

유연우주비행체의 선회 및 진동억제를 위한 Torque Shaping 기법에 관한 연구

A Study on Torque Shaping Method

for Slewing and Vibration Suppression of Flexible Structures

°문 중 윤 , 식 진 영 , 김 유 단

서울대학교 항공우주공학과 (Tel:880-7398; Fax:887-2662; E-mail: ydkim@aerol.snu.ac.kr)

Abstracts The objective of this paper is to present a new input torque shaping method for slewing and vibration suppression of flexible structure based on Fourier series expansion. Vibration energy of the structure with shaped control input is investigated with respect to the shaping parameter of the reference torque, maneuver time and the number of trigonometric functions to be included in the series. Analytic expressions of the performance indices and their derivatives are derived in the modal coordinates. Numerical results show the effectiveness of the proposed approach to design the open-loop control law that modifies the shape of input torque for simultaneous slewing and vibration suppression.

Keywords Torque Shaping, Slewing, Vibration Suppression, Flexible Structures, Fourier Series Expansion

1. 서론

다목적 위성 및 허블망원경 등 우주비행체의 초정밀 포인팅 및 빠른 재조준 임무수행과 관련하여, 선회 및 선회이후에 태양 전지판을 포함한 위성체 구조물의 진동을 억제하는 것이 위성체 연구의 주된 관심사중의 하나로 부각되었다. 유연우주비행체의 선회 및 진동억제를 위한 방법으로는 트야프노프 안정 이론에 근거한 기법과[1-3], 유연우주비행체의 진동 모드를 가능한 한 가진하지 않도록 하는 다양한 torque shaping 기법들이 연구되었다 [4-7].

본 논문에서는 회전이 가능한 유연구조시스템이 rest-to-rest 기동을 할 때 요구되는 각도를 선회하면서 구조물의 고주파모드를 간섭하지 않도록 제어입력을 푸리에 전개에 근거하여 최적화하는 연구를 수행하였다. 본 논문의 2장에서는 형상매개변수, 최종도달시간에 따른 유연우주비행체의 진동에너지 고찰하였으며, 3장에서는 반동휠을 이용하여 대각선회시에 요구되는 최적입력을 설계하였다. 4장에서는 3장의 결과를 확장하여, 반동휠과 압전구동기를 동시에 고려하였을 때 대각선회 및 진동억제를 위한 구동기의 입력을 최적화하였고, 5장에서는 수치해 결과를 통하여 본 논문에서 제안된 Torque shaping 기법의 유효성을 검증하였다.

2. 대각선회시의 진동에너지 해석

본 장에서는 각종 매개변수들을 이용하여 최소시간 기동의 최적인 Bang-Bang 입력을 근사화한 제어입력을 사용하였을 때 유발되는 유연구조물의 진동 에너지를 고찰해 보고자 한다. 최소

시간 기동을 위해서는 Bang-Bang 형태의 입력이 최적이지만, 순간적인 입력 변화로 인하여 잔여 진동을 크게 유발하며 모델의 변화에 매우 민감하고 물리적으로 구현하기가 힘든 단점이 있다. 따라서 이를 적절히 개선하여 새로운 형태의 제어입력을 설계하고자 한다.

강체 운동과 탄성운동을 모두 고려한 복합좌표계를 사용하여 [Fig.1]과 같이 반동휠을 구동기로 사용한 모델의 운동방정식을 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 구한다. [3]

$$M \ddot{x} + K x = F u \quad (1)$$

$$x = [\theta \ w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2 \ \dots \ w_n \ \theta_n \ \dots]^T$$

여기서 θ 는 중앙 동체의 선회 각이고, w_i 는 i 번째 요소의 가로 방향 변위이며, θ_i 는 i 번째 요소의 각 변위이다.

Bang-Bang 입력을 푸리에 전개를 통해 근사화하기 전에 초기 및 최종 도달시간에서의 토크 입력의 불연속성을 보완하기 위하여 [Fig. 2]와 같이 개선된 Bang-Bang 입력을 고려하자. 이 함수를 푸리에 전개하면 다음과 같다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{i \pi t}{t_f/2} \quad (2)$$

여기서 M 은 근사화하기 위해 사용된 함수의 개수이고, 계수 a_i 는 다음과 같다.

$$a_i = \frac{2}{t_f/2} \int_0^{t_f/2} u(t) \sin \frac{i \pi t}{t_f/2} dt \\ = -\frac{2 u_{max}}{i \pi} \cos i \pi \{ 1 - \cos (1 - \delta) i \pi \} \quad (3)$$

유연우주비행체의 선회시 및 선회이후의 잔여진동 에너지를 형상매개변수 δ , 최종도달시간 T_f 에 대해 그려보면 [Fig. 3]과 같다.

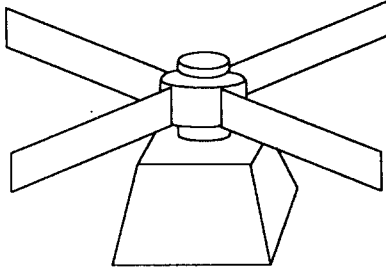


그림 1. 유연 구조물
Fig. 1. Flexible System

시간 축을 보면, 첫 번째 진동모드에 해당하는 시간의 실수배가 될 때마다 진동에너지는 극부적인 최대치를 보여주고 있다. 또한 형상매개변수 δ 가 0과 0.5에 접근할수록 진동에너지가 커지는 것을 알 수 있다. 이로부터 유연우주비행체의 진동에너지를 최소로 하는 적절한 매개변수들의 집합을 선정할 수 있다. 본 논문에서는 $\delta = 0.12$, $T_f = 3.22$ 로 설정하였다.

3. 반동휠을 이용한 Torque Shaping

본 장에서는 [Fig.1]과 같은 유연우주비행체의 대각선회 및 진동억제를 위한 구동기로 중앙동체에 위치한 반동휠만을 이용하는 경우에 대하여 성능지수와 구속조건을 구하도록 한다.

식 (1)을 모달공간에서 고려하기 위해서 좌표변환을 해보자.

$$\mathbf{X} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (4)$$

여기서 Φ 는 질량행렬 \mathbf{M} 과 강성행렬 \mathbf{K} 를 이용해서 고유치문제를 풀어서 얻은 모달행렬과 다음식에 의해 정규화된 행렬이다.

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (5)$$

식 (4)를 식 (1)에 대입하고 (5)를 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n &= \phi_n u \\ &= \phi_n \sum_{i=1}^M a_i \sin \omega_i t \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, ϕ_n 은 $\Phi^T \mathbf{F}$ 의 n 번째 요소이다.

식 (6)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\eta_n(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_{ni} \left\{ \sin \omega_i t - \frac{\omega_i}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} \quad (7)$$

$$\eta_n(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_{ni} \omega_i \left\{ \cos \omega_i t - \cos \omega_n t \right\} \quad (8)$$

여기서

$$\alpha_{ni} = \frac{\phi_n a_i}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \quad (9)$$

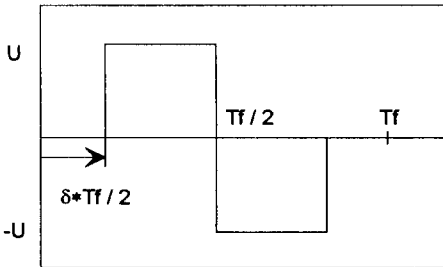


그림 2. 개선된 Bang-Bang 입력
Fig. 2. Modified Bang-Bang Input

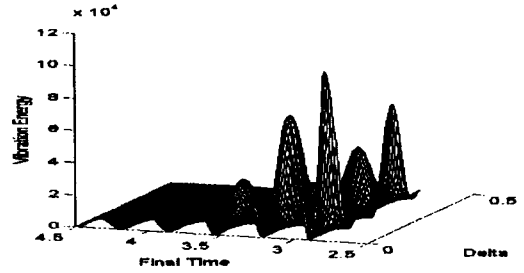


그림 3. δ 와 T_f 에 따른 진동에너지

Fig. 3. Vibration Energy for various δ and T_f

반동휠의 입력형상을 최적화하기 위해서 다음과 같이 3개의 지수를 고려하며, 이들의 가중합을 성능지수로 삼는다. 첫 번째 지수는 선회시에 발생하는 진동에너지의 총합으로서 다음과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned} J_1 &= x_1 \int_0^{t_f} (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}) dt \quad (10) \\ &= x_1 \int_0^{t_f} \sum_{n=1}^N (\omega_n^2 \eta_n^2 + \dot{\eta}_n^2) dt \end{aligned}$$

식 (7)과 (8)를 이용하여 적분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_f} \omega_n^2 \eta_n^2(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_n^2 \alpha_{ni} \alpha_{nj} \times \\ &\left[-\frac{\omega_j}{2\omega_n} \left\{ \frac{\sin(\omega_n - \omega_i)t_f}{\omega_n - \omega_i} - \frac{\sin(\omega_n + \omega_i)t_f}{\omega_n + \omega_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_i}{2\omega_n} \left\{ \frac{\sin(\omega_n - \omega_j)t_f}{\omega_n - \omega_j} - \frac{\sin(\omega_n + \omega_j)t_f}{\omega_n + \omega_j} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_i \omega_j}{2\omega_n^2} \left\{ t_f - \frac{\sin 2\omega_n t_f}{2\omega_n} \right\} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^M \omega_n^2 \alpha_{ni}^2 \frac{t_f}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_f} \dot{\eta}_n^2(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_{ni} \alpha_{nj} \omega_i \omega_j \times \\ &\left[\frac{t_f}{2} + \frac{\sin 2\omega_n t_f}{4\omega_n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_n + \omega_i)t_f}{\omega_n + \omega_i} + \frac{\sin(\omega_n - \omega_i)t_f}{\omega_n - \omega_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_n + \omega_j)t_f}{\omega_n + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_n - \omega_j)t_f}{\omega_n - \omega_j} \right\} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^M \alpha_{ni}^2 \omega_i^2 \frac{t_f}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

최종 도달시간 이후에는 외부에서 선회를 위한 제어 입력이 더 이상 인가되지 않으므로, 이 때의 진동에너지가 매우 중요한 역할을 한다. 따라서 선회이후의 잔여진동에너지를 최소화하기 위해서 최종시간에서의 진동에너지를 두 번째 지수로 설정하였다.

$$\begin{aligned} J_2 &= x_2 (\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x})|_{t_f} \quad (13) \\ &= x_2 \sum_{n=1}^N (\omega_n^2 \eta_n^2 + \dot{\eta}_n^2)|_{t_f} \end{aligned}$$

여기서 식(7)과 (8)에 $t = t_f$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 \eta_n^2(t_f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ni} a_{nj} \omega_i \omega_j \sin^2 \omega_n t_f \quad (14)$$

$$\dot{\eta}_n^2(t_f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_{ni} a_{nj} \omega_i \omega_j (1 - \cos \omega_n t_f)^2 \quad (15)$$

또한, 기준 Bang-Bang 입력과의 오차를 최소화하도록 하기위 해서 앞의 두 개의 지수를 최소화하는 입력의 최대치를 가능한 낮게 유지하도록 세 번째 지수를 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} J_3 &= x_3 \int_0^{t_f} [T(t) - T_{ref}(t)]^2 dt \\ &= x_3 \left\{ \frac{u_{\max}^2 (1 - \delta) t_f}{2} + \frac{t_f}{4} \sum_{i=1}^M a_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\max} t_f}{\pi} \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{i} [\cos \pi i - \cos \delta \pi i] \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{여기서 } u_{\max} = \frac{4 I \Theta_f}{(1 - \delta)^2 t_f^2} \quad (17)$$

한편 rest-to-rest 기동을 만족시키기 위해서 입력토크가 만족해야 하는 조건은 최종시간에 최종목표각 Θ_f 를 만족시켜야 하며, 최종각속도가 0이어야 한다. 강제모드의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$I \ddot{\Theta} = \tau(t) = \sum_{i=1}^M a_i \sin \omega_i t \quad (18)$$

초기 조건을 고려하여 위 식을 적분하면 다음과 같다.

$$I \dot{\Theta}(t) = \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{\omega_i} \left(t - \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \right) \quad (19)$$

최종시간 t_f 에 돌아간 각과 각속도는 다음과 같다.

$$\Theta(t_f) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{\omega_i} \left(t_f - \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t_f \right) \quad (20)$$

$$I \dot{\Theta}(t_f) = \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{\omega_i} (1 - \cos \omega_i t_f)$$

여기서 $\omega_i = \frac{2\pi i}{t_f}$ 이다.

정리하면, 최종목표각이 Θ_f 이며 최종각속도가 0이어야 한다는 조건을 만족시키기 위해서는 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^M \frac{a_i}{i} = \frac{2\pi I}{t_f^2} \Theta_f \quad (21)$$

유연우주비행체의 대각선회 및 진동억제를 위한 반동휠의 최적입력은 설정된 성능지수식 (10),(13),(16) 및 구속조건식 (21)을 이용하여 최적화할 수 있다.

4. 압전구동기의 Torque Shaping

본 장에서는 반동휠과 압전구동기를 모두 사용하여 대각선회 및 진동억제를 수행하는 경우에 대하여 각 구동기의 최적입력을 구한다. 운동방정식 (1)은 압전구동기가 부착된 경우에 대하여 확장되어 입력벡터가 반동휠 토크 입력 u_r 과 압전재료 구동기 입력전압 u_p 로 이루어지며, 입력행렬 F 도 압전기 위치를 반영하여 확장된다.

3장과 같이 모달 행렬 Φ 를 이용하여 모달좌표계로 바꾸면 다음과 같다.

$$\dot{\eta}_n + \omega_n^2 \eta_n = \phi_{n1} u_r + \phi_{n2} u_p \quad (22)$$

유연우주비행체의 진동에너지는 구조물의 고유진동모드에 해당하는 진동에너지와 외력에 의한 진동에너지의 합으로 나타나

므로, 진동을 제어하기 위한 압전구동기의 구동주파수는 반동휠의 입력과 같게 설정하였다.

$$u_r = \sum_{i=1}^M a_i \sin \omega_i t \quad (23)$$

$$u_p = \sum_{i=1}^M b_i \sin \omega_i t \quad (24)$$

입력 (23)과 (24)에 대해서 식(22)의 해는 다음과 같이 얻어진다.

$$\eta_n(t) = \sum_{i=1}^M \left\{ a_{ni} \left(\sin \omega_i t - \frac{\omega_i}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \right\} \quad (25)$$

$$\dot{\eta}_n(t) = \sum_{i=1}^M \left\{ a_{ni} \omega_i \left(\cos \omega_i t - \cos \omega_n t \right) \right\} \quad (26)$$

$$\text{여기서 } \beta_{ni} = \frac{\phi_{n1} a_i + \phi_{n2} b_i}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \quad (27)$$

제어입력을 구하기 위한 성능지수는 3장과 같게 설정하였고, 압전구동기가 부착된 경우에 대해서는 다음과 같은 해석적인 표현이 유도된다.

$$J_1 = x_1 \int_0^{t_f} \sum_{n=1}^N \left(\omega_n^2 \eta_n^2 + \dot{\eta}_n^2 \right) dt \quad (28)$$

$$J_2 = x_2 \sum_{n=1}^N \left(\omega_n^2 \eta_n^2 + \dot{\eta}_n^2 \right) |_{t_f} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= x_3 \left\{ \frac{u_{\max}^2 (1 - \delta) t_f}{2} + \frac{t_f}{4} \sum_{i=1}^M a_i^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\max} t_f}{\pi} \sum_{i=1}^M \frac{a_i}{i} [\cos \pi i - \cos \delta \pi i] \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

식 (25)와 (26)을 이용하여 적분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int_0^{t_f} \omega_n^2 \eta_n^2 dt &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_n^2 \beta_{ni} \beta_{nj} \times \\ &\quad \left[\frac{\omega_i}{2\omega_n} \left\{ \frac{\sin(\omega_j + \omega_n)t_f}{\omega_j + \omega_n} - \frac{\sin(\omega_j - \omega_n)t_f}{\omega_j - \omega_n} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_j}{2\omega_n} \left\{ \frac{\sin(\omega_i + \omega_n)t_f}{\omega_i + \omega_n} - \frac{\sin(\omega_i - \omega_n)t_f}{\omega_i - \omega_n} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_i \omega_j}{2\omega_n^2} \left(t_f - \frac{\sin 2\omega_n t_f}{2\omega_n} \right) \right] + \sum_{i=1}^M \frac{\beta_{ni}^2 t_f}{2} \omega_n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int_0^{t_f} \dot{\eta}_n^2(t) dt &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \beta_{ni} \beta_{nj} \omega_i \omega_j \times \\ &\quad \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_n + \omega_i)t_f}{\omega_n + \omega_i} + \frac{\sin(\omega_n - \omega_i)t_f}{\omega_n - \omega_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(\omega_n + \omega_j)t_f}{\omega_n + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_n - \omega_j)t_f}{\omega_n - \omega_j} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(t_f + \frac{\sin 2\omega_n t_f}{2\omega_n} \right) \right] + \sum_{i=1}^M \frac{\beta_{ni}^2 \omega_i^2 t_f}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \omega_n^2 \eta_n^2(t_f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \beta_{ni} \beta_{nj} \omega_i \omega_j \sin^2 \omega_n t_f$$

$$\textcircled{4} \dot{\eta}_n^2(t_f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \beta_{ni} \beta_{nj} \omega_i \omega_j (1 - \cos \omega_n t_f)^2$$

5. 시뮬레이션 및 검토

본 장에서는 [Fig.1]의 유연우주비행체가 정지상태에서 60° 회전하여 정지하는 준 최소시간 기동을 대상으로 시뮬레이션 하였

다. 시뮬레이션에 사용된 매개변수는 2장의 결과를 토대로 다음과 같이 설정하였다. 즉, 기동시간은 3.22초, 7개의 근사화항, 그리고 형상매개변수 δ 는 0.12로 선정하였다.

반동휠만 사용한 경우와 압전재료까지 사용한 경우에 대하여 입력변수들을 최적화한 결과는 [표1]에 정리하였다.

표 1. 최적화된 입력 근사항
Table 1. Optimized Input Shaping Parameters

Reaction wheel		Reaction wheel & Piezo Actuator	
a	a	b	
Reaction wheel	Reaction wheel	Piezo Actuator	
1.0098	1.0224	0.6318	
0.1504	0.1124	0.0757	
0.1968	0.2169	0.1634	
-0.0364	-0.0488	-0.0289	
-0.0046	0.0176	0.0405	
-0.0905	-0.1060	-0.0929	
-0.0640	-0.0570	-0.0342	

시뮬레이션 결과로서 [Fig.4]는 중앙동체의 회전각을 표시하고, [Fig.5]는 부착물의 끝단 진동을 보이며, [Fig.6]은 중앙동체에 가해지는 torque를 나타낸다. [Fig.4]는 반동휠만 있는 경우와 압전구동기도 있는 경우 모두 목표각 60° 를 만족시킴을 알 수 있다. [Figs.5-6]으로부터 최적화를 하지 않은 경우보다 반동휠을 사용하여 최적화한 경우가, 그리고 이보다는 압전구동기를 함께 사용한 경우가 끝단의 진동이 큰 폭으로 감소하고 최종시간 이후의 잔여진동이 없음을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 유연우주비행체의 대각선회 및 진동억제를 위한 중앙동체의 torque와 압전구동기의 입력을 푸리에 전개를 기본으로 최적화하였다. 유한요소법을 사용하여 시스템의 수학적 모델을 구하였고 성능지수와 구속조건을 모달좌표계에서 해석적으로 구하였다. 수치 시뮬레이션결과 Bang-Bang입력을 사용하는 것보다 푸리에 전개를 이용하여 최적화된 입력을 사용하는 것이 입력의 최대치를 약간 증가시키지만, 개회로 만으로도 진동억제에 매우 효율적임을 알 수 있었다. 반동휠과 압전구동기를 결합한 동시최적화 결과는 반동휠 만을 사용하는 것보다 구조물의 진동억제에 더욱 효과적임을 알 수 있었다.

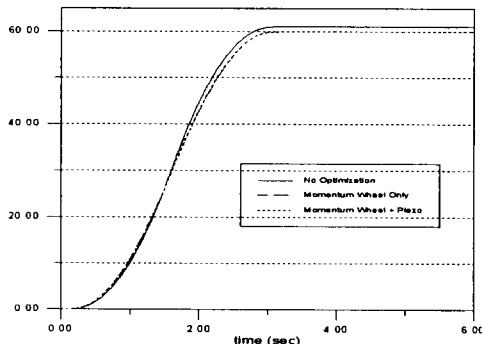


그림 4. 선회 각도

Fig. 4. Slewing Angle (deg)

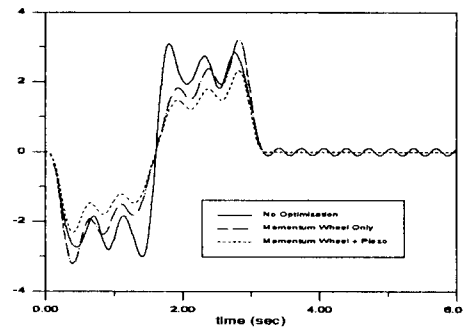


그림 5. 끝단의 진동

Fig. 5. Tip Deflection (mm)

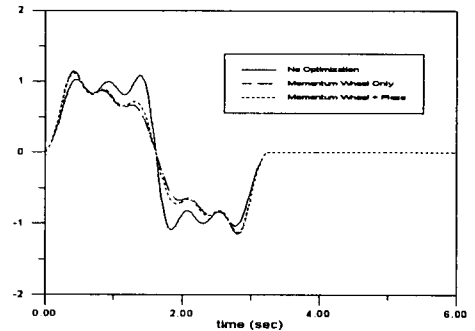


그림 6. 중앙동체 Torque

Fig. 6. Hub Control Torque

참고 문헌

- [1] H. Fujii, T. Ohtsuka, and S. Udou, "Mission Function Control for a Slew Maneuver Experiment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 5, Sep.-Oct. 1991, pp.986-992.
- [2] J.L. Junkins, Z.H. Rahman, and H. Bang, "Near-Minimum Time Control of Distributed Parameters Systems: Analytical and Experimental Results," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 2, March-April 1991, pp.406-415.
- [3] Y. Kim, J.Y. Suk, and J.L. Junkins, "Optimal Slewing and Vibration Control of Smart Structures," *SPIE 1995 North American Conference on Smart Structures and Materials*, San Diego, CA, Feb. 1995.
- [4] H. Baruh, and S.S.K. Tadikonda, "Gibbs Phenomenon in Structural Control," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 1, Jan.-Feb. 1991, pp.51-58.
- [5] D.M. Aspinwall, "Acceleration Profiles for Minimizing Residual Response," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, No. 1, 1990, pp.3-6.
- [6] P.H. Meckl, and W.P. Seering, "Experimental Evaluation of Shaped Inputs to Reduce Vibration for a Cartesian Robot," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, No. 4, 1990, pp.159-165.
- [7] M.I. Nagurka, and V. Yen, "Fourier-Based Optimal Control of Nonlinear Dynamic Systems," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, No. 1, 1990, pp.17-26.