Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

고유공간지정법과 LQR제어기법과의 관계 연구

The Study on the Relations Between LQR and Eigenstructure Assignment

°김희섭, 김유단

서울대학교 항공우주공학과 (Tel:880-7398; Fax:887-2662; E-mail: ydkim@aerol.snu.ac.kr)

Abstracts The Object of this study is to find the relations between LQR and eigenstructure assignment regulator. Algorithms for computing weighting matrices are proposed for the case that (i) closed-loop eigenvalues are specified, and (ii) closed-loop gain matrix is given. We also present a new eigenstructure assignment algorithm that minimizes a linear quadratic performance index.

Keyword LQR, Eigenstructure Assignment, Weight Matrix, Minimization

1. 서론

제어기를 설계하는 방법은 크게 최적제어기법[1]과 고유공간지정법[3]으로 나누어진다. 최적제어기법은 시스템의 입력과 이에 대한 반응의 가중함수로 정의된 목적함수를 최소화하는 안정한 제어기를 설계하며, 고유공간지정법은 폐루프 시스템이 주어진 특성을 갖도록 설계한다. 최적제어기법을 이용해서 제어기를 설계하는 경우, 대수적인 행렬식을 풀어서 이득행렬을 계산하고, 이를 이용하여 폐루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 얻을 수 있다. 그러나, 반대로 고유공간 정보가 주어져 있을 때, 이를 이용하여 최적제어기의 가중행렬을 추정하는 것은 상당히 어렵다.

본 논문에서는 최적제어기를 설계하는데 있어서 고유공간 정보를 제어기에 포함시키는 방법에 대한 연구를 수행하였다. 폐루프 시스템의 고유치가 주어진 값을 갖도록 최적제어기법의 가중함수를 결정하는 문제와 최적제어기를 설계할 때 구속조건으로 주어진 고유치를 동시에 지정하는 문제[4][6]을 고려하였다. 특히, 시스템의 특성방정식이 주어진 경우, 이득행렬이 주어진 경우의 가중행렬 보정 기법에 대한 이론을 전개하였고, 고유치와 고유벡터가 지정되어 있는 경우에 잉여 자유도를 이용한 최적제어기 설계기법을 공식화하였다.

2. 시스템의 특성 방정식이 주어진 경우

본 절에서는 폐회로 시스템의 특성방정식이 주어진 경우, 이를 만족하는 최적제어기의 가중행렬과 제어 이득을 구하기 위한 필요조건을 유도하도록 한다. 다음과 같은 제어 가능한 시불변 선형시스템을 고려하자.

$$\dot{x}=Fx+Gu, \quad u=-Kx \tag{2.1}$$

여기서 x, u는 n, m차원의 상태변수, 제어입력이며 F, G는 시스템 행렬 및 입력행렬, K는 이득행렬이다. 이러한 시스템에 대하여 선형 최적제어기는 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 제어기를 설계하는 것으로 정의된다.

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty \{x^TQx+u^TRu\}\,dt \tag{2.2}$$

선형최적제어기의 이득행렬은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$PF+F^TP-PGR^{-1}G^TP+Q=0 \tag{2.3}$$

$$K^TR=PG \tag{2.4}$$

본 논문에서 고려하고 있는 고유공간 지정법과 LQR제어기법과의 관계를 보여주는 정리는 다음과 같다.

정리 1. 최적제어기법에 의해 설계된 폐루프 시스템의 특성방정식을 갖도록 하는 가중함수 Q와 R은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned}&|I+R^{-1}G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}G|\\&=\frac{|-sI-F^T-K^TG^T|\,|sI-F-GK|}{|sI-F|\,|-sI-F^T|}\end{aligned} \tag{2.5}$$

(증명) 식(2.4)를 식(2.3)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}G+R\\&=[I-G^T(-sI-F^T)^{-1}K^T]R[I-K(sI-F)^{-1}G]\end{aligned} \tag{2.6}$$

이때 $\alpha(s)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha(s)=|R+G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}G|\,|sI-F|\,|-sI-F^T| \tag{2.7}$$

위 식에 식(2.6)을 사용하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha(s)=|-sI-F^T-K^TG^T|\,|R|\,|sI-F-GK| \tag{2.8}$$

결국, 식(2.7)과 식(2.8)로부터 최종식 (2.5)를 얻을 수 있다.

보조정리 1. 시스템이 주어진 폐루프 시스템의 특성방정식을 갖도록 하는 가중행렬 Q와 R은 다음 식을 만족한다.

$$\begin{aligned}&|Q|\,|-(sI-F)Q^{-1}(-sI-F^T)-GR^{-1}G^T|\\&=|sI-F-GK|\,|sI+F^T+KG|\end{aligned} \tag{2.9}$$

(증명) 식(2.5)의 좌변은 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}&|I+R^{-1}G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}G|\\&=|I+GR^{-1}G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}|\end{aligned} \tag{2.10}$$

행렬 A를 다음과 같이 정의하자.

$$A=\begin{bmatrix} I & GR^{-1}G^T \\ I & -(sI-F)Q^{-1}(-sI-F^T)\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

행렬 A의 Determinant 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}|A|&=|I+GR^{-1}G^T(-sI-F^T)^{-1}Q(sI-F)^{-1}|\\&\cdot|Q^{-1}|\,|sI-F|\,|sI+F^T|\end{aligned} \tag{2.12}$$

식(2.12)에 식(2.5),(2.10)을 고려하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&|Q|\begin{vmatrix} I & GR^{-1}G^T \\ 0 & -(sI-F)Q^{-1}(-sI-F^T)-GR^{-1}G^T\end{vmatrix}\\&=|sI-F-GK|\,|sI+F^T+K^TG^T|\end{aligned} \tag{2.13}$$

이를 이용하면 식(2.9)을 얻을 수 있다.

식(2.9)은 가중행렬과 시스템 행렬, 그리고 이득행렬이 만족해야 하는 관계를 보여주고 있다. 따라서, 위 식을 만족하는 가중행렬을 찾는 문제는 다음과 같은 비용함수를 최소화하는 문제로 바꿀 수 있다.

$$J=\sum_{i=1}^{n} w_i\,e_i^2 \tag{2.14}$$

여기서

$$\begin{aligned}e_i=&|Q|\,|(s_iI-F)Q^{-1}(s_iI+F^T)-GR^{-1}G^T|\\&-|s_iI-F-GK|\,|s_iI+F^T+K^TG^T|\end{aligned}$$

위 식에서 s_i 가 폐루프시스템의 고유치인 경우 e_i의 두 번째 항이

영이 되며, 이를 최소자승의 개념에서 구하면 근사적인 Q와 R이 구해진다. 폐루프시스템 방정식은 다음과 같다.

$$F_c = F - GK = F - GR^{-1}G^TP = F - SP \qquad (2.15)$$

여기서 $S = GR^{-1}G^T$ 이다. 가중함수 Q와 R을 보정함에 있어서, 고유치의 Q와 R에 대한 미분값을 알 수 있는 경우, 보정을 효율적으로 수행할 수 있다. 가중행렬 Q의 (u, v)번째 요소 Q_{uv}에 대한 고유치 미분은 다음과 같이 정의된다.[3]

$$\frac{d\lambda_s(F_c)}{dQ_{uv}} = \psi_s^T \frac{dF_c}{dQ_{uv}} \phi_s \qquad (2.16)$$

여기서 ψ_s, ϕ_s는 각각 폐루프 시스템의 s번째 고유치에 대한 고유벡터이다. 폐루프 시스템의 고유값은 이들 행렬에 의해 변화하므로 T=SP라고 하면, 고유값은 행렬 T에 대해서 다음과 같이 연쇄법칙을 적용할 수 있다.

$$\frac{d\lambda_s(F_c)}{dQ_{uv}} = \frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial P_{lm}} \frac{\partial P_{lm}}{\partial Q_{uv}} = -\psi_s^T \frac{\partial T}{\partial P_{lm}} \phi_s \frac{\partial P_{lm}}{\partial Q_{uv}} \qquad (2.17)$$

여기서

$$\frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial P_{lm}} = -\psi_{si}(S_{ik}\delta_{kl}\delta_{mj})\phi_{sj} \qquad (2.18)$$

또한, 식(2.3)을 Q_{uv}에 대한 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$(F^T - PGR^{-1}G^T)\frac{\partial P}{\partial Q_{uv}} + \frac{\partial P}{\partial Q_{uv}}(F - GR^{-1}G^TP) + \frac{\partial Q}{\partial Q_{uv}} = 0 \qquad (2.19)$$

위 식으로부터 $\frac{\partial P}{\partial Q_{uv}}$를 계산할 수 있다. 식(2.18)과 식(2.19)의 해를 식(2.17)에 대입하여 폐회로 고유치의 Q에 대한 미분값을 구할 수 있다.

가중함수 R에 대한 미분식을 구하는 과정은 다음과 같다.

$$\frac{d\lambda_s(F_c)}{dR_{uv}} = \frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial R_{uv}} + \frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial P_{lm}} \frac{\partial P_{lm}}{\partial R_{uv}} \qquad (2.20)$$

위 식의 우변의 첫 항을 살펴보면 다음식을 얻을 수 있으며,

$$\frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial R_{uv}} = \psi_s^T \frac{\partial F_c}{\partial R_{uv}} \phi_s = \psi_s^T GR^{-1} \frac{\partial R}{\partial R_{uv}} R^{-1}G^TP\phi_s \qquad (2.21)$$

두번째 항은 식(2.17)과 유사한 과정을 거치게 된다.

$$\frac{\partial\lambda_s(F_c)}{\partial P_{lm}} \frac{\partial P_{lm}}{\partial R_{uv}} = -\psi_s^T \frac{\partial T}{\partial P_{lm}} \phi_s \frac{\partial P_{lm}}{\partial R_{uv}} \qquad (2.22)$$

여기서 리카티 행렬을 R_{uv}에 대한 미분은 식(2.3)을 미분한 뒤 정리하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(F^T - PGR^{-1}G^T)\frac{\partial P}{\partial R_{uv}} + \frac{\partial P}{\partial R_{uv}}(F - GR^{-1}G^TP) \\ + PGR^{-1}\frac{\partial R}{\partial R_{uv}} R^{-1}G^TP = 0\end{aligned} \qquad (2.23)$$

앞에서와 마찬가지로 Lyapunov방정식을 풀어서 $\frac{\partial P}{\partial R_{uv}}$를 구할 수 있으며, 식(2.21)-(2.23)을 이용하여 폐회로 고유치의 R에 대한 미분값을 얻을 수 있다.

3. 시스템의 이득이 주어진 경우

본 절에서는 시스템의 제어 이득이 주어진 경우, 이러한 제어이득을 제공하는 최적제어기의 가중행렬이 만족해야하는 필요조건을 유도하도록 한다. 시스템의 이득이 주어진 경우 식(2.3)에 식(2.4)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$G^TQG - G^TK^TRKG = RKFG + G^TF^TK^TR \qquad (3.1)$$

위 식으로부터 행렬G의 랭크가 n인 경우 대칭행렬 Q를 구할 수 있다. 그러나, 대부분의 경우 G의 랭크는 n보다 작으며, 랭크가 n이더라도 행렬 Q가 양행렬(positive definite matrix)임을 보장할 수 없다. 이는 가중행렬 Q는 이득행렬 K에 의해 결정됨을 알 수 있다.

정리 2. 주어진 이득 행렬 K에 대하여 식(2.4)를 만족시키는 행렬 P는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$P = (G^T)^+RK + \{I - (G^T)^+(G^T)\}Z \qquad (3.2)$$

여기서 Z는 임의의 행렬이며, $(G^T)^+ = G(G^TG)^{-1}$이다. 위 정리는 Null Space를 고려한 식(2.4)의 일반해로 잘 알려져 있으므로 증명은 생략한다.[5]

보조정리 2. P^2가 대칭 양행렬이면, 대칭 양행렬 P가 존재한다.

제어이득행렬이 주어진 경우 가중함수를 구하는 과정은 다음 3단계를 거쳐 구하게 된다.

[단계 1] 행렬 R을 구한다. 그러나 구한 R에 대해서 대칭 양행렬 P가 존재하지 않을 수 있다. 이를 살펴보기 위하여 시스템을 Block Controller형태로 변환시키면 G는 다음과 같이 된다.[7]

$$G = \begin{bmatrix} O_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

여기서 $O_1 \in R^{(n-m, m)}$, $I_1 \in R^{(m, m)}$이다. 식(2.4), 식(3.2)을 만족하는 행렬들은 일반적으로 다음 식을 만족한다.

$$G^T(P + NL) = RK^T \qquad (3.4)$$

여기서 $N = null\,(G^T)$이므로, 식(2.4)를 만족하는 $P_0(= P + NL)$는 유일하지 않다. 식(3.2)는 두 개의 항으로 이루어져 있으며, 영공간 행렬의 특징으로 $(G^T)^+RK^T$항과 $(I - (G^T)^+(G^T))Z$항은 서로 영향을 받지 아니한다. 이는 행렬 P가 N에 의해서 영향을 받는 않는 부분과 영향을 받는 부분으로 나누어짐을 의미한다. 행렬 P와 K의 형태를 다음과 같이 가정하자.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \qquad K = [\,K_1 \; K_2\,] \qquad (3.5)$$

여기서 P_{22}와 K_1는 각각 $m \times m$행렬이다. 식(3.3)을 고려해 볼 때, G^T의 영 공간인 N은 다음과 같은 구조를 가지게 된다.

$$N = \begin{bmatrix} I_2 \\ O_2 \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

여기서 $O_2 \in R^{(m, m)}$, $I_2 \in R^{(n-m, m)}$이다. 식(3.4)-(3.6)으로부터 영공간 N을 사용해도 P_0가 변하지 않는 부분이 존재함을 알 수 있다. P_0가 대칭이기 위해서 최소한 P_{22}가 대칭성을 가지고 있어야 하며, 이를 만족하지 못하면 대칭행렬 P는 존재하지 않는다. 결국, P_0가 대칭이기 위해서는 $(G^T)^+RK$에서 P_{22}에 대응되는 부분이 대칭이 되도록 R을 선택해야 한다. 이때 식(3.3)과 같은 G의 특수한 구조를 식(2.4)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$P_{22} = RK_2 \qquad (3.7)$$

정리 3. 임의의 행렬 $A \in R^{mm}$에 대하여 TA가 대칭행렬이 되도록 하는 대칭행렬 $T \in R^{mm}$가 존재한다.

(증명) TA가 대칭행렬이 되기 위한 구속조건의 수는 $\frac{m(m-1)}{2}$개인데, 대칭행렬 T의 변수의 수는 $\frac{(m+1)m}{2}$이다. 따라서, m개의 자유도가 남게 된다.

정리 4. 대칭행렬 A, B가 양행렬이면 AB는 양행렬이다. 따라서, K_2가 양행렬이 아니면 대칭 양행렬 P_{22}와 R를 구할 수 없다.

보조정리 3. 행렬 A, B가 양행렬일 경우 AB가 반드시 양행렬은 아니며, 행렬 AB의 음의 고유치의 개수는 짝수이다.

[단계 2] 새로운 대칭 양행렬을 구하는 경우, 영공간에 의해 보정이 되지 않는 부분은 그대로 두고, 영공간에 의해서 보정이 가능한 부분을 보정한다. 즉, $P_{12} = P_{21}^T$과 $P_{11} = P_{11}^T$이 되도록 P_{12}과 P_{11}을 영공간을 이용하면 대칭행렬 P_s를 구할 수 있다.

[단계 3] 앞에서 구한 초기 P_0로부터 영공간 벡터를 이용하여 대칭

행렬 P_s를 구할 수 있지만, 이러한 행렬은 양행렬임을 보장하지 아니한다. 따라서, 대칭 P_s를 영공간을 이용하여 양행렬이 되도록 만들 필요가 있다. 그러나, 구해진 행렬 P_t을 식(2.3)에 대입하는 경우 계산된 Q가 양행렬임을 보장할 수는 없다. 역으로 Q가 양행렬이면, 리카티 행렬식으로부터 P는 양행렬이 된다. 이러한 원리를 이용하여, 변수를 보정할 때 P_p를 통해서 하고, 고유값은 Q를 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해서 다음과 같이 행렬 P_p를 변수화시키자.

$$P_p = P_s + N \tag{3.8}$$

여기서 $N(n_k)$ 은 널 공간에 의해서 이루어진 행렬로 n_k에 의해 매개변수화 되어 있다. 결국, 위에서 논의한 문제는 다음과 같은 비용함수를 최소화하는 문제로 귀결이 된다.

$$J = \sum_i C_i^2 \qquad 여기서 \begin{cases} C_i = 0 & \text{if } \lambda_i(Q) > 0 \\ C_i = \lambda_i(Q) & \text{if } \lambda_i(Q) < 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

최적화 문제를 풀 때, 매개변수에 대한 행렬 Q의 고유치의 해석적인 미분값을 사용하면 효율적이다. 식(2.4)와 식(3.9)을 식(2.3)에 대입하면 다음과 같다.

$$Q = -P_pF - F^TP_p + K^TRK \tag{3.10}$$

이득행렬이 주어져 있고, [단계 3] 과정에 R이 고정되어 있으며, K^TRK는 변화되지 않으므로 행렬 Q의 고유값의 미분은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial\lambda(Q)}{\partial n_k} = \phi^T\left(-\frac{\partial N}{\partial n_k}F - F^T\frac{\partial N}{\partial n_k}\right)\phi \tag{3.11}$$

식(3.11)을 이용하여 Q의 고유치가 양이 되도록 변수 n_k를 보정한다. 또한, 다음과 같이 페널티 함수를 부가하여 최적화 문제를 풀어, 대각행렬과 같은 특수 형태의 행렬 Q를 구할 수 있다.

$$J = \sum_i C_i^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} W_{kl}\, Q_{kl}^2 \tag{3.12}$$

여기서 가중치 W_{kl}은 Q의 구조에 따라 선택한다.

4. 고유치와 고유벡터가 주어진 LQR 문제

모든 고유치와 고유벡터를 지정하여 설계된 제어기는 폐회로 시스템의 특성상 문제점을 가지고 있다. 예를 들면, 고유치와 고유벡터에 부과된 많은 구속조건을 만족하기 위해서 다른 방법에 의해 설계된 제어기보다 상대적으로 이득행렬이 커지거나, 시스템 불확실성에 대하여 강건성이 떨어지는 단점을 가지게 된다. 이러한 이유로 고유공간 지정법을 사용하여 제어기를 설계하는 경우, 남은 자유도를 사용할 때 고유벡터 중에서 꼭 필요한 요소만을 지정하고 나머지는 LQR에서의 비용함수를 최소화하는 방향으로 제어기를 설계하는 방법을 고려할 수 있다[6]. 영공간을 이용한 고유공간 지정법은 다음과 같다.

폐회로 시스템의 고유치문제는 다음과 같이 정의된다.

$$(\lambda_i I - F + GK)N_i = 0 \tag{4.1}$$

위에서 계산되는 영공간을 다음과 같이 블록행렬로 나누면,

$$N_i = \begin{bmatrix} N_{1i} \\ N_{2i} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \cdot\cdot\cdot, n \tag{4.2}$$

이득행렬은 다음과 같이 구해진다.[2]

$$K(\Theta) = -WV^{-1} \tag{4.3}$$

여기서

$$V = V_0\Theta, \qquad V_0 = (N_{11}, \cdot\cdot\cdot, N_{1n}) \tag{4.4}$$

$$W = W_0\Theta, \qquad W_0 = (N_{21}, \cdot\cdot\cdot, N_{2n}) \tag{4.5}$$

$$\Theta = diag(\theta_i) \tag{4.6}$$

$$\theta_i = (\theta_{i1}, \cdot\cdot\cdot, \theta_{im})^T \tag{4.7}$$

위 식에서 θ_{ij}는 고유치 λ_i에 해당하는 $\lambda_i I - F + GK$ 의 영공간 N_i를 선형조합하기 위한 계수로, 고유벡터의 요소를 지정함과 동시에 LQR의 비용함수를 최소화하기 위해 사용되는 매개변수이다. 고유공간 지정에 사용되는 식(3.2)에 매개변수 Θ가 도입됨에 따라, 다음과 같은 목적함수를 최소화하는 문제로 바꾸어 생각할 수 있다.

$$\min_\Theta \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^TQx + u^TRu)\, dt \tag{4.8}$$

이러한 문제의 경우 모든 고유치를 지정하는 문제는 쉽게 공식화가 가능하다. 위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\min_\Theta \frac{1}{2}\int_0^\infty x^T(Q + K^TRK)x\, dt \tag{4.9}$$

최적화조건을 고려하면 행렬 L, Θ, P 에 대해 다음 세 개의 식을 얻을 수 있다. [7]

$$I + (F - GK)L + L(F - GK)^T = 0 \tag{4.10}$$

$$(F - GK)^TP + P(F - GK) + Q + K^TRK = 0 \tag{4.11}$$

$$2(W_0 - FV_0)^T[RFL + G^TQL](V^T)^{-1} = 0 \tag{4.12}$$

고유치 외에 고유벡터도 지정하는 경우에는 다음과 같은 구속조건이 주어진다.

$$V = V_0\Theta \tag{4.13}$$

반복적인 비선형계획법에 의해 해를 구하기 위해서 다음과 같이 매개변수 갱신과정을 도입하자.

$$\Theta = \Theta_{old} + \delta\Theta \tag{4.14}$$

식(4.14)를 식(4.13)에 대입하면 다음과 같은 구속조건을 얻을 수 있다.

$$0 = V_0\delta\Theta \tag{4.15}$$

위 문제를 풀기 위한 알고리듬을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 고유치 λ_i와 이에 대한 N_i를 구한다.

(2) 초기값 θ_i 를 추정한다.

(3) 식(4.4)과 식(4.5)를 이용하여 W와 V를 구한다.

(3) 식(4.3)으로부터 K를 구한다.

(4) 식(4.12)를 이용하여 방향벡터를 구한다. $\delta\Theta$를 선택함에 있어서 식(4.15)를 만족하도록 선택을 한다.

(5) $\delta\Theta$의 값이 충분히 작으면 종료하고, 그렇지 않을 경우 식(4.14)로부터 Θ를 갱신하여 (3)부터 다시 수행한다.

5. 시뮬레이션 및 검토

수치예를 위한 모델로 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & -0.20 & 0.01 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0.01 & -0.20 & 0.01 \\ 0 & 2 & -22 & 0 & 0.01 & -1.10 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이때의 개루프 시스템의 고유값은 다음과 같다.

$$\lambda(F) = -0.0968 \pm 1.3744i \quad -0.1076 \pm 2.4228i \quad -0.5456 \pm 4.6813i$$

다음과 같은 가중행렬 Q와 R을 선택하자.

$$Q = diag([12\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ \ 1\ \ 5\ ]), \quad R = diag([2\ \ 1\ ])$$

이때 계산된 리카티 행렬 P와 이득행렬 K는 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 13.96 & -2.57 & 0.09 & 1.15 & -0.49 & -0.12 \\ -2.57 & 7.25 & -4.66 & 1.38 & 0.92 & 0.17 \\ 0.09 & -4.66 & 50.31 & 0.16 & -0.35 & 0.01 \\ 1.15 & 1.38 & 0.16 & 3.15 & 0.27 & 0.02 \\ -0.49 & 0.92 & -0.35 & 0.27 & 1.49 & -0.05 \\ -0.12 & 0.17 & 0.01 & 0.02 & -0.05 & 2.28 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.5729 & 0.4854 \\ -0.6886 & -0.9244 \\ -0.0794 & 0.3479 \\ -1.5753 & -0.2708 \\ -0.1354 & -1.4901 \\ -0.0101 & 0.0503 \end{bmatrix}$$

폐루프 시스템의 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda(F) = -0.9545 \pm 1.3845i \quad -0.7702 \pm 2.4088i \quad -0.5581 \pm 4.6852i$$

5.1 시스템의 특성 방정식이 주어진 경우

시스템의 폐회로 특성 방정식과 가중행렬 중에 R이 주어진 경우 G를 구하는 문제이다. 다음과 같은 초기값 $Q_0 = 5I_{6\times 6}$로 선택하자. 2절에서 유도된 알고리듬을 사용한 비선형 프로그래밍기법에 의해 계산된 행렬 Q_1값은 다음과 같다.

$$Q_1 = diag([\,12.000 \;\; 3.0000 \;\; 2.0001 \;\; 4.0000 \;\; 1.0000 \;\; 5.0000\,])$$

주어진 Q행렬과 비교해보면 잘 찾아가고 있음을 알 수 있다.

5.2 시스템의 이득이 주어진 경우

고유치만을 비용함수로 고려한 경우와 행렬 Q의 형태를 구속조건으로 고려한 경우에 대해서 각각 살펴보기로 하자.

5.2.1 고유치만을 비용함수로 고려한 경우

먼저 식 (3.2)를 이용하여 계산을 하는 경우, 리카티행렬은 다음과 같은 값으로 수렴한다.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.4817 & -0.1058 & -0.1681 & 0.6032 & -0.5032 & -0.0235 \\ -0.1058 & 0.4163 & 0.0703 & 0.5922 & 0.5496 & 0.0108 \\ -0.1681 & 0.0703 & 0.9260 & 0.1083 & -0.2846 & -0.0105 \\ 1.1458 & 1.3772 & 0.1587 & 3.1507 & 0.2708 & 0.0202 \\ -0.4854 & 0.9244 & -0.3479 & 0.2708 & 1.4901 & -0.0503 \\ -0.0235 & 0.0108 & -0.0105 & 0.0143 & -0.0409 & 0.9985 \end{bmatrix}$$

P_0에서 G의 영향이 나타나는 부분인 4번째와 5번째 행, 4번째와 5번째 열이 대칭이 아님을 알 수 있다. 그러나 4번째와 5번째 행은 영공간에 의해서 보정이 불가능하므로 4번째와 5번째 열을 영공간을 이용하여 보정하여 대칭행렬을 만들고, 행렬 N을 구성하여 비선형 프로그래밍을 이용하여 다음과 같은 행렬 P를 구할 수 있다.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 15.828 & -3.9301 & 0.6034 & 1.1458 & -0.4857 & -0.3457 \\ -3.9301 & 7.6535 & -1.1868 & 1.3772 & 0.9244 & 0.4134 \\ 0.6034 & -1.1868 & 16.801 & 0.1587 & -0.3479 & 0.5685 \\ 1.1458 & 1.3772 & 0.1587 & 3.1507 & 0.2708 & 0.0202 \\ -0.4854 & 0.9244 & -0.3479 & 0.2708 & 1.4901 & -0.0503 \\ -0.3457 & 0.4134 & 0.5685 & 0.0202 & -0.0503 & 0.6908 \end{bmatrix}$$

5.2.2 행렬 Q의 형태를 구속시키는 경우

앞의 결과를 살펴보면 행렬 Q의 형태를 지정하지 않았으므로, Q의 모든 요소가 값을 가지고 있는 결과를 얻었다. 그러나, 최적제어기 설계시, 가중행렬을 선정할 때 주어진 좌표계에 가중치를 고려한 대각행렬을 취하는 것이 일반적이다. 따라서, 식(3.12)와 같이 목적함수를 설정하자. 이때 사용된 행렬 W는 대각요소는 모두 0이고, 나머지 요소는 모두 10을 갖는 행렬로 선택하였다. 이를 이용하여 구한 결과 대각 이외의 요소는 매우 작은 값을 가지며, 따라서 행렬 Q_3는 다음과 같이 얻어졌다.

$$Q_3 = diag([\,12.000 \; 3.0000 \; 2.0000 \; 4.0000 \; 1.0000 \; 5.0000\,])$$

대각행렬 형태의 구속조건을 부과하였을 때 얻어진 Q_3행렬은 원래의 Q행렬을 잘 찾아내고 있다.

5.3 고유치와 고유벡터가 주어진 LQR 문제

고유벡터가 주어진 LQR문제를 다루기 위해 AFTI/F-16의 선형 종운동 모델을 고려하였다.[2]

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0.0067 & 1.3411 & 0.1690 & 0.2518 \\ 0 & -0.8694 & 43.2230 & 17.2510 & -1.5766 \\ 0 & 0.9934 & -1.3411 & -0.1690 & -0.2518 \\ 0 & 0 & 0 & -20.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20.0000 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2680 & 47.7600 & -4.5600 & 4.4500 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

이때의 폐루프 시스템의 고유값은 단주기 모드 $\lambda_{1/2}$=-5.6±4.2 I, 피치 모드 λ_3= -1.0, 승강타 작동기 모드 λ_4=-19, 그리고 플래퍼론 작동기 모드 λ_5=-19.5 로 선정하였으며, 원하는 고유벡터의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{\alpha/q} & \gamma & \delta_e & \delta_f & \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 1 \\ x \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ 1 \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \gamma \\ q \\ \alpha \\ \delta_e \\ \delta_f \end{matrix} \end{array}$$

적용결과 초기 K_0에 대하여 K를 구할 수 있고 이 때의 K_0에 대한 목적함수값은 35.3223이었고 K에 대한 값은 33.4852로 값이 작아졌음을 알 수 있었다. 이때 이득 행렬은 다음과 같다.

$$K_0 = \begin{bmatrix} -2.8672 & -0.7865 & -6.2762 & -0.4168 & 0.0745 \\ -1.8457 & 0.2578 & -0.7579 & 0.3201 & -0.0077 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -2.0764 & -0.5127 & -4.5041 & -0.0423 & -0.0999 \\ -0.0469 & 0.8646 & 3.2306 & 1.1575 & -0.3821 \end{bmatrix}$$

6. 결론

본 논문에서는 최적제어기법과 고유공간지정법사이의 제어기 설계에 있어서의 상호관계를 살펴보기 위해서, 고유값, 이득행렬, 그리고 가중함수가 주어진 경우 그 짝을 구하는 알고리듬을 제시하였다. 이득 행렬이 주어진 경우, 영공간을 이용하여 대칭 양행렬 P와 Q를 구하는 체계적인 방법을 제시하였다. 주어진 비용함수를 최소화 시키는데 있어서 고유값과 고유벡터의 요소를 지정하는 문제의 경우, 남는 자유도를 이용하여 이를 동시에 고려하는 문제를 간단한 비행모델에 적용하여 보았다. 이러한 연구 결과의 수식적 관계로부터 특성방정식이 주어지거나, 고유공간 지정법에 의해 시스템 제어기가 설계된 경우, 이러한 정보를 역으로 이용하여 최적제어기에서의 가중함수 Q와 R에 대한 정보를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 또한 고유치와 고유벡터를 지정하는 제어기 설계의 경우, 부분적으로 고유벡터를 지정하는 경우 남는 자유도를 이용하여 LQR에서의 비용함수를 최소화하는데 사용할 수 있음을 알 수 있었다.

7. 참고문헌

[1] B.D.O. Anderson and J.B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1989.

[2] A.N. Andry, E.Y. Shapiro, and J.C. Chung, "Eigenstructure Assignment for Linear System," IEEE Trans. Aerospace & Electronics, Vol. AES-19, Sep. 1983, pp. 715-729.

[3] D.S. Bodden and J.L. Junkins., "Eigenvalue Optimization Algorithms For Structure/Control Design Iterations," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.8, Nov.-Dec., 1985, pp. 697-706.

[4] M. Gopal and P. Pratapachandrannair, " Sensitivity Reduced Optimal Linear Regulator with Prescribed Closed-loop Eigenvalues," IEEE Trans. Automatic Control., Vol. AC-29, July 1984, pp. 661-664.

[5] T. Kailath, *Linear System* Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980.

[6] B.H. Kwon and M.J. Youn ,"Optimal Regulators Using Time-Weighted Quadratic Performance Index with Prespecified Closed-Loop Eigenvalues," IEEE Trans. Automatic Contrpl, Vol. AC-31, May 1986, pp. 449-451

[7] F. L. Lewis, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc., New York., 1980.