$$G_{-i} = \left[ \begin{array}{c|c} A_i & B_{-i} \\ \hline C_{-i} & D \end{array} \right]$$

라 하면, 이들의 영점을 구한다. 최소위상플랜트로 저차화 될 수 있는 가장 작은  $\sigma_i (k < i \leq n)$ 에 해당하는 상태변수

들을 제거한다. 그때 최소위상플랜트로 저차화된 모델을

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]$$

라 하자.

(단계 4) 정리 1을 적용하여 본래의 플랜트와의 오차를 계산.

$$\|G(s) - G_r(s)\|_{\infty} \leq 2\sigma_r$$

$$2\sigma_r \leq 2\text{tol}$$

#### 4. 모의 실험 및 고찰

제안된 방법을 이용하여, 비최소 위상 플랜트를 최소 위상 플랜트로 모델 저차화 시킨 후 LQG-LTR 알고리즘을 적용하여 성능을 비교해 보았다. 적용 모델은 다음과 같으며, 미리 균형 실현화를 시행하였다[4].

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -16.68 & 52.52 & -10.32 & -4.35 & -1.95 \\ -52.52 & -53.51 & 33.75 & 12.90 & 6.21 \\ -10.32 & -33.75 & -110.86 & -274.10 & -26.87 \\ 4.35 & 12.90 & 274.10 & -28.12 & -145.87 \\ -1.95 & -6.21 & -26.87 & 145.88 & -7.11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2.99 \\ -3.12 \\ -0.94 \\ 0.39 \\ -0.18 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-2.99 \quad 3.12 \quad -0.94 \quad -0.39 \quad -0.18]x$$

제어가능 Grammian과 관측가능 Grammian을 이용하여 Hankel 특이값을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_1 = 0.2683, \sigma_2 = 0.0908, \sigma_3 = 0.0040, \sigma_4 = 0.0026, \sigma_5 = 0.0022$$

$$\sigma_2 \gg \sigma_3$$

위의 결과에 따라 두 번째 Hankel 특이값과 세 번째 Hankel 특이값의 사이에서 tolerance를 정하면,

$$\sigma_{\text{tol}} = 0.01$$

조사해 본 결과 네 번째 상태변수가 불안정 영점과 연관된다는 것을 알아내어 다음과 같은 저차화 모델을 얻었다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -16.68 & 52.52 & -10.32 & -1.95 \\ -52.52 & -53.51 & 33.75 & 6.21 \\ -10.32 & -33.75 & -110.86 & -26.87 \\ -1.95 & -6.21 & -26.87 & -7.11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2.99 \\ -3.12 \\ -0.94 \\ -0.18 \end{bmatrix} u$$

$$y = [-2.99 \quad 3.12 \quad -0.94 \quad -0.18]x$$

영점의 위치가 3954.9, -22+j314, -22-j314, -62에서 -8057.1, -177.5, -0.6으로 변화하지만, 불안정 영점이 사라지는 것을 알 수 있다.  $\|G - G_r\|_{\infty} = 0.0027 < 0.0052 = 2\sigma_{r+1} < 0.002 = 2\sigma_{\text{tol}}$

그림 1은 저차화 모델에 LQG-LTR 알고리즘을 적용하여, 페루프 전달 함수와 감도 함수를 나타낸 것이다. 실제 제어기 설계에 있어서는 여러가지 제한조건과 함께  $\|G - G_r\|_{\infty}$ 의 값을 고려한, 즉, 안정도-강인성과 성능-강인성을 고려한 설계를 해야 할

것이다.

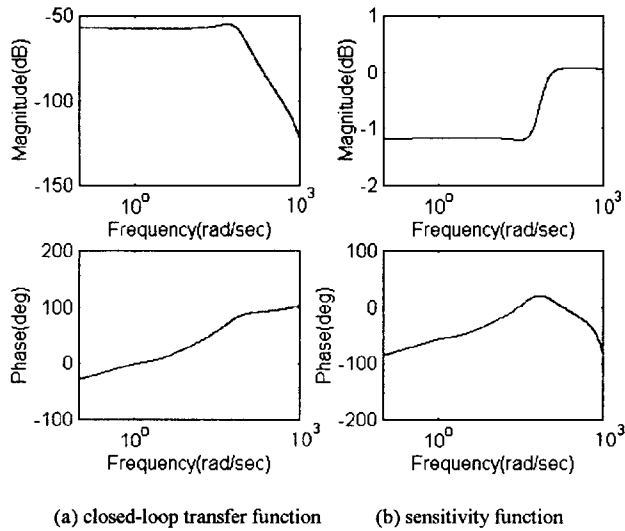


그림 1. 저차화 모델의 페루프 전달 함수와 감도 함수

Fig.1. closed-loop transfer and sensitivity function of reduced model

## 5. 결론

본 논문에서는 비최소위상플랜트를 다루는데 새로운 접근 방법을 제시하였다. 고차의 플랜트를 근사화하는데 이용하는 모델 저차화 방법을 비최소위상플랜트에 적용하여 최소위상플랜트로 저차화 될 수 있음을 보였다. 본래의 플랜트와의 오차가 허용가능한 정도라면 저차화된 최소위상플랜트를 실제 플랜트로 가정하여 제어기 설계를 할 수 있다. 이 때 허용된 오차 이상의 강인한 특성을 갖는 제어기를 설계하여야 할 것이다.

최소위상플랜트로 저차화될 수 있는 비최소위상플랜트의 집합에 대한 규정과 Hankel 특이값과 불안정한 영점을 발생시키는 상태변수에 대응하는 플랜트의 파라미터와의 해석적인 연관 관계를 유도하지 못하였다. 또한, 본래 플랜트와 저차화 플랜트의 극점과 영점의 위치가 변함을 알수 있는데 이에 대한 한계도 명확히 해야할 것이다. 이들은 앞으로 계속 연구 되어야 할 과제로 남아있다.

- 본 논문은 한국 과학 재단 핵심 전문 연구비(921-0800-028-2) 지원으로 수행되었으며 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

[1] J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concepts for a Classical/Modern Synthesis," *IEEE Trans on Automatic Control*,

Vol. 26, No.1, pp. 4-16, 1981

[2] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, 1993

[3] D. Enns, "Model Reduction with Balanced Realizations : An Error Bound and a Frequency Weighed Generalizations," Proc. 23<sup>rd</sup> Conf. Dec. Contr. , Las Vegas, NV, 1984

[4] L. Fortuna, G. Nunnari, and A. Gallo, *Model Order Reduction Techniques with Applications in Electrical Engineering*, Springer-Verlag, 1992

[5] J. S. Freudenberg and D. P. Looze, "Righ Half Plane Poles and Zeros an Design Trade offs in Feedback Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 30, No. 2, pp. 555-565, 1985

[6] B. C. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Osevability, and Model Reduction." *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 26, No. 1, pp 17-32, 1981

[7] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model Reduction via Balanced State Space Representation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol 27, No. 2, 1982

[8] G. Stein and M. Athans, "LQG/LTR Procedure for Multivariable Feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 32, No.2, pp. 105-114, 1987

[9] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996