Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

불량조사기계가 있는 순환생산시스템의 성능해석 및 최적제어

한 만 수, 임 종 태

Dep. of Electrical Eng., Korea Advanced Institute of Science and Technology
373-1 Kusong-Dong, Yusong-Gu, Taejon 305-701, Korea
Tel: +82-42-869-8041; Fax: +82-42-869-3410; E-mail: mshan@thkim.kaist.ac.kr

Abstract The cyclic production lines have the first machines starved and the last machine blocked due to the lack or the excess of empty pallets in the feedback buffer. A workpiece in the cyclic production lines is transported on a pallet, and the total sum of pallets in the system does not changed during the system operation time. Therefore, the production rate of the cyclic production lines are dependent on the total number of pallets in the system. In this paper, we suggest the performance analysis method for the cyclic production lines with inspection machines and the optimal total number of pallets in the system that maximizes the production rate of the system. Finally, we validate the suggested methods by simulations.

Keywords Cyclic production lines, Performance analysis, Quality Inspection, Pallet Size Optimization

1. 서론

Cyclic production line은 궤환 buffer를 통해 최초의 machine과 최종기계를 연결하는 통로를 갖고 있는 생산시스템이며 Cyclic production line이 갖고 있는 총 물품운반 pallet의 갯수는 일정하다. 실제적으로는 시스템 내에 물품을 운반하는 pallet가 있어서 한 개의 물품이 시스템 외부로 유출되면 그 물품을 운반한 pallet은 궤환버퍼로 입력되어 외부에서 새로운 물품이 입력될 때까지 궤환버퍼에서 대기한다.

시스템 내부로 유입되는 물품과 시스템 외부로 유출되는 물품이 동일하다면 이러한 시스템을 물품의 유입과 유출이 없는 폐쇄시스템으로 모델링 할 수가 있다. 일명 closed Markovian queueing system으로도 알려져 있는 cyclic production line은 생산시스템, 컴퓨터 망등의 분야에서 중요한 종류의 시스템이다. 따라서 많은 연구가 순환생산시스템에 대해서 행하여 졌지만 [3][4][2][1] 불량조사기계가 존재하는 시스템에 대해서는 아직 별다른 연구가 없는 듯 하다.

직렬생산시스템의 경우 시스템의 처음 기계가 궁핍하지 않고 마지막 기계가 봉쇄되지 않지만 순환생산시스템의 경우 대기버퍼내의 pallet의 수에 따라 처음 기계와 마지막 기계가 각각 궁핍하거나 봉쇄될 수 있다. 따라서 시스템 출력률을 최대화하는 최적 pallet 갯수에 관한 연구가 많이 진행되어 왔었다.[4][1]

본 연구에서는 Taylor series expansion을 이용하여 불량조사기계가 있는 순환생산시스템의 성능해석에 관한 간단하면서도 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$의 오차를 갖는 성능해석식을 제시하고 이를 바탕으로 시스템의 출력을 최대화하는 최적 시스템 내부 pallet수에 관한 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 오차를 갖는 해석식을 제시한다.

2. 성능해석 및 최적화

불량조사기계가 있는 순환생산시스템을 정확히 정의하기 위해서 이 연구에서는 [4]의 모델을 확장하여 다음을 가정한다.

Assumption 1 *(i)* 생산시스템은 M개의 기계와 M개의 버퍼로 구성되어 있으며 버퍼 B_i는 기계 m_i와 m_{i+1}을 연결하고 있다.

(ii) 각 기계들의 주기시간은 같고 시간축은 주기시간에 해당하는 시구간으로 분할되어 있다. 또한 버퍼 B_i의 용량은 $1 \leqslant n_i < \infty,\ i, \ldots, M$ 이다.

(iii) i번째 기계 m_i는 그 앞단의 버퍼 B_i가 고갈되었다면 궁핍하다. m_i는 그 뒷단의 버퍼 B_i가 충만되어 있고 m_{i+1} 이 비정상상태거나 봉쇄되었다면 봉쇄된다.

(iv) 궁핍하지 않고 봉쇄되지 않는 기계 m_i는 매 시구간에 $(1-p_i)$의 확률로 물품을 처리하고 p_i의 확

률로 물품을 처리하지 못한다. 이때, $0 \leqslant p_i \ll 1$, $i = 1, 2, \ldots, M$.

(v) 시스템내부에는 총 S개의 *pallet*이 있으며 $S \leqslant \sum_{i=1}^{M} n_i$이다. 또한 모든 물품은 *pallet*위에 얹혀서 시스템을 통과하면서 가공되어진다. 각 물품은 기계 m_1의 입력단에서 *pallet*위에 놓여지며 기계 m_M에서 출력시 *pallet*에서 분리되어 시스템 외부로 방출되고 그 *pallet*는 궤환버퍼 B_M으로 입력된다. 그리고 m_1과 m_{M+1}은 동일기계이다.

(vi) 궁핍하지 않고 봉쇄되지 않는 기계 m_i는 매 시구간에 $(1 - r_i)$의 확률로 정상물품을 r_i의 확률로 불량물품을 생산한다. 이때, $0 \leqslant r_i \ll 1$, $i = 1, 2, \ldots, M$이다.

(vii) 시스템내에는 C개의 품질조사기계가 존재하며 $C \leqslant M$이다. 품질조사기계는 완벽하게 모든 불량물품을 검출해내며 검출된 불량물품은 시스템 외부로 방출되고 그 불량물품을 운반한 *pallet*는 궤환버퍼 B_M으로 입력된다.

위의 가정을 만족시키는 시스템을 불량조사기계가 있는 순환생산시스템(cyclic production line)이라고 한다.

먼저 불량물품을 생산하지 않는 두개의 기계와 두개의 버퍼로 이루어진 순환생산시스템을 고려해 보자.

Proposition 1 가정 *1*하에서, $n_1 \geqslant n_2$라고 가정하면

$$PR(\mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{B}, S) \triangleq F(p_1, n_1, p_2, n_2; S) = (1 - n(0))(1 - p_2) \qquad (1)$$

여기서 $\mathbb{P} = [p_1, p_2]^T$, $\mathbb{B} = [n_1, n_2]$, $\mathbb{R} = [0, 0]^T$이고

$$n(0) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{1}{p_2}\sum_{i=1}^{S-1}[\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}]^i + \frac{p_1}{p_2}(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)})^S}, \\ \qquad 1 < S \leq n_2\text{일 때}, \\ \frac{p_1}{1+\sum_{i=1}^{n_2-1}[\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}]^i + p_1(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)})^{n_2}}, \\ \qquad n_2 < S \leq n_1\text{일 때}, \\ \frac{p_1}{1+\sum_{i=1}^{n_1+n_2-S}[\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}]^i}, \\ \qquad n_1 < S \leq n_1 + n_2 - 1\text{일 때}. \end{cases}$$

Proof : *Available from authors upon request.*

이제 불량조사기계를 갖고 있는 불량품을 만들어내는 두개의 기계와 두개의 버퍼로 이루어진 시스템을 생각해보자.

Proposition 2 가정 *1*하에서,

$$PR(\mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{B}, S) = F(p_e(1, 1), n_1, p_2, n_2, S)(1 - r_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad (2)$$

여기서 $\mathbb{P} = [p_1, p_2]^T$, $\mathbb{B} = [n_1, n_2]$, $\mathbb{R} = [r_1, r_2]^T$이고 $p_e(i, j) = 1 - (1 - p_i)\prod_{w=i}^{j}(1 - r_w)$이다.

Proof : *Available from authors upon request.*

세개의 기계와 세개의 버퍼로 이루어진 시스템에서 m_1과 m_3는 불량품을 생산하지 않고 m_2만이 불량품을 생산할 수 있고 품질조사기계를 갖고 있다면 다음이 성립한다.

Proposition 3 가정 *1*하에서,

(i) m_1이 완벽한 기계일 경우

$$PR(\mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{B}, S) = PR(p_e(2, 2), n_2, p_3, n_1 + n_3 - 1, S - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

여기서 $\mathbb{P} = [0, p_2, p_3]^T$, $\mathbb{B} = [n_1, n_2, n_3]$, $\mathbb{R} = [r_1 = 0, r_2, r_3 = 0]^T$이다.

(ii) m_2가 완벽한 기계일 경우

$$PR(\mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{B}, S) = PR(p_e(1, 2), n_1 + n_2 - 1, p_3, n_3, S - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

여기서 $\mathbb{P} = [p_1, 0, p_3]^T$, $\mathbb{B} = [n_1, n_2, n_3]$, $\mathbb{R} = [r_1 = 0, r_2, r_3 = 0]^T$이다.

(iii) m_3가 완벽한 기계일 경우

$$PR(\mathbb{P}, \mathbb{R}, \mathbb{B}, S) = PR(p_1, n_1, p_2, n_2 + n_3, S - 1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

여기서 $\mathbb{P} = [p_1, p_2, 0]^T$, $\mathbb{B} = [n_1, n_2, n_3]$, $\mathbb{R} = [r_1 = 0, r_2, r_3 = 0]^T$이다.

Proof : *Available from authors upon request.*

한편 간략성을 위해서 모든 기계가 품질조사기기를 가지고 있다고 가정한다. 주어진 시스템이 이와 다르다면 직렬생산시스템의 경우와 마찬가지로 쉽게 모든 기계가 품질조사기기를 갖고 있는 시스템으로 변환할 수 있다.[5] Proposition 2과 3를 이용하여 일반적인 불량조사기계가 있는 순환생산시스템의 출력률은 다음과 같이 구할 수 있다.

Proposition 4 가정 *1*하에서, 순환생산시스템에는 조건, $(1-p_j)\prod_{w=j}^{M}(1-r_j) \leqslant \{(1-p_i)\prod_{w=i}^{M}(1-r_i), i = 1, \ldots, M\}$을 만족시키는 기계 m_j가 언제나 존재한다. 따라서 시스템의 출력률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} PR = \sum_{i=1}^{j-1} & F((p_e(i, i), p_j), (n_e(i, j - 1), \\ & n_e(1, i - 1) + n_e(j, M) - 1), S - M + 2) \prod_{w=j}^{M}(1 - r_i) \\ & + \sum_{i=j+1}^{M} F((p_e(j, i - 1), p_i), (n_e(j, i - 1), \\ & n_e(1, j - 1) + n_e(i, M) - 1), S - M + 2) \prod_{w=i}^{M}(1 - r_i) \\ & - (M - 2)(1 - p_e(j, M)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \qquad (3)$$

표 1: Simulation result 1

$p_1 = 0.10$, $p_2 = 0.10$, $p_3 = 0.10$

$r_1 = 0.10$, $r_2 = 0.10$, $r_3 = 0.10$

$n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$

S	calculation	simulation	error
3	0.57317	0.59270	0.03294
4	0.63033	0.63140	0.00170
5	0.64499	0.64967	0.00720
6	0.64499	0.65403	0.01383
7	0.64499	0.65368	0.01330
8	0.64321	0.64255	-0.00102
9	0.61991	0.61673	-0.00516

$j = 1$

$\mu_1 = \min\{n_1, n_2 + n_3 - 1\} = 3$, $\mu_2 = \min\{n_1 + n_2 - 1, n_3\} = 3$

$\Lambda_1 = \max\{n_1, n_2 + n_3 - 1\} = 6$, $\Lambda_2 = \max\{n_1 + n_2 - 1, n_3\} = 6$

$\max\{\mu_1, \mu_2\} + 2 \leqslant S^* \leqslant \min\{\Lambda_1, \Lambda_2\} + 1$

$\therefore \; 5 \leqslant S^* \leqslant 7$

여기서 $n_e(i,j) = \sum_{w=i}^{j} n_w - (j-i)$이다.

Proof : *Available from authors upon request.*

Proposition 4을 바탕으로 시스템 출력률을 최대화하는 최적 내부 pallet의 수를 구해보자.

Proposition 5 가정 *1*하에서, 시스템 출력률을 최대화하는 최적 *pallet*의 갯수 S^*는 다음과 같다.

$$\begin{cases} S^* = \mu_{max} + M - 1, & \mu_{max} = \Lambda_{min} \text{일때} \\ \mu_{max} + M - 1 \leqslant S^* \leqslant \Lambda_{min} + M - 2, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

여기서,

$$\mu_{max} = \max\{\mu_i, i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, M\},$$
$$\Lambda_{min} = \min\{\Lambda_i, i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, M\},$$

$$\mu_i = \begin{cases} \min\{n_e(i, j-1), n_e(1, i-1) + n_e(j, M) - 1\}, \\ \qquad i \leqslant j-1, \quad j > 1, \\ \min\{n_e(j, i-1), n_e(1, j-1) + n_e(i, M) - 1\}, \\ \qquad i \geqslant j+1, \quad j < M, \end{cases}$$

$$\Lambda_i = \begin{cases} \max\{n_e(i, j-1), n_e(1, i-1) + n_e(j, M) - 1\}, \\ \qquad i \leqslant j-1, \quad j > 1, \\ \max\{n_e(j, i-1), n_e(1, j-1) + n_e(i, M) - 1\}, \\ \qquad i \geqslant j+1, \quad j < M. \end{cases}$$

그리고, $j = \{k \in [1, M] \mid p_e(k, M) \geqslant p_e(i, M), \; \forall i \in [1, M]\}$이다.

Proof : *Available from authors upon request.*

3. Simulation

표 1과 2는 3개의 기계와 3개의 버퍼로 구성된 순환생산시스템의 모의실험 결과이다. 오차는 다음과 같이 계산되어졌다.

$$\text{error} = \frac{PR_{\text{simulation}} - PR_{\text{calculation}}}{PR_{\text{simulation}}} \tag{4}$$

계산결과는 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ 오차범위내의 오차로 모의실험결과와 일치한다.

4. 결론

불량조사기계가 있는 순환생산시스템의 성능해석에 관한 비교적 간단하면서도 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$의 오차한도를 갖는 해석식을 제시하였다. Taylor series를 이용하여 불량조사기계를 갖는 순환생산시스템을 두개의 기계와 두개의 버퍼로 대변되는 간단한 시스템들로 분해하여 해석하였다. 또한, 제시된 해석식을 바탕으로 시스템의 출력률을 최대화하는 최적 내부 pallet의 수에 관하여 $\mathcal{O}(\epsilon^2)$의 오차를 갖는 해석식을 제시하였다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제시된 방법을 검증하였다.

표 2: Simulation result 2

$p_1 = 0.20$, $p_2 = 0.20$, $p_3 = 0.20$
$r_1 = 0.20$, $r_2 = 0.20$, $r_3 = 0.20$
$n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$

S	calculation	simulation	error
3	0.34116	0.36482	0.06484
4	0.38810	0.39610	0.02020
5	0.39917	0.41333	0.03426
6	0.39917	0.41733	0.04352
7	0.39551	0.40178	0.01561
8	0.36737	0.37023	0.00773

$j = 1$
$\mu_1 = \min\{n_1, n_2 + n_3 - 1\} = 3$, $\mu_2 = \min\{n_1 + n_2 - 1, n_3\} = 3$
$\Lambda_1 = \max\{n_1, n_2 + n_3 - 1\} = 5$, $\Lambda_2 = \max\{n_1 + n_2 - 1, n_3\} = 5$
$\max\{\mu_1, \mu_2\} + 2 \leqslant S^* \leqslant \min\{\Lambda_1, \Lambda_2\} + 1$
$\therefore\ 5 \leqslant S^* \leqslant 6$

참고 서적

[1] R. O. Onvural and H. G. Perros, "Approximate throughput analysis of cyclic queueing networks with finite buffers," *IEEE Trans. Software Eng.*, Vol. 15, No. 6, pp. 800-808, June 1989.

[2] S. Balsamo, M. C. Clo, and L. Donatiello, "Cycle time distribution of cyclic networks with blocking," *Performance Evaluation* 17 (1993) pp. 159-168.

[3] Y. Frein and Y. Dallery, "Analysis of cyclic networks with finite buffers and blocking before service," *Performance Evaluation* 10 (1989) pp. 197-210.

[4] S. M. Meerkov and E. Park, "Improvability properties of closed transfer lines," *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 605-606, 1994.

[5] M. -S. Han and J. -T. Lim, "Performance analysis of serial production lines with quality control machines," *Proc. 10th Korea Automatic Control Conference*, pp. 259-262, 1995.