Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

여유 자유도 로봇의 최적 자세 제어

Optimal Configuration Control for Redundant Robot Manipulators -Manipulability-Based Approach

이 지홍*, °이 미경*, 이 영일*, 유 준**
*충남대학교 메카트로닉스 공학과 (Tel: 821-6873; Fax: 825-9225; E-mail: jhlee@meca.chungnam.ac.kr)
** 충남대학교 전자공학과 (Tel: 825-3991)

Abstracts Several figures representing velocity transmission from joint space to task space are analyzed and compared with each other. The figures include velocity ellipsoid derived from Jacobian matrix, scaled velocity ellipsoid derived from normalized joint velocities, polytope derived by numerical scaling, and polytopes derived by linear combinations of Jacobian column vectors. The results show that the optimal directions given by the measures are not the same and the conventional velocity ellipsoid is not good choice as optimization measure as far as the moving direction is concerned. Simulation examples for 3 d.o.f. redundant robot manipulators in 2-dimensional task space are given for comparison study.

Keywords: Manipulability, Velocity Ellipsoid, Velocity Transmission Ratio, Polytope.

1. 서론

여유자유도 로봇은 목적하는 작업수행시 반드시 필요한 자유도를 제외한 여분의 자유도를 이용해 충돌회피나 그 밖의 로봇 성능을 높이는데 이용될 수 있다. 작업에 따라 속도를 높이는 것이 성능을 높이는 것이 될 수도 있고, 정밀한 제어를 하며 힘을 많이 내는 것이 성능을 높이는 것이 될 수도 있다. 본 논문에서는 각 관절의 움직임에 대하여 작업기가 임의의 방향으로 얼마나 잘 움직이는가를 나타내는 양, 즉 매니퓰러빌리티를 향상시킬 수 있도록 하는 최적의 자세를 찾는 것을 목표로 하는데, 각 관절각속도의 범위가 고려되도록 매니퓰러빌리티 타원을 이용한다.

매니퓰러빌리티의 개념은 Yoshikawa[5]에 의해 처음 소개되었고, Singh에 의해 속도타원과 힘 타원의 개념이 소개되었다.[6] 한 팔 로봇에 있어 매니퓰러빌리티는 속도 타원의 부피에 비례한다[1,2]. 이는 관절의 각속도의 변화와 작업 공간에서 작업기의 속도 변화와의 관계를 나타내는 자코비안 행렬을 싱귤러값 분할(Singular Value Decomposition)시 얻게되는 싱귤러값들의 곱에 비례하는 값으로 정의된다[1,2]. 이 석한은 협조 작업하는 두 대 로봇의 경우, 매니퓰러빌리티는 두 대의 각 로봇으로부터의 매니퓰러빌리티 타원사이의 공통영역으로 나타낼 수 있음을 보여주었다[3]. 그러나 위의 논문들과 그 밖의 매니퓰러빌리티 타원과 관련된 논문에서는 각각의 관절각속도의 범위를 고려하지 않고, $\dot{\theta}^T\dot{\theta}=1$ 로 제약시켜 매니퓰러빌리티 타원을 정의하였다. 본문에서는 각 관절각속도의 최대 최소 값을 고려한, 즉 노말라이즈된 매니퓰러빌리티 타원을 정의하고, 실제 최대, 최소 관절각속도에 의해 그려지는 폴리토프를 이용하였을 경우의 속도 전달비를 비교한다.

2. 매니퓰러빌리티 타원

n 자유도를 갖는 매니퓰레이터가 m차원 공간에서 작업할 때, 관절각 θ_i $(i=1\ldots n)$ 과 작업공간에서의 작업기 위치와 방향을 나타내는 X_j $(j=1\ldots m)$ 과의 관계를 다음과 같이 표시한다.

$$X=F(\theta) \tag{1}$$

단, $X=[x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$, $\theta=[\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n]^T$ 이다.

J 가 로봇 형상에 의해 결정되는 $m \times n$ 자코비안 행렬이면 식(1)을 미분하여 식(2)를 얻을 수 있다.

$$\dot{X}=J(\theta)\,\dot{\theta} \tag{2}$$

2.1 매니퓰러빌리티 타원 (Manipulability Ellipsoid)

단위구를 나타내는 식(3)은 자코비안 J 에 의해 타원을 나타내는 식으로의 변환이 가능하다.

$$\|\dot{\theta}\|^2=1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\|\dot{\theta}\|^2 &= \dot{\theta}^T\dot{\theta} \\ &= \dot{X}^T(J^+)^TJ^+\dot{X} \\ &= \dot{X}^T(JJ^T)^+\dot{X}=1\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $J^+=J^T(JJ^T)^{-1}$ 는 슈도인버스된 자코비안 행렬이다. 식(4)는 수학적으로 타원의 방정식이 되는데, 이렇게 정의된 타원을 매니퓰러빌리티 타원이라고 한다. 자코비안은 관절각에 따

라 변하므로 이 타원은 매니퓰레이터의 형상에 의해 변한다. 매니퓰러빌리티 타원의 체적은 매니퓰러빌리티 M 를 측정하는 기준이 되는데, 타원의 체적은 식(4)와 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$M=\sqrt{det\{J(\theta)J(\theta)^T\}} \tag{4}$$

싱귤러 값 분할 이론[8]에 의해 자코비안 J 는 두 개의 직교행렬 $U\in R^{m\times m}$ 과 $V\in R^{n\times n}$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$J=U\Sigma V^T \tag{5}$$

여기서 $$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & \dots & 0 & | & \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & | & \\ . & & & . & | & 0 \\ . & & & . & | & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m & | & \end{bmatrix}\in R^{m\times n}$$

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\dots\geq\sigma_m\geq 0 \tag{6}$$

$\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m$ 는 자코비안 행렬의 싱귤러값들이다.

2.2 속도 전달비(Velocity Transmission Ratio)

식(3)에서 조인트 속도를 $\dot\theta^T\dot\theta=1$ 로 제한시켰을 경우 식(7)과 같은 식을 얻게 되는데, 속도 $\dot X$ 를 크기와 방향으로 나누어 원점에서부터 어떤 방향으로의 단위벡터 u 로의 속도타원의 값 β 를 대입하면 그 자세에서 u방향으로 낼 수 있는 속력을 얻을 수 있다.

$$\dot\theta^T\dot\theta=\dot X^T[JJ^T]^{-1}\dot X=1 \tag{7}$$

$$(\beta u)^T[JJ^T]^{-1}(\beta u)=1$$

$$\beta^2 u^T[JJ^T]^{-1}u=1$$

$$\beta=1/\sqrt{u^T[JJ^T]^{-1}u} \tag{8}$$

이렇게 얻게 되는 속도타원위의 값 β 를 속도 전달비라고 한다. 현재의 자세에서 매니퓰레이터를 빨리 동작시켜야 하는 작업의 경우에는 매니퓰레이터 타원에서 속도 전달비가 큰 방향으로 동작시키는 것이 적당하고, 조립과 같은 정밀한 제어를 요하는 동작일 경우에는 매니퓰레이터 타원의 속도전달비가 적은 방향으로 로봇을 움직이는 것이 바람직하다.

2.3 노말라이즈드 속도 타원

관절 각속도를 $\dot\theta^T\dot\theta=1$ 로 제한시키지 않고 각각의 관절 각속도가 가질 수 있는 범위를 매니퓰레이터 타원에 포함시키기 위해서는 관절각속도에 약간의 수정이 필요하다. n개의 각 관절 속도의 최대값, 최소값이 다음과 같다고 할 때 ,

$$-\dot\theta_{i,\max}\leq\dot\theta_i\leq\dot\theta_{i,\max} \tag{9}$$

새롭게 정의되는 각속도 $\hat{\dot\theta}$ 를 관절 각속도 $\dot\theta$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$\hat{\dot\theta}=W^{-1}\dot\theta \tag{10}$$

여기서 $W=diag[\dot\theta_{1,\max},\dot\theta_{2,\max},\dots\dot\theta_{n,\max}]$ 는 대각선의 원소들을 각관절각도의 한계 값으로 갖는 웨이티드 행렬이다. 이를 작업기에서의 속도 $\dot x$ 에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$\dot x=J\dot\theta$$

$$=JW\hat{\dot\theta}$$

따라서 로봇의 자세에 의해 결정되는 자코비안 행렬에 웨이티드 행렬 W 만 곱해 주면 각 관절 각속도의 범위도 고려된 새로운 자코비안을 얻게 된다.

3. 폴리토프(Polytope)

폴리토프는 실제 각 관절각속도의 최대, 최소값로 이루어지는 다각형이다.

$$\dot X=[J_1\ J_2\ \dots\ J_m]\ [\dot q_1\ \dot q_2\ \dots\ \dot q_m]^T$$

$$=\dot q_1 J_1+\dot q_2 J_2+\dots+\dot q_m J_m \tag{11}$$

작업공간상의 작업기의 속도 $\dot X$ 는 자코비안 행렬의 각 칼럼벡터와 관절각속도와의 선형조합으로 나타낼 수 있다. 평면 3자유도 로봇의 경우 폴리토프는 4각형 또는 6각형의 다각형으로 그려진다. 따라서 원점으로부터 폴리토프까지의 거리, 즉 속도전달비는 방향에 따라 다르게 되므로 속도전달비를 최대로 하는 최적해 문제를 생각해 볼 수 있다.

4. 응용예

4.1 최적해

시뮬레이션은 여유자유도 로봇의 매니퓰러빌리티를 가장 크게 하는 최적자세를 구하기 위해, 작업방향을 u 로 하고 그 방향으로의 속도전달비 β 의 역수를 목적함수로 하는 QP(Quadratic Problem)로 정의한다. 해를 찾기 위한 도구로는 MATLAB을 이용한다[9]. 제공된 최적화 루틴은 로컬하게 해를 찾게 되므로 해를 찾기 시작하는 초기값 선정이 매우 중요하다. 시뮬레이션은 2차원공간에서 움직이는 3자유도 로봇으로 하였다. 최적해라는 사실에 신빙성을 기하기 위해 여러 가지 초기각도를 주어 얻게 되는 로컬해들 중 값이 가장 작게 될 때를 최적 자세로 하였다. 그림1은 여유자유도를 가짐을 이용하여 세 번째 링크를 돌려가며 최적해를 구하는데 선정된 초기자세를 잡은 그림이다.

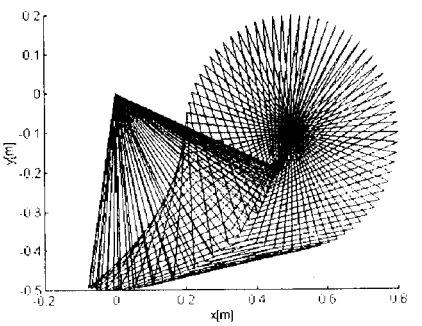

그림 1. 로봇의 초기자세들.
Fig 1. The initial configurations.

4.2 시뮬레이션 결과

평면 3자유도 로봇의 각 링크길이는, $l_1=0.5, l_2=0.4, l_3=0.3$ 이며, 자코비안 행렬은 다음과 같다.

$$J=\begin{bmatrix} -l_1S_1-l_2S_{12}-l_3S_{123} & -l_2S_{12}-l_3S_{123} & -l_3S_{123} \\ l_1C_1+l_2C_{12}+l_3C_{123} & l_2C_{12}+l_3C_{123} & l_3C_{123} \end{bmatrix}$$

단 $C_{123}=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ 이고 $S_{123}=\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ 를 각각 나타낸다. 고정시킨 작업기의 위치는 (0.5, -0.1)이고 작업방향을 $u_1=[\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)]$ 과 $u_2=[\cos(\pi), \sin(\pi)]$ 의 두 방향에 대해 시뮬레이션하였다. 결과 그래프는 모두 세 가지 경우에 대한 결과로, 첫 번째 경우는, $\theta^T\theta=1$ 의 식에 의해 생성되는 타원, 즉 매니퓰러빌리티 타원의 u_1, u_2 방향으로의 속도 전달비가 최대가 되도록 하는 최적 자세를 찾는 것이다. 그림의 그래프에서 실선으로 그려진 것에 해당하고 J 로 표현한다. 두 번째 경우는, $-\dot{\theta}_{i,\max} \le \dot{\theta}_i \le \dot{\theta}_{i,\max}$ 를 고려하여 J 대신 JW 로 최적해를 찾고 매니퓰러빌리티 타원을 그린 것으로 그림의 그래프 중에서 일점 쇄선으로 나타내었고 JW 로 표현한다. 세 번째 경우는 타원에서 첫 번째, 두 번째의 주어진 방향으로의 속도 전달비가 최대가 되도록 하는 것 대신, 실제 각 속도의 범위에 의해 그려지는 폴리토프를 직접 이용하여, u 방향으로의 속도 전달비를 최대로 한 것이다. 각 그림에서 점선에 해당한다. 따라서 해를 비교해 보면 세 번째 경우가 가장 성능이 좋게 됨을 예상할 수 있다. 세 경우 모두 작업기의 위치가 정해져 있고, 작업 방향까지 주어져 있는 경우에 대해 그 방향으로의 최대속도를 가질 수 있도록 하기 위한 것으로 단위 벡터 u 방향으로의 속도 전달비가 가장 크도록 타원의 장축방향이 u 방향과 일치하면 될 것 같으나 로봇의 기구학적인 제약조건으로 인해 대부분의 초기조건에서 그렇게 되진 않는다. 그림2, 그림3은 각각 위의 첫 번째, 두 번째, 세 번째 경우에 대해 u_1, u_2 방향으로의 속도전달비를 가장 크게 할 수 있도록 하는 최적해를 구했을 경우의 로봇형상을 그린 것이다. 작업기의 위치는 고정되어 있으나 세 가지 경우의 해가 약간씩 다름을 알 수 있다.

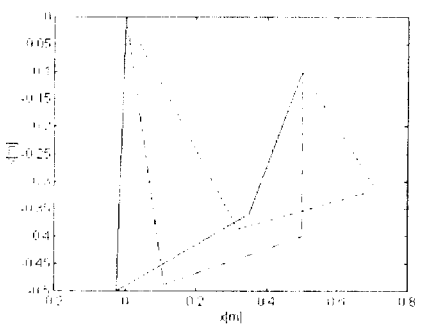

그림 2. 세 가지 지수에 의해 u_1 방향으로 구해진 로봇의 최적 자세.

Fig. 2. The optimal robot configuration with three measures along u_1.

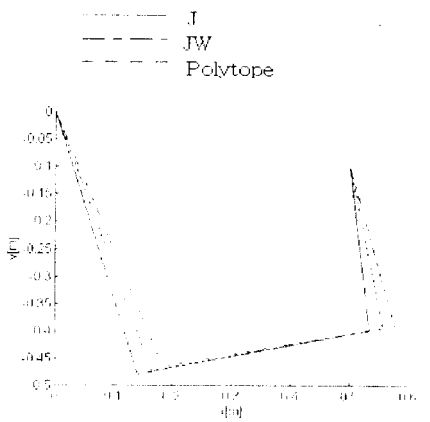

그림 3. 세 가지 지수에 의해 u_2 방향으로 구해진 로봇의 최적 자세.

Fig. 3. The optimal robot configuration with three measures along u_2.

그림4, 그림5는 그림2, 그림3의 각각의 로봇 최적 자세에 의해 결정되는 관절각에 의한 자코비안을 이용하여 매니퓰러빌리티 타원과 각각에 해당하는 폴리토프를 그린 것이다. 그림을 보면 폴리토프에서 단위방향벡터 u 로의 속도 전달비가 J 로 그렸을 때의 첫 번째 경우보다 JW 의 두 번째 경우가 크고, 폴리토프를 직접 이용하여 최적해를 구한 세 번째 경우가 더 크다. 가운데의 실선으로 그린 것은 주어진 작업에서의 속도의 방향을 나타낸다. 타원의 그림또한 주어진 방향 u_2 로 기울어져 있음을 알 수 있다.

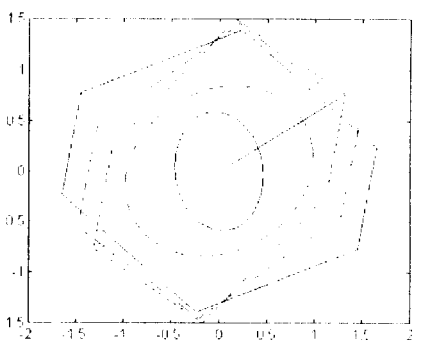

그림 4. 세가지 경우의 최적해 속도타원과 그에 해당하는 폴리토프 ($u=u_2$ 일 때).

Fig. 4. Velocity ellipsoids and polytopes corresponding to the optimal solutions along u_2.

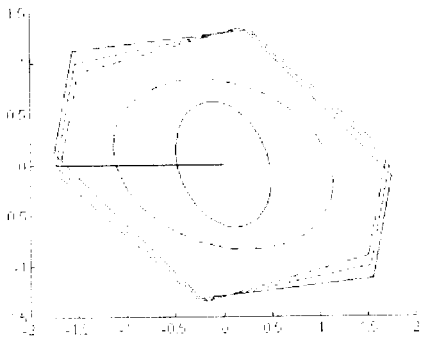

그림 5. 세 가지 경우의 최적해 속도타원과 그에 해당하는 폴리토프 ($u = u_2$ 일 때)

Fig. 5. Velocity ellipsoids and polytopes corresponding to the optimal solutions along u_2.

폴리토프 내부의 타원의 모양을 볼 때 J 에 의한 타원과 JW 에 의한 타원을 비교해 보면 타원의 기울어진 방향에 있어서, JW 에 의한 노말라이즈드 타원이 주어진 방향 u_1 , u_2 로 훨씬 기울어져 있음을 알 수 있다. 따라서 각 관절의 각속도의 최대, 최소값을 적절히 이용하여 타원을 그리는 것이 메니퓰레이빌리티의 확장이라는 면에서는 더 나을 수 있다.

표1은 그림4, 그림 5에서의 u 방향으로 폴리토프에 이르는 때의 크기, 즉 속도전달비를 적은 것이다. 이를 보면 u_1, u_2 방향 모두 첫 번째 J 의 경우보다 두 번째의 JW 경우가 약간 큰 값을 보이고, 세 번째 폴리토프를 이용한 경우가 가장 큰 값을 나타낸다.

표 1. 세 가지 지수에 의한 속도전달비.

Table 1. The velocity transmission ratio with three measures.

방향벡터 / 속도전달비	$u = u_1$ $[\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)]$	$u = u_2$ $[\cos(\pi), \sin(\pi)]$
J	1.2937	1.3113
JW	1.3836	1.4390
Polytope	1.4834	1.5225

5. 결론

본 논문에서는 메니퓰레이빌리티 타원을 이용하여 관절각속도의 범위를 제약조건으로 포함하여, 속도 전달비를 최대로 하는 최적화 문제를 다루어 보았다. 이전 여러 논문에서의 $\theta^T\theta = 1$ 제약조건을 사용한 메니퓰레이빌리티 타원을 이용한 첫 번째 경우와, 각 관절 모두의 각속도 제약조건을 고려하여 노말라이즈시킨 타원을 이용한 두 번째 경우, 그리고 해 영역으로 그려지는 폴리토프를 이용한 세 번째 경우에 대해 각각 속도전달비를 최대로 하는 최적화 문제를 다루었다. 해가 로컬하게 찾아질 수 있기 때문에, 이유자유도 로봇의 한 링크를 돌려가며 해를 찾기 위한 초기조건을 변화시켜가며 목적함수가 최소가 되는 관절각을 택하였다. 각각에 대해 구해진 관절각도에 의해 타원, 폴리토프를 그려본 결과 $\theta^T\theta = 1$ 제약조건에 의해 자코비안 행렬에 의해 구한 해보다는 관절각속도의 범위를 포함시켜 새롭게 정의된 자코비안 행렬을 이용한 속도전달비가 컸으며, 해 집합 폴리토프를 이용하여 속도전달비를 최대로 하도록 하였을 때가 더 큰 값을 얻었다. 본 논문에서는 평면에서의 타원, 폴리토프를 다루어 비교적 간단했으나 3차원 이상에서는 메니퓰레이빌리티와 직접적으로 관계있는 타원의 체적이나 속도전달비 등을 구하기가 쉽지 않고, 타원, 폴리토프의 형태에 따라 해가 같은 것이 여러개 존재할 수 있으므로 어떤 것을 선택할 것인가 하는 문제도 야기될 수 있다.

참고문헌

[1] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", *The Int. J. of Robotics Res.*, vol. 4, no 2., pp. 3-9, 1985.

[2] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, and B. Siciliano, "Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple Arm Systems," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 7, pp. 698-685, 1991.

[3] Sukhan Lee, "Dual Redundant Arm Configuration Optimization with Task-Oriented Dual Arm Manipulability," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol.5, No.1, 1989.

[4] P. J. McKerrow, *로봇공학*, ADDISON WESLEY, pp. 267-279, 1992 .

[5] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," *Robotics Research*: The First International symposium, MIT Press, pp. 735-747, 1984.

[6] J. R. Singh, J. Rastegar, S.Snee, " Determination of Manipulator Kinematic characteristics: A Probabilistic Approach," *International Journal of Robotics and Automation*, Vol.7, No.4, pp. 161-169

[7] J. A. Euler, S. M. Babcock, "A Comparison of Two Real Time Control Schemes for Redundant Manipulators with Bounded Joint Velocities," IEEE, 1989.

[8] V. C. KLEMA, " The Singular Value Decomposition: Its Computation and Some Applications," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-25, No. 2, 1980.

[9] *Toolbox For Use with MATLAB*, The MATH WORKS.