Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

H_2/H_∞ 강인제어기 설계에 관한 연구 - 다항식 접근방법

A Study on the Design of H_2/H_∞ Robust Controller - Polynomial Approach

박 승 규, °송 대 원

창원대학교 전기공학과 (Tel:0551-79-7514; E-mail:skpark@sarim.changwon.ac.kr)

Abstract The H_2/H_∞ robust controller is designed by using polynomial approach. This controller can minimise a H_2 norm of error under the fixed bound of H_∞ norm of mixed sensitivity function by employing the Youla parameterization and using polynomial approach at the same time. It is easy to apply this controller to adaptive system.

Keywords H_2/H_∞, robust control, polynomial approach

1. 서론

견실한 특성에 성능 향상에 적합한 H_2/H_∞ 제어 시스템은 다음과 같은 두 가지 방법으로 발전해왔다.

상태공간 접근 방식[1][2][3][4][5]

다항식 접근 방식[8]

상태공간 접근방식 H_2/H_∞ 제어에서는 외란과 그것의 출력에 대한 영향이 상태공간 행렬에 의해서 명확하게 표현되어 있어야 하며 많은 결과들이 이 방법을 이용하여 발전해왔다. 반면에 다항식 접근방식에서의 H_2/H_∞ 제어는 단지 Grimble에 의해서만 발전되어 왔으며 진정한 의미의 H_2놈과 H_∞놈의 크기를 동시에 제한하는 H_2/H_∞ 제어개념이 적절하게 고려되지 못하였다. 하지만 Grimble은 다항식 접근방법에 있어서 H_2놈의 최소화와 H_∞놈의 최소화 문제간의 관계를 정립해 놓았다[9]. 본 논문에서는 감도함수와 부감도함수의 합의 H_∞ 놈의 크기를 제한함과 동시에 H_2놈의 크기를 최소화할 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

2. 문제설정

본논문에서는 그림 1과 같은 단일 입출력계통을 고려하기로 한다.

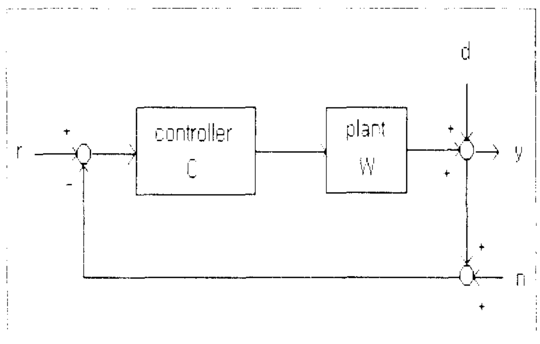

그림 1. 단일 입출력 궤환시스템

표기를 간단히 하기 위하여 다항식의 표기에 있어서 z^{-1}을 생략하기로 한다.
플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$W = A^{-1}B \tag{1}$$

본 논문에서 H_2/H_∞ 제어의 목적은 혼합감도 함수의 H_∞ 놈의 크기를 일정한 크기로 제한하고 H_2 놈의 크기를 최소화 하는 것이다. 혼합감도 함수에 대한 H_2 평가함수는 다음과 같다.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(W_1S)^*(W_1S) + (W_2T)^*(W_2T)\,\frac{dz}{z} \tag{2}$$

S는 감도함수, T는 부감도함수를 나타내며 W_1, W_2 는 하중함수 이다.

3. 제어기의 구조

본 논문에서는 제어목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 Youla 제어기를 사용한다.

$$C = \frac{N_1 + AK}{M_1 - BK} \tag{3}$$

여기서 M_1, N_1는 다음식을 만족한다.

$$AM_1 + BN_1 = 1 \tag{4}$$

K는 H_∞ 놈의 크기를 제한하는데 사용되고 M_1, N_1는 H_2 놈을 최소화시키는데 사용된다.

3.1 H_2 평가함수의 최소화

위의 제어기를 사용하는 경우 감도함수와 부감도함수는 각각 다음과 같이된다

$$S = (M_1 - BK)A \tag{5}$$

$$T = (N_1 + AK)B \tag{6}$$

따라서, 평가함수는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$J = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(W_1S)^*(W_1S) + (W_2T)^*(W_2T)\,\frac{dz}{z} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(W_1(M_1 - BK)A)^*(W_1(M_1 - BK)A) + (W_2(N_1 + AK)B)^*(W_2(N_1 + AK)B)\,\frac{dz}{z} \tag{8}$$

위의 평가함수를 최소화할 수 있는 K는 다음 정리와 같다.

정리 1. H_2 평가함수를 최소화시키는 Youla 파라미터 K는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_l Y_{id}}{Y_{in} Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \tag{9}$$

여기서 $G_l = GW_{2d}N_{0d} - LW_{1d}M_{0d}$ (10)

F,G는 다음 diophantine 방정식을 만족시킨다.

$$W_{1d}M_{0d}F + W_{1d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*}Gz^{-\kappa} = W_{1n}^{*}W_{1n}M_{0n}A(BA)^{*}Y_{id}^{*}z^{-\kappa} \tag{11}$$

$$W_{2d}N_{0d}S + W_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*}Lz^{-\kappa 1} = W_{2n}^{*}W_{2n}N_{0n}B(BA)^{*}Y_{id}^{*}z^{-\kappa 1} \tag{12}$$

증명: 평가함수의 적분항을 정리하면 다음과 같다.

$$(W_1 S)^{*}(W_1 S) + (W_2 T)^{*}(W_2 T)$$

$$= (W_1(M_0 - BK)A)^{*}(W_1(M_0 - BK)A) + (W_2(N_0 + AK)B)^{*}(W_2(N_0 + AK)B) \tag{13}$$

(여기서 $Y_l^{*}Y_l = W_1^{*}W_1 + W_2^{*}W_2$, $Y_c^{*}Y_c = (BA)^{*}BA$ (14))

$$= \left(Y_l Y_c K + \frac{(-W_1^{*}W_1M_0A + W_2^{*}W_2BN_0)(AB)^{*}}{Y_l^{*}Y_c^{*}}\right)^{*} \left(Y_l Y_c K + \frac{(-W_1^{*}W_1M_0A + W_2^{*}W_2BN_0)(AB)^{*}}{Y_l^{*}Y_c^{*}}\right) + \frac{W_1^{*}W_1W_2^{*}W_2}{Y_l^{*}Y_l} \tag{15}$$

$$= \left(\frac{Y_lY_cKW_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d} - (GW_{2d}N_{0d} - LW_{1d}M_{0d})}{W_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d}} - \frac{(FW_{2d}^{*}z^{\kappa} - SW_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(W_{1d}^{*}W_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})}\right)^{*} \left(\frac{Y_lY_cKW_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d} - (GW_{2d}N_{0d} - LW_{1d}M_{0d})}{W_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d}} - \frac{(FW_{2d}^{*}z^{\kappa} - SW_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(W_{1d}^{*}W_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})}\right) + \frac{W_1^{*}W_1W_2^{*}W_2}{Y_l^{*}Y_l} \tag{16}$$

$$= (T_1 + T_2)^{*}(T_1 + T_2) + \frac{W_1^{*}W_1W_2^{*}W_2}{Y_l^{*}Y_l} \tag{17}$$

여기서 $Y_l = \frac{Y_{in}}{Y_{id}}$, $W_1 = \frac{W_{1n}}{W_{1d}}$, $W_2 = \frac{W_{2n}}{W_{2d}}$

$$T_1 = \frac{Y_lY_cKW_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d} - G_l}{W_{1d}M_{0d}W_{2d}N_{0d}} \tag{18}$$

$$T_2 = \frac{(FW_{2d}^{*}z^{\kappa} - SW_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(W_{1d}^{*}W_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})} \tag{19}$$

식(18)에서 $K = \frac{G_lY_{id}}{Y_{in}Y_cW_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}}$ 일 때 T_1은 0이며 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$T_2^{*}T_2 + \frac{W_1^{*}W_1W_2^{*}W_2}{Y_l^{*}Y_l} \tag{20}$$

따라서 H_2 평가함수는 $K = \frac{G_lY_{id}}{Y_{in}Y_cW_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}}$ 일 때 최소가 된다. 그리고, 식 (9)에서 $M_{0d} = N_{0d}$이고 만약 $W_{1d} = W_{2d}$로 선택하면 K는 다음과 같이 간략화될 수 있다.

$$K = \frac{(G - L)Y_{id}}{Y_{in}Y_cW_{1d}N_{0d}} \tag{21}$$

증명끝

3.2 H_2/H_∞ 최소화

함수적으로 최소화시킬 수 있는 것은 H_2 놈이고 최소화시키고자 하는 것이 H_∞놈이므로 두 놈의 최소화간의 관계를 알아야만 한다. 다음 정리는 H_2 와 H_∞ 사이에 연결을 시킨 중요한 정리이다.

보조정리3.1 다음과 같은 평가함수를 고려하자.

$$J = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(X_0(z^{-1})\Sigma(z^{-1}))\frac{dz}{z} \tag{22}$$

위의 비용함수에서 실 유리함수 $\Sigma(z^{-1}) = \Sigma^{*}(z^{-1}) > 0$ 인 경우 J가 $|z|=1$ 위에서 적분항이 $X_0(z^{-1})\lambda^2$(실수)일 때 최소가 되도록하는 제어기는 $sup_{|z|=1}\|X_0(z^{-1})\|$를 역시 최소화시킨다.

앞의 보조정리를 이용하기 위하여 다음과 같은 하중함수와 diophantine방정식의 변형이 필요하다.

$$W_1 \Rightarrow \overline{W}_1,\ W_2 \Rightarrow \overline{W}_2 \tag{23}$$

$$\overline{W}_1 = W_1\frac{B_\sigma}{A_\sigma},\quad \overline{W}_2 = W_2\frac{B_\sigma}{A_\sigma} \tag{24}$$

$$F = F_0A_\sigma^{*}B_\sigma^{*}\quad S = S_0A_\sigma^{*}B_\sigma^{*} \tag{25}$$

하중함수의 변형에 의해 H_∞ 평가함수는 다음과 같다.

$$J_\infty = sup\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(\overline{W}_1(M_0 - BK)A)^{*}(\overline{W}_1(M_0 - BK)A) + (\overline{W}_2(N_0 + AK)B)^{*}(\overline{W}_2(N_0 + AK)B)\frac{dz}{z} \tag{26}$$

위의 H_∞ 평가함수의 크기를 제한하면서 H_2 평가함수의 값도 최소화시키는 Youla 제어기의 파라미터들은 다음과 같다.

정리 2 식(22)을 최소화시키는 K는 다음과 같다.

$$K = \frac{G_lY_{id}}{B_\sigma Y_{in}Y_cW_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}} \tag{27}$$

여기서 M_0, N_0은 다음 diophantine방정식을 만족한다.

$$A_\sigma W_{1d}W_{2d}M_{0d}N_{0d}F_l + W_{1d}^{*}W_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_{cn}^{*}G_lz^{-\kappa l} = B_\sigma(BA)^{*}Y_{id}^{*}(W_{2d}W_{2d}^{*}N_{0d}W_{1n}W_{1n}^{*}AM_{0n} + W_{1d}W_{1d}^{*}M_{0d}W_{2n}W_{2n}^{*}BN_{0n})z^{-\kappa l} \tag{28}$$

증명 : $(\overline{W}_1S)^{*}(\overline{W}_1S) + (\overline{W}_2T)^{*}(\overline{W}_2T)$

$$= (\overline{W}_1(M_0 - BK)A)^{*}(\overline{W}_1(M_0 - BK)A) + (\overline{W}_2(N_0 + AK)B)^{*}(\overline{W}_2(N_0 + AK)B) \tag{29}$$

$$= \left(\overline{Y}_lY_cK + \frac{(-\overline{W}_1^{*}\overline{W}_1M_0A + \overline{W}_2^{*}\overline{W}_2BN_0)(AB)^{*}}{\overline{Y}_l^{*}Y_c^{*}}\right)^{*} \left(\overline{Y}_lY_cK + \frac{(-\overline{W}_1^{*}\overline{W}_1M_0A + \overline{W}_2^{*}\overline{W}_2BN_0)(AB)^{*}}{\overline{Y}_l^{*}Y_c^{*}}\right) + \frac{\overline{W}_1^{*}\overline{W}_1\overline{W}_2^{*}\overline{W}_2}{\overline{Y}_l^{*}\overline{Y}_l} \tag{30}$$

$$= \left(\frac{\overline{Y}_lY_cK\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d} - (G\overline{W}_{2d}N_{0d} - L\overline{W}_{1d}M_{0d})}{\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d}} - \frac{(F\overline{W}_{2d}^{*}z^{\kappa} - S\overline{W}_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(\overline{W}_{1d}^{*}\overline{W}_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})}\right)^{*} \left(\frac{\overline{Y}_lY_cK\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d} - (G\overline{W}_{2d}N_{0d} - L\overline{W}_{1d}M_{0d})}{\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d}} - \frac{(F\overline{W}_{2d}^{*}z^{\kappa} - S\overline{W}_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(\overline{W}_{1d}^{*}\overline{W}_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})}\right) + \frac{\overline{W}_1^{*}\overline{W}_1\overline{W}_2^{*}\overline{W}_2}{\overline{Y}_l^{*}\overline{Y}_l} \tag{31}$$

여기서 $\overline{Y}_l^{*}\overline{Y}_l = \overline{W}_1^{*}\overline{W}_1 + \overline{W}_2^{*}\overline{W}_2$, $Y_c^{*}Y_c = (BA)^{*}BA$ (32)

위의 정리과정에서 다음과 같은 관계식을 이용하였다.

$$W_{1d}M_{0d}F + \overline{W}_{1d}^{*}\overline{Y}_{in}^{*}Y_c^{*}Gz^{-\kappa} = \overline{W}_{1n}^{*}\overline{W}_{1n}M_{0n}A(BA)^{*}\overline{Y}_{id}^{*}z^{-\kappa} \tag{33}$$

$$\overline{W}_{2d}N_{0d}S + \overline{W}_{2d}^{*}\overline{Y}_{in}^{*}Y_c^{*}Lz^{-\kappa 1} = \overline{W}_{2n}^{*}\overline{W}_{2n}N_{0n}B(BA)^{*}\overline{Y}_{id}^{*}z^{-\kappa 1} \tag{34}$$

$$\overline{Y}_l = \frac{\overline{Y}_{in}}{\overline{Y}_{id}},\quad \overline{W}_1 = \frac{\overline{W}_{1n}}{\overline{W}_{1d}},\quad \overline{W}_2 = \frac{\overline{W}_{2n}}{\overline{W}_{2d}}$$

위식은 또한 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(T_1 + T_2)^{*}(T_1 + T_2) + \Sigma\frac{W_1^{*}W_1W_2^{*}W_2}{Y_l^{*}Y_l}$$

여기서 $G_l = G\overline{W}_{2d}N_{0d} - L\overline{W}_{1d}M_{0d}$

$$T_1 = \frac{\overline{Y}_lY_cK\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d} - G_l}{\overline{W}_{1d}M_{0d}\overline{W}_{2d}N_{0d}}$$

$$T_2 = \frac{(F\overline{W}_{2d}^{*}z^{\kappa} - S\overline{W}_{1d}^{*}z^{\kappa 1})}{(\overline{W}_{1d}^{*}\overline{W}_{2d}^{*}Y_{in}^{*}Y_c^{*})}$$

$$\Sigma = \left(\frac{B_\sigma^{*}B_\sigma}{A_\sigma^{*}A_\sigma}\right)$$

$K = \frac{G_r Y_{id}}{Y_m Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}}$ 일때 T_1은 0이며 따라서 다음식과 같이 정리될 수 있다.

$$T_2^* T_2 + \sum \frac{W_1^* W_1 W_2^* W_2}{Y_l^* Y_l} \tag{35}$$

보조정리 3.1이 적용되기 위해서는 다음식이 만족되어야 한다.

$$T_2^* T_2 + \sum \frac{W_1^* W_1 W_2^* W_2}{Y_l^* Y_l} = \sum A^2 \tag{36}$$

$W_1 W_2$를 아주 작게 적당히 선택하면 $\sum \frac{W_1^* W_1 W_2^* W_2}{Y_l^* Y_l}$가 생략가능하며 $F_l = F_0 W_{2d}^* z^K - S_0 W_{1d}^* z^{kl}$, $D_c = W_{1d} W_{2d} Y_m Y_c$ 라고 정의하면 다음식이 성립된다.

$$\begin{aligned} A_c &= D_c \lambda \\ B_c &= F_l^* F_l \end{aligned} \tag{37}$$

여기서 $G_l = G W_{2d} N_{0d} - L W_{1d} M_{0d}$라고 정의하면

$$K = \frac{G_l Y_{ld}}{B_c Y_m Y_c W_{1d} W_{2d} M_{0d} N_{0d}} \tag{38}$$

식 (33)(34)의 Diophantine 방정식에서 (24)(37)식 관계를 대입하면 다음과 같다.

$$A_c W_{1d} M_{0d} F_0 + W_{1d}^* Y_m^* Y_c^* G z^{-K} = B_c W_{1n}^* W_{1n} M_{0n} A (BA)^* Y_{ld}^* z^{-K} \tag{39}$$

$$A_c W_{2d} N_{0d} S_0 + W_{2d}^* Y_m^* Y_c^* L z^{-kl} = B_c W_{2n}^* W_{2n} N_{0n} B (BA)^* Y_{ld}^* z^{-kl} \tag{40}$$

식 (39)* $W_{2d} W_{2d}^* N_{0d}$ - 식 (40)* $W_{1d} W_{1d}^* M_{0d}$ 을 계산하면 다음식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \lambda D_c W_{1d} W_{1d} N_{0d} Y_m Y_c F_l + W_{1d}^* Y_m^* Y_{cn}^* G_l z^{-kl} = B_c (BA)^* \\ Y_{ld}^* (W_{1n} W_{1n}^* A M_{0n} - W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-K} \end{aligned}$$

증명 끝

여기서 H_∞ 평가함수의 크기를 제한하면서 H_2 평가함수의 값도 최소화시키기 위해서 $\sum$ 가 1과 같도록 하면 H_∞최소화 문제가 H_2최소화 문제와 같아지게 된다. $\sum$ 가 1이 되도록 하기 위해서는 식(37)에서 $A_c = B_c$ 이어야한다. $D_c\lambda$는 하중함수에 의해 설정되며 F_l는 diophantine 방정식에서 설정되므로 이제까지 M N를 먼저 구한 후 F_l를 구하던 과정에서[10] 탈피하여 F_l를 선택한 후 M N를 구하면 원하는 $\sum$를 얻을 수 있다.

$W_{1d} = W_{2d}$로 선택하면 식 (17)에서 $M_{0d} = N_{0d}$이므로 앞의 K와 $G_l F_l$를 구하는 식은 간략화 된다.

$$K = \frac{G_l Y_{ld}}{B_c Y_m Y_c W_{1d} N_{0d}}$$

위의 $G_l B_c$는 다음 Diophantine 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} \lambda W_{1d} W_{1d} N_{0d} Y_m Y_c F_l + W_{1d}^* Y_m^* Y_c^* G_l z^{-kl} = B_c (BA)^* \\ Y_{ld}^* (W_{1n} W_{1n}^* A M_{0n} + W_{2n} W_{2n}^* B N_{0n}) z^{-K} \end{aligned}$$

4. 결론

Youla 제어기와 다항식 접근방식을 이용하여 H_2/H_∞ 제어기를 설계하였다. 이 제어기는 혼합감도함수의 H_∞놈의 크기를 제한함과 동시에 H_2의 크기를 최소화할 수 있다.

Reference

[1] D.S. Bernstein, W.M.Haddad,"LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccsti Equation Approach," IEEE AC-34,pp293-305, 1989

[2] D.Mustafa,"Relation Between Maximum- entrophy/H_∞ Control and Combined H_∞/LQG Control," Systems and Control Lett.,12, pp193-203,1989

[3] J.C.Doyle, K. Zhou, B.Bodenheimer,"Optimal Control with Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives," CDC pp2065-2070,1993

[4] J.C. Doyle,K. Glover,P.Khargonekar, B.Francis, " State space solutions to standar H_∞ and H_2 control problems", IEEE AC-34, pp81-847,1989

[5] J.Doyle, K.Zhou, K.Glover, B.Bodenheimer, "Mixed H_∞ and H_2 performence objective : Optimal control", IEEE AC-39 No.8 1994 pp1575-1587

[6] H.Kwakernaak, "Robustnees optimization of linear feedback systems", 22nd CDC Conf.,Texas, 1983

[7] H.Kwakernaak, "A Polynomial Approa ch to Minmax Frequency Domain Optimization of Multivariable Feedback Systems", Int.J.Control,1986, pp117-156

[8] M.J.Grimble, " H_∞/H_2 robust control design for a generalized control structure and flight control application", Int. J.Systems Sci, 1995, vol.26 No.11, pp 2043-2068
H_∞

[9] M.J.Grimble,"Optimal multivariable robust controllers and the relationship to LQG design problem," Int.J.Control,vol.48,pp33-58,1988

[10] 박승규,"식응제어를 위한 H_∞강인 제어기의 설계 다항식 접근방법,"대한전기 학회 하계논문 발표 논문집, pp956-958,1996