

능동 현가 시스템을 위한 H_2/H_∞ 제어기 설계

H_2/H_∞ Control of Active Suspension System

정 우 영*, 김 상 우*, 원 상 철*

*포항공과대학교 전자전기공학과 (Tel: 279-5679; Fax: 279-5669; E-mail: kokomo@jane.postech.ac.kr)

Abstracts The objective of a mixed H_2/H_∞ controller of active suspension system is to achieve not only the general performance improvement (H_2) but also the worst case disturbance rejection (H_∞). In this paper, a mixed H_2/H_∞ controller for an active suspension system, comparing the performance with that of an H_2 controller and of an H_∞ controller.

Keywords H_2 controller, H_∞ controller, H_2/H_∞ controller, weighting function, LMI

1. 서론

도로의 불규칙성에 의한 외란은 타이어를 거쳐 승객의 좌석에 충격이나 진동을 일으키는 데, 자동차의 수동 현가 시스템은 이러한 진동의 크기를 줄여 승차감을 향상시키기 위한 것이다. (본 논문에서의 성능 향상은 좌석의 수직 진동을 줄이는 것에 한정한다). 이 수동 현가 시스템은 보통 스프링과 댐퍼 등으로 구성되는데, 이러한 수동 현가 시스템은 그 자체의 공진 주파수를 가지고 있어서, 저주파의(대략 1Hz에 해당하는) 외란에 대해 성능향상을 기대하기 어렵다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 댐퍼에서 발생하는 힘을 현재의 동적 상태에 따라 능동적으로 조절하는 능동 현가 시스템이 쓰인다.

1970년 이후 능동 현가 시스템의 제어기 설계를 위한 많은 이론들이 적용되었는데, Sky Hook 제어, 적응제어, 최적제어, 그리고 강인제어가 이에 해당한다.[1..4]

LQR/LQG의 최적 제어 기법은 비교적 오래 전부터 알려진 방법으로서 제어 형태의 평가 함수를 최소화 하는 H_2 제어 이론인데, 좋은 성능과 안정도를 보장하는 장점이 있으나 시스템의 불확실성이나 외란에 대한 안정도 여유 등을 고려하지 않는다는 단점을 가지고 있다. 이에 대해 최근에 적용된 이론이 강인성을 보장해 주는 H_∞ 제어 기법이다.

H_∞ 제어기를 설계하는 방법은 1989년의 상태 공간 모델에서의 일반 해를 구하는 방법이 나온 이후로 비약적으로 발전하였다.[5] H_∞ 제어기는 기존의 최적 제어 기법(LQR/LQG)에 비해, 보장된 성능하에 외란과 잡음, 그리고 시스템의 불확실성에 대해 강인성을 가진다. 그러나 H_∞ 제어기는 최악의 외란에 대한 성능의 향상을 도모하였기 때문에 전반적인 성능에서는 최적 제어 기법보다 떨어진다고 할 수 있다. 이러한 상황에서 H_2 제어기와 H_∞ 제어기를 서로 보완할 수 있는 H_2/H_∞ 제어기를 구하려는 여러 가지의 이론적 시도가 있었다. 상태 공간 모델에서 H_2/H_∞ 제어기를 구하는 방법은 쉽지가 않아서, 네 개의 서로 연관된 Riccati 방정식으로 주어졌는데[6], 이에 대한 해는 구하기가 복잡할 뿐만 아니라, 해가 존재하지 않는 경우가 많다. 이에 대해 1991년 H_2/H_∞ 제어기를 구하는 문제가 Convex 최적화 문제로 등가화 되면서[7], LMI(선형 행렬 부등식)에 의한 H_∞ 제어기를 구하는 방법이 나온다.[8] 이러한 접근 방식의 확대로 LMI에 의해 해가 주어지는 H_2/H_∞ 제어기 설계 방법이 제시되었다.[9]

본 논문에서는 2절에서 능동 현가 시스템의 모델과 특성을 설명하였으며, 3, 4절에서 각각 H_2 제어기와 H_∞ 제어기를 상태 공간 모델에서의 일반해를 구하는 방법으로 설계하여 성능을 비교하였으며, 5절에서 Matlab의 LMI Tool로써 H_2/H_∞ 제어기를 설계하여 H_2 제어기와 H_∞ 제어기의 장단점을 보완하였다. 그리고 6절에서 앞으로의 발전 방향에 대해 제시하였다.

2. 능동 현가 시스템 모델

본 논문에서 사용될 능동 현가 시스템의 구조는 그림 1과 같다. 여기서 제어 값을 출력하는 구동기는 이상적이어서 원하는 출력을 시간 지연 없이 발생할 수 있다고 가정하였다.

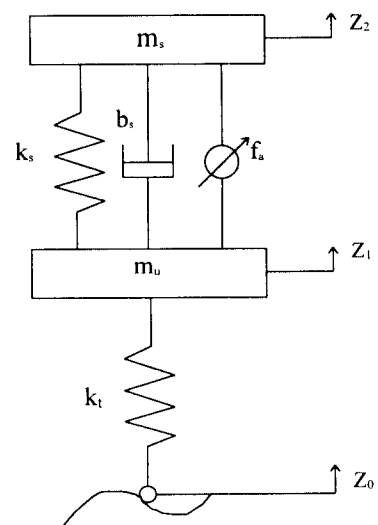


그림 1. 능동 현가 시스템

Fig 1. Active suspension System

표 1. 능동 현가 시스템의 상수와 변수

Table 1. The coefficients and variables of active suspension system

| | |
|-------|--|
| k_s | stiffness of suspension spring, 2.35×10^4 N/m |
| b_s | damping coefficient of damper, 1500 N/m ² |
| k_t | stiffness of tire, 1.8×10^5 N/m |
| m_s | sprung mass, 50 kg |
| m_u | unsprung mass, 280 kg |
| z_0 | displacement of road |
| z_1 | displacement of unsprung mass |
| z_2 | displacement of sprung mass |
| f_a | actuator force |

그림에서 다음과 같이 운동 방정식과 two port 상태 공간 모델을 구할 수 있다.

(운동 방정식)

$$m_u \ddot{z}_1 = k_t (z_0 - z_1) - k_s (z_1 - z_2) - b_s (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \dot{f}_a \quad (1)$$

$$m_s \ddot{z}_2 = k_s (z_1 - z_2) + b_s (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \dot{f}_a$$

여기서 two port 상태 공간 모델을 위한 상태벡터 x_p , 외란 입력 w , 제어입력 u , 제어출력 z_1 , 측정출력 y 를 다음과 같이 정의한다.

$$x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{12} \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}, \quad u = f_a$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} z_p \\ u \end{bmatrix}, \quad y = x_4 \cdot (z_{01} = z_0 - z_1, z_{12} = z_1 - z_2)$$

시스템의 외란은 도로로부터의 외란과($d = z_0$) 측정 잡음(n)으로 잡았고, 제어하고자 하는 출력은 스프링 위 질량의 가속도와($z_p = z_2$) 제어 입력으로(u) 잡았으며, 제환 제어를 위해 측정하는 출력은 스프링 위의 질량으로(z_2) 하였다. 이러한 모델은 $H_2, H_\infty, H_2/H_\infty$ 제어기를 구하기 위한 조건과 관계가 있다.

(상태 공간 모델, G)

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ k_t/m_1 & -k_s/m_1 & -b_s/m_1 & b_s/m_1 \\ 0 & k_s/m_2 & b_s/m_2 & -b_s/m_2 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/m_1 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} u$$

$$= A_p x_p + B_{p1} w + B_{p2} u \quad (2)$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0 & k_s/m_2 & b_s/m_2 & -b_s/m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 1/m_2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$= C_{p1} x_p + D_{p12} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w$$

$$= C_{p2} x_p + D_{p21} w$$

여기서 저주파의 외란과 고주파의 잡음에 대한 강인성을 가지

는 효율적인 제어기의 설계를 위해서 주로 저주파 필터 형태를 가지는 가중함수의(weighting function) 필요성이 있으므로 이를 고려한 상태 공간 모델이 필요하다. z_p 가 식의 가중함수를 통과한 값을 z_w 라 하고 입력인 u 에도 상수의 가중치(w_a)를 두어 제어기 설계를 위한 상태 공간 모델을 (4)와 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{x}_w = A_w x_w + B_w z_p \quad (3)$$

$$z_w = C_w x_w + D_w z_p$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & D_w \end{bmatrix} \text{ (packed matrix form)}$$

(가중함수를 포함한 상태 공간 모델, G_w)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ B_w C_p & A_w \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{p2} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$= Ax + B_1 w + B_2 u \quad (4)$$

$$z = \begin{bmatrix} D_w C_{p11} & C_w \\ w_a C_{p12} & 0 \end{bmatrix} x + 0w + \begin{bmatrix} D_w D_{p121} \\ w_a D_{p122} \end{bmatrix} u$$

$$= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_{p2} & 0 \end{bmatrix} x + D_{p21} w + 0u$$

$$= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

$$(x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_w \end{bmatrix}, C_{p1} = \begin{bmatrix} C_{p11} \\ C_{p12} \end{bmatrix}, D_{p12} = \begin{bmatrix} D_{p121} \\ D_{p122} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_w \\ u_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 z_p \\ w_a u \end{bmatrix})$$

그림 2에 가중함수를 포함한 상태 공간 모델에 대한 two port 블록 다이어그램을 설명하였다.

제어기 설계에 앞서 이상과 같은 상태 공간 모델은 $H_2, H_\infty, H_2/H_\infty$ 제어기를 구하기 위한 다음과 같은 조건을 만족함을 확인할 수 있다.

($H_2, H_\infty, H_2/H_\infty$ 제어기 설계를 위한 조건)

- 1) (A, B_2) 는 안정화 가능, (C_2, A) 는 측정 가능.
- 2) D_{12} 는 full column rank, D_{21} 은 full row rank 를 가짐.
- 3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ 는 모든 ω 에 대해 full column rank 를 가짐.
- 4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ 는 모든 ω 에 대해 full row rank 를 가짐.
- 5) $D_{11} = 0, D_{22} = 0$ (해의 간단성을 위한 조건)

본 논문에서는 $H_2, H_\infty, H_2/H_\infty$ 제어기의 성능을 높이고 각각의 특성을 비교하기 위하여 여러번의 모의실험을 통하여 적절한 가중함수를 세 제어기에 대해 공히 다음과 같이 잡았다.

$$w_1 = \frac{1}{s+5}, \quad w_a = 1 \times 10^{-5}$$

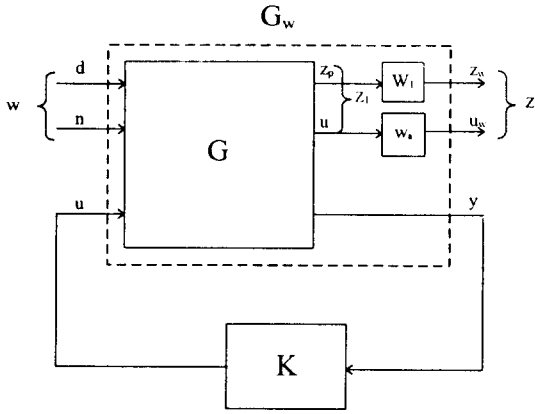


그림 2. 가중함수를 포함한 상태 공간 모델

Fig 2. Weighting function augmented two port state space model

3. H₂ 제어기

H₂ 제어기는 식 (5)의 외란으로부터 출력까지의 H₂-norm 을 ($\|T_{zw}\|_2$) 최소화하기 위한 제어기로서 상태 공간 모델에서의 해는 식 (6)과 같이 주어진다.[5]

$$\min_{K(s)} \|T_{zw}\|_2 = \min_{K(s)} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{trace}(T_{zw}^*(j\omega) T_{zw}(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$K_{opt}(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 F_2 + L_2 C_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$F_2 = -(B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1), \quad L_2 = -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*)$$

$$X_2 = \text{Ric}(H_2) \geq 0, \quad Y_2 = \text{Ric}(J_2) \geq 0$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* C_1 & B_2^* \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2^* \\ -B_1 D_{21}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{21} B_1^* & C_2 \end{bmatrix}$$

그림 2의 상태 공간 모델에 식 (6)을 이용하여 H₂ 제어기를 구한 결과는 식 (7)과 같다.

$$K(s) = 10^4 \frac{-0.001s^4 - 0.002s^3 - 0.197s^2 - 1.264s + 2.25}{0.004s^4 + 0.0065s^3 + 1.323s^2 + 3.841s + 2.127} \quad (7)$$

위의 제어기를 사용했을 때의 주파수 응답은 그림 3과 같다. 수동 현가 시스템보다 저주파에서 전반적인 성능 향상을 보였지만 1Hz 부근의 외란의 억제에는 그다지 효과적이지 못함을 알 수 있다.

4. H_∞ 제어기

H_∞ 제어기는 식 (8)과 같이 정의되는 외란에서부터 출력까지의 H_∞-norm 을 최소화하는 제어기이다.

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T_{zw}(j\omega)) \quad (\sigma \text{ 는 행렬의 singular value}) \quad (8)$$

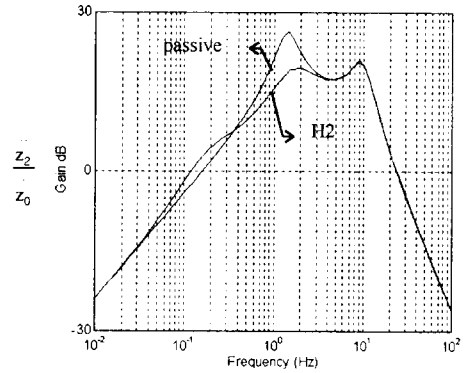


그림 3. 주파수 응답 (H₂ 제어기)

Fig 3. Frequency response (H₂ controller)

H_∞ 제어기의 상태 공간 모델에서의 해는 다음과 같은 과정에 의해 구해진다.[5]

(H_∞ 제어기의 해)

$$\min_{K(s)} \|T_{zw}\|_\infty = \gamma_{opt} \text{ 일 때 } K_{opt}(s) = K_{sub}(s) \Big|_{\gamma=\gamma_{opt}} \text{ 라고 하면 식 (9)}$$

에 의해, 적절히 큰 값의 γ 를 X_∞ 와 Y_∞ 가 존재하고 식 (10)를 만족하는 데까지 줄여 나가면 ($\gamma \rightarrow \gamma_{opt}$) H_∞ 제어기를 구할 수 있다.

$$K_{sub}(s) = \begin{bmatrix} A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_x + B_2 F_x + Z_x L_x C_2 & -Z_x L_x \\ F_x & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$F_x = -B_2^* X_x, \quad L_x = -Y_x C_2^*, \quad Z_x = (I - \gamma^{-2} Y_x X_x)^{-1}$$

$$X_x = \text{Ric}(H_x) \geq 0, \quad Y_x = \text{Ric}(J_x) \geq 0$$

$$H_x = \begin{bmatrix} A & -\gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix}$$

$$J_x = \begin{bmatrix} A^* & -\gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}$$

$$\rho(X_x Y_x) < \gamma^2 \quad (10)$$

이와 같은 방법으로 구해보면 $\gamma_{opt} = 0.81$ 이며 이때의 H_∞ 제어기는 식 (11)과 같다.

$$K(s) = 10^4 \frac{-0.0002s^4 - 0.006s^3 - 0.67s^2 - 3.19s + 7.88}{0.0004s^4 + 0.0076s^3 + 1.4s^2 + 7.32s + 2.53} \quad (11)$$

그림 4에 H_∞ 제어기를 사용했을 때의 주파수 응답을 보여 주는 데, H₂ 제어기와 비교하면 1Hz 부근의 외란에 대해 성능이 많이 향상됨을 알 수 있다. 그러나 그 이하의 주파수에서는 수동 현가 시스템보다 더 나빠졌다. 이는 가중함수를 조정하여 더 많은 외란 억제를 하면 할수록 이에 비례하여 나빠지는 결과를 보였다. 예를 들어 스프링 위 질량의 속도에 가중함수를 넣지 않았을 때에는 저주파에서 이득이 줄어들고 끝까지 늘어지는 응답을 보였다.

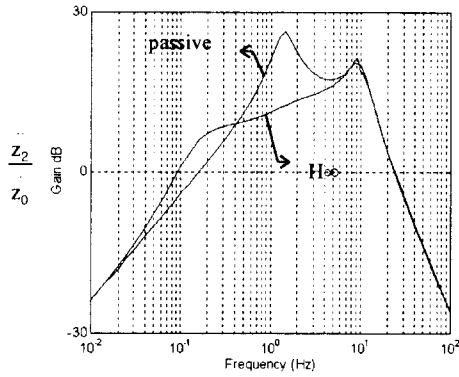


그림 4. 주파수 응답(H ∞ 제어기)

Fig 4. Frequency response(H ∞ controller)

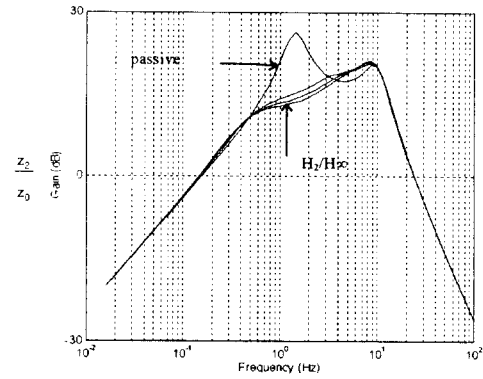


그림 5. 주파수 응답(H $_2$ /H ∞ 제어기)

Fig 5. Frequency response(H $_2$ /H ∞ controller)

5. H $_2$ /H ∞ 제어기

H $_2$ /H ∞ 제어기는 외란으로부터 출력까지의 H $_2$ -norm 과 H ∞ -norm 을 동시에 줄이는 것이 목적이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\inf_{K(s)} \left\{ \left\| T_{zw} \right\|_2 \mid K \text{ is admissible, } \left\| T_{zw} \right\|_\infty < \gamma_0 \left(\gamma_0 \geq \gamma_{opt} \right) \right\}$$

실제 제어기를 구하는 방법은 먼저 H ∞ 제어기를 설계하여 γ_{opt} 를 구한 후 이 값보다 조금 크게 γ_0 를 잡고 H ∞ -norm 이 이보다 작은 범위 안에서 H $_2$ -norm 을 최소화하는 제어기를 찾는 식이다. H $_2$ /H ∞ 제어기의 해는 명확한(explicit) 형태로 주어지지 않고 어떤 제약하에 몇 개의 복잡한 선형 행렬 부등식을 만족하는 형태이다. 본 논문에서는 구체적인 선형 행렬 부등식의 형태는 제시하지 않고, 다만 Matlab 의 LMI tool 을 이용해서 구한 제어기를 식 (12)에 나타내었다.

$$K(s) = 10^3 \frac{-0.0002s^4 - 0.008s^3 - 0.916s^2 - 5.496s + 0.53}{0.0001s^4 + 0.0056s^3 + 0.226s^2 + 1.61s + 2.13} \quad (12)$$

그림 5에 H $_2$ /H ∞ 제어기를 사용했을 때의 주파수 응답을 동시에 나타내었다(위에서부터 $\gamma_0=0.82, 0.83, 0.85$). 그림에서 알 수 있듯이 H $_2$ /H ∞ 제어기는 1Hz 부근에서 H ∞ 제어기만큼의 외란 억제 성능을 보이며, 그 이하의 주파수에서도 H ∞ 제어기가 성능이 많이 나빠짐에 비하여 양호한 결과를 보였다. H $_2$ /H ∞ 제어기가 H $_2$, H ∞ 제어기의 장단점을 적절히 보완한다고 할 수 있다. 이는 세가지 제어기에 대해 H $_2$ -norm, H ∞ -norm 의 값을 비교한 표 2에서 명확히 확인된다. H ∞ -norm 을 조금 줄이면 상대적으로 많은 H $_2$ 의 성능 향상을 보인다.

표 2. 세가지 제어기의 H $_2$, H ∞ norm

Table 2. H $_2$, H ∞ norm of the three controller

| | H $_2$ -norm | H ∞ -norm |
|------------------------|--------------|------------------|
| H $_2$ 제어기 | 4.65 | 0.999 |
| H ∞ 제어기 | 7.65 | 0.81 |
| H $_2$ /H ∞ 제어기 | 6.74 | 0.82 |
| | 6.34 | 0.83 |
| | 5.88 | 0.85 |

6. 결론

이상에서 H $_2$, H ∞ , H $_2$ /H ∞ 제어기를 각각 구하여 그 성능을 비교하여 보았고, H $_2$ /H ∞ 제어기가 H ∞ 제어기의 외란 억제 성능을 조금 감소시키며 H $_2$ -norm 을 최소화 함으로써 상대적으로 많은 성능향상을 보임을 알 수 있었다.

본 논문에서는 모의 실험만으로 결과를 알아 보았는데, 실제의 차량 모델에 대하여 H $_2$ /H ∞ 제어기의 전체적인 성능과 강인성에 대한 고찰이 필요할 것이다

본 논문은 정보통신연구소와 현대 자동차의 연구비 지원에 의한 결과의 일부입니다.

참고문헌

- [1] Thompson, A. G., "Design of Active Suspensions," *Inst. Mech. Eng. Proc.*, vol. 185, no. 36, 1970-1971.
- [2] Thompson, A. G., "An active suspension with optimal linear state feedback", *Vehicle System Dynamics* vol. 5, pp. 187-206 1976
- [3] Hac, A. "Adaptive control of vehicle suspension," *Vehicle System Dynamics*, vol. 16, pp.57-74, 1987.
- [4] Yamashita M., "H ∞ Control of an Automotive Active Suspen.," *Proc. of the 29th CDC*, vol. 4, pp.2244-2250, 1990.
- [5] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, "State Space Solution to Standard H 2 and H $^\infty$ Control Problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-34, 8, pp. 832-847, August 1989.
- [6] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover and B. Bodenhimer, "Mixed H 2 and H $^\infty$ Control," The American Control Conference 1990.
- [7] P. Khargonekar and M. Rotea, "Mixed H 2 and H $^\infty$ control : A convex optimization approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol 36, no. 7, pp. 899, 1989.
- [8] Iwasaki, T., and R. Skelton, "All Controllers for the General H $^\infty$ Control Problems: LMI Existence Conditions and State-Space Formulas." *Automatica*, 30 (1994), pp. 1307-1317.
- [9] Scherer, C., "Mixed H 2 and H $^\infty$ Control," *A European Perspective*, volume of the special contributions to the ECC, 1995.