Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

비구조적인 불확실성을 가지는 시스템에 대한 반복 제어기의 설계

Design of a Repetitive Controller for the System with Unstructured Uncertainty

°도 태 용, 문 정 호, 진 경 복, 정 명 진

한국과학기술원 전기 및 전자공학과
(Tel: 042-869-5429; E-mail: dol@donghae.kaist.ac.kr, mjchung@ee.kaist.ac.kr)

Abstract Repetitive control is a proposed control strategy in view of the internal model principle and achieves a high accuracy asymptotic tracking property by implementing a model that generates the periodic signals of period into the closed-loop system. Since the repetitive control system contains a periodic signal generator with positive feedback loop, which reduces the stability margin, in the overall closed-loop system, the stability of the closed-loop system should be considered as an important problem. In case that a real system has plant uncertainties which are not represented through modeling, the robust stability problem of the repetitive control system has not been considered sufficiently. In this paper, we propose the robust stability condition for the system with modeling uncertainty. The proposed robust stability condition will be obtained using the robust performance condition in the H_∞ control. Moreover, by use of the proposed robust stability condition, we propose a procedure that designs a repetitive controller and a feedback controller simultaneously which can stabilize the overall closed-loop system robustly and which can also do the closed-loop system without repetitive controller.

Keywords Repetitive Control, Robust Stability, H_∞ Control

1. 서 론

반복 제어(Repetitive Control)는 "Internal Model Principle[5]"의 관점에서 제안된 제어기 설계 방법으로서 주기(L)를 가지는 신호를 발생시키는 모델을 폐루프 시스템에 삽입함으로써 그 주기(L)를 갖는 외란 신호를 제거한다. 반복 제어 시스템은 이전 주기의 오차에 대한 정보를 이용하여 제어 입력을 만들어내기 때문에 반복 학습 제어(Iterative Learning Control)[1], [7]와 유사한 점이 매우 많다. 일반적으로 반복 학습 제어기의 학습된 제어 입력이 feedforward 형태이므로 반복 학습 제어 시스템에 대한 안정도 문제를 고려할 필요가 없고 단지 오차의 수렴 조건만을 고려하여 제어기를 설계하면 된다. 그러나, 반복 제어 시스템은 전체 폐루프 시스템내에 정궤환(positive feedback) 루프로 구성된 주기 신호 발생기를 가진다. 이 때, 신호 발생기는 주기적인 외란을 억제시키지만, 전체 시스템의 안정도 여유(stability margin)를 감소시킨다. 따라서, 반복 제어기 설계시에는 폐루프 시스템의 안정도를 충분히 고려하여야 한다. Hara 등은 주기적인 외부 신호에 대한 서보 시스템의 한 형태로서 반복 제어 시스템을 제안했다[6]. 그들은 반복 제어기내에 저역 통과 필터를 첨가하여 반복 제어기가 포함된 전체 폐루프 시스템을 안정화시킬 수 있는 설계 방법을 제안하였다. 그러나, 제안된 설계 방법은 일반적인 공칭 모델에 대한 것으로 모델링 불확실성이 존재하는 시스템에 대해서는 적용할 수 없다. Chew 등은 Hara 등이 제안한 방법을 개량한 디지탈 반복 제어기를 제안하였다[2]. 그는 폐루프내에 존재하는 기존의 제어기에 부가적으로 반복 제어기를 첨가함으로써 주기적인 외란이 급격하게 감소됨을 보였다. 그리고, 대상 시스템의 모델에 불확실성이 존재할 경우, 반복 제어기의 설계 방법을 제안하였다. 그러나, 제안된 방법은 모델링 불확실성을 체계적으로 정의하지 않았기 때문에 반복 제어기의 설계 절차가 매우 비효율적이다. Srinivasan과 Shaw는 regeneration spectrum을 이용한 반복 제어 시스템의 안정 조건을 제시하였고[9], 전체 제어 시스템의 성능을 감도 함수를 이용하여 설명하였다. 그리고, 이산 시간상에서 regeneration spectrum을 이용한 반복 제어 시스템의 안정 조건과 덧셈형 모델링 불확실성이 존재할 때의 반복 제어 시스템의 안정 조건을 제안하였다[8]. 그러나, 모델링 불확실성이 존재할 때의 반복 제어기의 설계 절차를 체계적으로 제안하지는 못했다. 살펴본 바와 같이 반복 제어기를 설계할 때에, 단지 알려진 공칭 모델만을 이용한다. 따라서, 반복 제어기를 현장에서 이용하기 위해서는 실제 모델링을 통해서 표현되지않는 불확실성을 고려하여야 한다. 이를 위해서는 반복 제어 시스템에 대한 강인 안정(robust stability) 문제를 충분히 고려하여야 한다. 본 논문에서는 먼저 반복 제어 시스템의 강인 안정 조건을 제안한다. 이 때 모델링 불확실성을 체계적으로 표현하기 위해서 Doyle 등[3]이 제안한 곱셈형의 비구조적인 불확실성으로 모델링 불확실성을 표현한다. 제안될 반복 제어 시스템의 강인 안정 조건은 H_∞ 제어에서 일반적으로 사용되는 강인 성능(robust performance) 조건을 이용하여 얻을 수 있다. 일반적으로 설계되는 반복 제어기는 기존 제어기에 부가적으로 첨가되는 형태이다. 그러나, 본 논문에서는 제안될 강인 안정 조건을 이용하여 전체 반복 제어 시스템을 강인 안정화시킬 수 있는 궤환 제어기와 반복 제어기를 동시에 설계할 수 있는 방법을

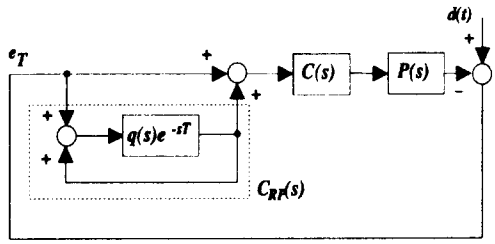

그림 1: 반복 제어 시스템
Fig. 1. Repetitive control system

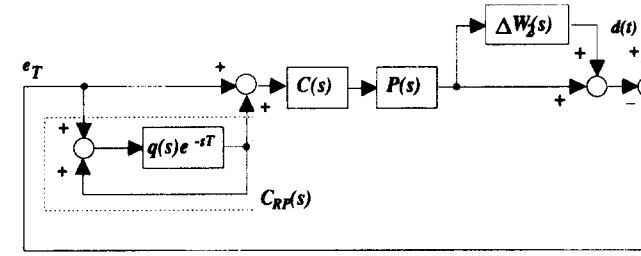

그림 2: 비구조적인 불확실성을 가지는 반복 제어 시스템
Fig. 2. Repetitive control system with unstructured uncertainty

제시한다. 이 때 설계된 궤환 제어기는 반복 제어기가 없더라도 전체 폐루프 시스템을 강인 안정화시킬 수 있다. 끝으로 컴퓨터 모의 실험을 통해 제안된 강인 안정 조건의 유용성과 제안된 반복 제어 시스템의 성능을 검증한다.

2. 반복 제어 시스템

일반적으로 반복 제어 시스템은 그림 1과 같이 표현된다. 이 논문에서는 단일 입력, 단일 출력 시스템을 고려한다. 여기서, $P(s)$는 제어 대상 시스템이고, $C(s)$는 반복 제어기가 포함되지않은 궤환 제어기, $C_{RP}(s)$는 반복 제어기이다. 그리고, $q(s)$는 저역 통과 필터로서 반복 제어 시스템의 안정도를 위해서는 필수적이며 간단한 1차의 저역 통과 필터로 구현된다. $d(t)$와 $e_T(t)$는 주기적인 외란과 주기적인 오차 신호를 각각 나타내고 있다. 모델링 불확실성이 없는 그림 1의 시스템에 [6]에서 얻어진 반복 제어 시스템의 안정 조건을 적용하면, 다음과 같은 보조 정리를 얻을 수 있다.

보조 정리 1 *그림 1으로 표현되는 반복 제어 시스템에서 다음 두 조건이 만족되면 전체 시스템은 점근적으로 안정된다.*

1. *반복 제어기가 없을 때의 전체 폐루프 시스템은 안정하다. 즉,*

$$G(s)(1+G(s))^{-1} \in RH_\infty.$$

2. $\|q(s)(1+G(s))^{-1}\|_\infty < 1$. *이 때 $G(s)$는 다음과 같다.*

$$G(s) = C(s)P(s).$$

보조 정리 1의 첫 번째 조건을 만족하기 위해서는 반복 제어기가 없는 경우의 폐루프 시스템을 안정화시킬 수 있는 궤환 제어기를 설계하면 된다. 그리고, 보조 정리 1의 두 번째 조건을 위해서는 $q(s)$는 낮은 차단 주파수(cut-off frequency)를 가져야 한다. 이 때, $q(s)$의 대역폭이 좁을수록 안정 조건을 만족하기는 쉬우나, 제어 대역폭이 감소하기 때문에 고주파 성분의 주기적인 외란을 제거할 수 없기 때문에 전체 시스템의 성능은 떨어지게 된다. 따라서, 보조 정리의 두 번째 조건을 만족하면서 동시에 $q(s)$의 대역폭을 최대화시키는 것이 반복 제어기 설계에서 중요한 문제이다. 보조 정리 1은 모델링 불확실성이 없는 경우에 대한 반복 제어 시스템의 안정 조건이다. 따라서, 모델링 불확실성이 존재할 경우에는 이를 고려한 새로운 안정 조건이 필요하다. 이를 위해서 먼저 그림 2에서와 같이 곱셈형의 비구조적인 모델링 불확실성이 포함된 시스템을 고려한다. 이 때, 제어 대상 시스템의 공칭 모델을 P_o로, 실제 시스템을 $P = (1+\Delta W_2)P_o$로 각각 표현한다. 여기서, W_2는 안정한 전달 함수로 고정되어있다. 그리고, Δ는 단지 $\|\Delta\|_\infty \le 1$의 조건을 만족하는 안정한 전달 함수이다. P_o와 P는 똑같은 불안정한 극점을 가진다고 가정한다[4]. 이와 같은 가정하에서 보조 정리 1을 수정하면, 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 1 *먼저 P_o와 C가 $j\omega$축에서 극점을 갖지않는다고 가정하자. 이 경우, $\|\Delta\|_\infty \le 1$인 모든 $\Delta \in RH_\infty$에 대해서*

$$\||qS_o| + |W_2T_o|\|_\infty < 1 \tag{1}$$

의 조건이 만족되면, 반복 제어 시스템은 강인 안정하다. 이 때, S_o는 공칭 모델의 감도 함수이고 T_o는 공칭 모델의 상보 감도 함수이다.

정리 1을 증명하기 위해서는 다음 두 개의 보조 정리가 필요하다.

보조 정리 2 *[10] $j\omega$ 축에 P_o와 C의 극점이 없다고 가정하자. 그러면 $\|\Delta\|_\infty \le 1$인 모든 $\Delta \in RH_\infty$에 대해서 폐루프 시스템이 강인 안정할 필요 충분 조건은*

$$\|W_2T_o\|_\infty < 1 \tag{2}$$

이다.

보조 정리 3 *[4] 보조 정리 2와 같은 가정하에서, $\|\Delta\|_\infty \le 1$인 모든 $\Delta \in RH_\infty$에 대해서 폐루프 시스템의 강인 성능이 보장되기 위해서는 아래의 두 조건,*

$$\begin{aligned} \|W_2T_o\|_\infty &< 1 \\ \left\| \frac{W_1S_o}{1+\Delta W_2T_o} \right\|_\infty &< 1, \end{aligned} \tag{3}$$

이 동시에 만족되어야 한다. 여기서 W_1은 폐루프 시스템의 성능을 보장하기 위한 가중 함수이다. 식 (3)으로 표현되는 강인 성능 조건을 만족하기 위한 필요 충분 조건은

$$\||W_1S_o| + |W_2T_o|\|_\infty < 1 \tag{4}$$

이다.

정리 1의 증명) 보조 정리 1의 첫 번째 조건을 먼저 증명하자. 보조 정리 2와 같은 가정을 할 경우, 폐루프 시스템이 강인 안정할 필요 충분 조건은 보조 정리 2의 식 (2)와 같다. 그리고, 보조 정리 1의 두 번째 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left\| \frac{qS_o}{1+\Delta W_2T_o} \right\|_\infty < 1$$

위의 식은 W_1을 q로 치환할 경우, 보조 정리 3의 식 (3)과 같다. 따라서, 곱셈형의 비구조적인 불확실성이 존재할 경우, 다음 두 조건이 동시에 만족되면 반복 제어 시스템은 강인 안정하다.

$$\|W_2T_o\|_\infty < 1.$$

$$\left\|\frac{qS_o}{1+\Delta W_2T_o}\right\|_\infty < 1.$$

보조 정리 3에 의해서 위의 두 조건을 동시에 만족할 필요 충분 조건은 식 (1)이다. 결론적으로, 정리 1의 가정하에서 $\|\Delta\|_\infty \leq 1$인 모든 $\Delta \in RH_\infty$에 대해 반복 제어 시스템이 강인 안정할 충분 조건은 식 (1)이다.

3. 반복 제어 시스템의 설계

정리 1은 곱셈형의 비구조적인 불확실성을 가진 반복 제어 시스템의 강인 안정을 위한 충분 조건이다. 이 장에서는 이를 이용하여 반복 제어 시스템을 위한 궤환 제어기 $C(s)$와 반복 제어기의 저역 통과 필터 $q(s)$를 구하는 방법에 대해서 논의한다. 여기서는 [4]에서 제시한 "수정된 강인 성능 문제"를 이용하여 반복 제어 시스템을 설계한다.

보조 정리 4 *식 (1)을 만족하는 충분 조건은 다음과 같다.*

$$\||qS_o|^2 + |W_2T_o|^2\|_\infty < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

보조 정리 4의 결과인 식 (5)를 만족하는 $C(s)$와 $q(s)$를 구하는 문제를 [4]에서와 유사하게 "반복 제어 시스템을 위한 수정된 강인 안정 문제"라고 하자. 이 때 반복 제어 시스템을 위한 수정된 강인 안정 문제의 해는 다음의 방법으로 구해질 수 있다.

- 우선 제어 대상 시스템의 공칭 모델을 coprime 함수들로 다음과 같이 표현한다.

$$P_o = NM^{-1}. \tag{6}$$

이 때, N과 M이 coprime이기 때문에 항상

$$NX + MY = 1 \tag{7}$$

을 만족하는 함수 X와 Y가 존재한다.

- 식 (6)과 식 (7)로부터 얻은 함수들인 N과 M, X, Y를 이용하여 [4]와 같이 $C(s)$를 다음과 같이 매개변수화한다.

$$C = \frac{X+MQ}{Y-NQ}. \tag{8}$$

여기서 $Q(s)$는 안정하고 proper한 실유리함수이다. 그리고, 식 (6)과 식 (8)을 이용하여 N과 M, X, Y로만 표현되는 공칭 감도 함수 $S_o(s)$와 공칭 상보 감도 함수 $T_o(s)$를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S_o = M(Y-NQ) \tag{9}$$

$$T_o = N(X+MQ) \tag{10}$$

- 결국 식 (5)를 만족하는 $q(s)$와 $C(s)$를 찾는 문제는 주어진 $q(s)$에서 $Q(s)$를 구하는 문제가 된다. 즉,

$$\||qM(Y-NQ)|^2 + |W_2N(X+MQ)|^2\|_\infty < \frac{1}{2} \tag{11}$$

를 만족하는 $Q(s)$를 찾는 문제가 된다. 이 때, 식 (11)을 다시 매개변수화하면, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\||R_1 - R_2Q|^2 + |S_1 - S_2Q|^2\|_\infty < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

여기서 $R_1 = qMY$이고, $R_2 = qMN$, $S_1 = W_2NX$, $S_2 = -W_2MN$이다.

- Spectral factorization을 이용하여 식 (12)를

$$\||U_1 - U_2Q|^2 + U_3\|_\infty < \frac{1}{2} \tag{13}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기서, U_1과 U_2, U_3은 다음 식들로부터 얻어진다.

$$\bar{R}_2R_2 + \bar{S}_2S_2 = \bar{U}_2U_2 \tag{14}$$

$$\bar{R}_2R_1 + \bar{S}_2S_1 = \bar{U}_2U_1 \tag{15}$$

$$\bar{R}_1R_1 + \bar{S}_1S_1 = \bar{U}_1U_1 + U_3 \tag{16}$$

$\bar{R}_i(s)$와 $\bar{S}_i(s)$는 $R_i(-s)$와 $S_i(-s)$를 각각 의미한다.

- 식 (13)은 다음 식들과 똑같은 의미를 지닌다.

$$\begin{aligned}
(13) \quad &\Leftrightarrow \quad |U_1 - U_2Q|^2 + U_3 < \frac{1}{2},\ \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \quad |U_1 - U_2Q|^2 < \frac{1}{2} - U_3,\ \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \quad |U_1 - U_2Q|^2 < |U_4|^2,\ \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \quad |U_4^{-1}U_1 - U_4^{-1}U_2Q|^2 < 1,\ \forall\omega \\
&\Leftrightarrow \quad \|U_4^{-1}U_1 - U_4^{-1}U_2Q\|_\infty < 1.
\end{aligned} \tag{17}$$

식 (17)은 일반적으로 잘 알려진 "모델 매칭(model matching)" 문제이다. [4]와 [10]에 있는 H_∞ 문제의 해를 구하는 방법들중 하나를 이용하여 쉽게 $Q(s)$를 얻을 수 있다. 따라서, 얻어진 $Q(s)$와 식 (8)을 이용하여 $C(s)$를 구할 수 있다.

이와 같은 반복 제어 시스템의 수정된 강인 안정 문제의 해를 구하는 방법을 통하여 반복 제어기의 저역 통과 필터 $q(s)$의 차단 주파수를 최대화시키고, 전체 시스템을 안정화시킬 수 있는 궤환 제어기 $C(s)$를 동시에 구할 수 있는 설계 절차를 다음과 같이 제시한다.

1. $q(s) = 1/(T_qs+1)$의 차단 주파수를 결정하는 T_q를 정한다.
2. 식 (14)와 식 (15), 식 (16)을 이용하여 U_1과 U_2, U_3을 구한다.
3. 식 (17)을 푼다.
4. 식 (17)의 조건이 만족되면 Step 1으로 가서 T_q를 감소시킨 후 위의 절차를 다시 수행한다.
   그렇지않으면, Step 1으로 가서 T_q를 증가시키고, 식 (17)을 만족할 때까지 T_q를 증가시킨다.
   이 과정을 통하여 최소의 식 (17)을 만족하는 최소의 T_q와 $Q(s)$를 구한다.
5. 만일 $Q(s)$가 proper하지않으면, $J(s) = 1/(\tau s+1)^r$를 도입하여 $Q(s)$를 $Q_{new}(s) = Q(s)J(s)$로 대체한다.
   τ는 식 (17)의 조건을 위배하지않는 적절히 작은 값이면 된다. 그리고, r은 $Q_{new}(s)$가 proper할 수 있는 최소의 차수이다.
   만일 $Q(s)$가 proper하면, $Q_{new}(s) = Q(s)$.

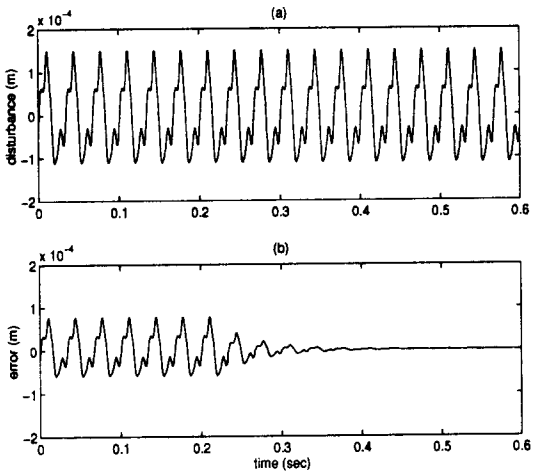

그림 3: (a) 주기적인 외란 (b) 주기적인 오차
Fig. 3. (a) Periodic disturbance (b) Periodic error

6. 위에서 얻어진 $Q_{new}(s)$과 식 (8)을 이용하여 $C(s)$를 구한다.

이 설계 절차를 이용하여 구한 $C(s)$는 식 (5)를 만족시키기때문에 반복 제어기가 없을 경우에도 앞 장에서 정의한 비구조적인 모델링 불확실성을 포함한 폐루프 시스템을 강인 안정시킨다. 그리고 $q(s)$는 최대화된 차단 주파수를 가지기때문에, 반복 제어 시스템의 성능을 극대화시킬 수 있다.

4. 컴퓨터 모의 실험

앞 장에서 반복 제어 시스템을 강인 안정시키고, 반복 제어 시스템의 성능을 최대화시킬 수 있는 알고리즘을 제시하였다. 이를 다음과 같이 비구조적인 모델링 불확실성을 가지는 선형 시스템에 적용하여 제안된 알고리즘의 유용성을 검증하고 반복 제어 시스템의 성능을 확인한다.

$$\begin{aligned} P(s) &= (1+\Delta W_2)P_o(s) \\ P_o(s) &= \frac{80.7}{s^2+23.9s+57150.9} \\ W_2(s) &= \frac{0.003s}{0.01s+1} \end{aligned}$$

앞 장에서 제시한 설계 절차를 이용하여 얻은 $q(s)$와 $C(s)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{1}{9.5\times 10^{-7}s+1} \\ C(s) &= 2.07\times 10^8 \frac{(s^2+23.9s+5.72\times 10^4)}{(s+4.35\times 10^4)(s+4.18\times 10^5)} \end{aligned}$$

위의 결과에서 알 수 있듯이 $q(s)$의 차단 주파수는 약 16.7 KHz로 반복 제어 시스템의 성능을 보장할 수 있는 충분한 크기이다. $|||qS_o|+|W_2T_o|||_\infty$는 0.6578로 1보다 작다. 따라서, 본 시스템은 반복 제어 시스템의 강인 안정 조건을 충분히 만족하고 있다. 그리고, $||W_2T_o||_\infty$가 0.1341이기 때문에 반복 제어기가 없더라도 $C(s)$는 앞에서 정의한 비구조적인 모델링 불확실성을 가진 폐루프 시스템을 강인 안정시킨다. 그림 3(a)는 30Hz의 기본 주파수 성분과 그것의 고조파들로 구성된 외란을, 그림 3(b)는 주어진 외란에 대한 반복 제어 시스템의 성능을 보여준다. 특히 그림 3(b)에서는 최초 0.2초동안은 반복 제어기가 없을 때의 주기적인 오차 신호 $e_T(t)$이다. 그리고 0.2초이후는 반복 제어기가 폐루프 시스템에 포함되었을 때 $e_T(t)$이다. 이와 같이 반복 제어기가 전체 폐루프 시스템에 포함됨으로써, 주기적인 외란 제거 능력이 크게 향상되어 $e_T(t)$가 크게 감소됨을 알 수 있다.

5. 결 론

비구조적인 모델링 불확실성이 포함된 시스템에 대한 반복 제어 시스템의 강인 안정 조건을 제시하고, 반복 제어 시스템의 성능을 극대화하기위해서 $q(s)$의 차단 주파수를 최대화시키고 전체 폐루프 시스템의 강인 안정시킬 수 있는 $C(s)$를 동시에 설계할 수있는 설계 절차를 제시하였다. 그리고, 제안된 강인 안정 조건과 설계 절차의 타당성을 컴퓨터 모의 실험을 통하여 확인하였다.

그러나, 제안된 설계 절차와 강인 안정 조건은 반복 제어 시스템 자체의 강인 성능 등을 고려하지않고 있다. 반복 제어 시스템의 강인 성능을 고려하기 위해서는 반복 제어기내에 존재하는 e^{-sT}와 같은 시간 지연항을 고려할 수 있는 무한 차원 시스템에 대한 체계적인 연구가 필수적이다.

참고 문헌

[1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering Operationof Robots by Learning," *Journal of Robotic Systems*, vol. 1, pp. 123-140, 1985.

[2] K. K. Chew and M. Tomizuka, "Digital Control of Repetitive Errors in Disk Drive Systems," *IEEE Control System Magazine*, pp. 16-20, Jan., 1990.

[3] J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 26, no. 1, pp. 4-16, 1981.

[4] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Maxwell McMillan, 1992.

[5] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The Internal Model Principle for Linear Multivariable Regulators," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 2, pp. 170-194, 1975.

[6] S. Hara, Y. Yamamoto, T. Omata, and M. Nakano, "Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogeneous Signals," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 33, no. 7, pp. 659-668, 1988.

[7] K. L. Moore, *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*, Springer-Verlag, 1992.

[8] F.-R. Shaw and K. Srinivasan, "Discrete-Time Repetitive Control System Design Using the Regeneration Spectrum," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 115, pp. 228-237, June, 1993.

[9] K. Srinivasan and F.-R. Shaw, "Analysis and Design of Repetitive Control Systems Using the Regeneration Spectrum," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 113, pp. 216-222, June, 1993.

[10] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., 1996.