

임팩트 타원을 이용한 임팩트의 최소화

Impact Minimization by Impact Ellipsoids

이지홍*, °이영일*, 유준**

*충남대학교 메카트로닉스 공학과 (Tel:042-821-6873; E-mail:jhlee@meca.chungnam.ac.kr)

**충남대학교 전자공학과 (Tel:042-821-5661; Fax: 042-823-5336)

Abstracts A weighted impact ellipsoid normalized by maximum allowable angular velocity changes is defined and compared with conventional impact ellipsoids and impact polytopes. The results shows that the conventional impact ellipsoid may give false solution as far as the optimal direction of motion is concerned.

Keywords impact ellipsoid, weighted impact ellipsoid, impact polytopes, maximum impact transmission ratio, impact minimization

1. 서론

로봇이 외부 환경과 접촉하거나 충돌하는 것은 조작자의 계획된 작업을 수행하기 위해 의도적으로 이루어지거나 조

작업 공간에서 위치 및 자세를 결정하는데 필요한 관절 수 보다 많은 관절의 수를 갖는 여유자유도 로봇의 경우는 내부 운동(self-motion)을 이용하여 장애물을 피한다든지 싱굴러한 자세를 피한다든지 등의 연구가 이루어졌다 [10,11]. 이러한 여유자유도를 임팩트 모델이나 제어에 이용하여 Walker는 임팩트를 최소화하는 방법을 연구하였다 [3]. 또 그는 이 연구를 기초로 기구학적, 동력학적 상관성 [6-9]과 연관지어 임팩트의 measure와 타원을 정의하였다 [4,5].

위에서 정의된 타원은 자코비안 매트릭스에 기초를 두고 관절 각속도의 크기(norm)와 작업 공간에서의 속도의 크기(norm)의 비에 대한 정보만을 주기 때문에 각 관절 각속도가 각기 다른 제한 범위로 주어지는 일반적인 경우에는 최적 방향에 대한 정확한 정보를 주지 못한다. 각 관절 각속도의 제한 범위가 주어져 있을 때, 작업공간에서의 속도에 대한 정확한 정보를 주는 것이 폴리토프(polytopes)방법인데, 이 폴리토프에 의한 방법과 매니폴러빌리티 타원을 비교 분석이 Mechiorri에 의해 이루어졌다[13]. 여기서 타원에 의한 방법은 작업기의 속도에 대하여 정확한 정보를 주지 못한다는 사실이 설명되었다.

따라서 본 연구는 순간 각속도의 변화의 허용 범위가 각각 다를 때 임팩트 타원을 정의하는데, 이를 최대 허용 순간 속도의 변화로 순간 속도의 변화를 노말라이즈(normalize)하여 임팩트 타원을 정의하고 이를 폴리토프 방법을 써서 비교한다. 또한 임팩트를 최소화하는데 이상 설명한 여러 지수를 이용하여 얻어진 결과를 비교 분석하였다.

2. 임팩트 모델과 타원

2.1 로봇의 임팩트 모델

로봇은 각 관절의 위치 θ 일 때, 작업기의 위치 x 는 다음 식으로 표현 할 수 있다.

$$x = f(\theta) \quad (1)$$

위 식의 양변을 미분하면 다음과 같다

$$v = \dot{x} = J(\theta)\dot{\theta} \quad (2)$$

이때, J 는 관절 속도 벡터와 작업기의 속도 벡터의 관계를 나타내고 이를 자코비안이라 한다. 또한 로봇의 동력학 식은 다음과 같이 주어지는데

$$\tau = I(\theta)\ddot{\theta} + \dot{\theta}^T P(\theta)\dot{\theta} - J(\theta)^T F \quad (3)$$

여기서 τ 은 관절 토크 벡터, $I(\theta)$ 는 $n \times n$ 이너서 매트릭스, $\dot{\theta}^T P(\theta)\dot{\theta}$ 은 원심력 및 전향력, F 는 작업기에 가해지는 힘을 나타낸다.

두 물체가 충돌 시에 각각의 물체는 순간 속도 변화가 생기고 이때 충돌 지점에서 발생하는 임팩트 힘은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_t^{t+\Delta t} F(s)ds = \hat{F} \quad (4)$$

식 (4)를 t 에서 부터 $t + \Delta t$ 까지 적분하면 다음과 같다.

$$\int_t^{t+\Delta t} I(\theta)\ddot{\theta} ds + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\theta}^T P(\theta)\dot{\theta} ds - \int_t^{t+\Delta t} J(\theta)^T F ds = \int_t^{t+\Delta t} \tau ds \quad (5)$$

위치와 속도는 $\Delta t \rightarrow 0$ 일 때 항상 유한하기 때문에 $P(\theta)$ 를 포함하는 항의 적분과 τ 의 적분 값은 0이 된다.

따라서 남은 항을 가지고 정리하고 첫 번째 항을 적분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I(\theta) [\dot{\theta}(t+\Delta t) - \dot{\theta}(t)] = J(\theta)^T \hat{F} \quad (6)$$

위 식에서 순간 각속도의 변화 $\dot{\theta}(t+\Delta t) - \dot{\theta}(t)$ 를 $\Delta \dot{\theta}$ 로 놓으면 다음과 같이 간결하게 쓸 수 있다

$$\Delta \dot{\theta} = (J^{-1} J^T)^T \hat{F} \quad (7)$$

식 (7)에서 임팩트 힘은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{F} = ((J J^{-1})^+)^T \Delta \dot{\theta} \quad (8)$$

여기서 $(J J^{-1})^+$ 은 $J J^{-1}$ 의 슈도 인버스이다.

2.2 임팩트 타원과 Measure

관절 속도 벡터와 작업기의 속도 벡터의 관계를 나타내는 식 (2)의 J 를 사용하여 Yoshikawa는 한 대 로봇 시스템에 있어 매니퓰러빌리티(속도) 타원과 이 타원의 부피에 비례하는 양으로 매니퓰러빌리티 measure를 정의하였다 [8,10]. 이와 유사하게 식 (8)은 순간 각속도의 변화 벡터와 임팩트 힘 벡터의 관계를 기술한다. 또한 동력학 임팩트 measure는 다음과 같이 스칼라 양으로 정의된다[4,5].

$$M_{di} = \sqrt{\det((J J^{-1})^+)^T (J J^{-1})^+} \quad (9)$$

이를 singlar 값 분해를 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[(J J^{-1})^+]^T = U \Sigma V^T \quad (10)$$

이때, U 와 V 는 직교 매트릭스이고, $\Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ 이고, $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ 은 $[(J J^{-1})^+]^T$ 의 singlar 값들이다. 이때 동력학 임팩트 측정은 다음과 같이 이들의 곱으로 표현되고

$$M_{di} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m \quad (11)$$

이때 singlar 값들 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \quad (12)$$

이 임팩트 측정에 해당하는 임팩트 타원은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{F}^T [J J^{-1}]^{-2} [J J^{-1}]^T \hat{F} \leq 1 \quad (13)$$

식 (7)에서 순간 각속도 변화 $\Delta \dot{\theta}$ 를 단위 놈(unit norm)일 때($\|\Delta \dot{\theta}\|^2 = \Delta \dot{\theta}^T \Delta \dot{\theta} \leq 1$), 임팩트 힘의 놈($\|\hat{F}\|$)은 [9]에서의 속도 전달비나 힘 전달비와 마찬가지로 임팩트 전달비라 정의하고 임팩트 힘 단위 벡

터가 u 라 하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\|\hat{F}\| = \frac{1}{\sqrt{u^T (J J^{-1})^T J J^{-1} u}} \quad (14)$$

임팩트 타원은 로봇의 자세 θ 가 주어질 때 임팩트 힘에 대한 여러 정보를 준다. 이 타원의 장축 방향은 순간 각속도의 변화에 대하여 가장 큰 임팩트 힘을 갖는 방향을 나타내고 단축 방향은 가장 작은 임팩트 힘을 갖는 방향을 나타낸다. 이는 식 (10)에서 표현된 singlar 값 분해를 함으로 알 수 있는데 i 번째 singlar 값은 i 번째 주축의 크기를 나타내고 이때 U 의 i 번째 열 벡터 u_i 는 i 번째 주축 방향을 나타낸다. 여기서 i 번째 singlar 값은 i 번째 주축 방향으로의 임팩트 전달비를 나타낸다. 따라서 singlar 값과 임팩트 전달비 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\sigma_1 = \max(\|\hat{F}\|) \quad (15)$$

$$\sigma_m = \min(\|\hat{F}\|) \quad (16)$$

3. 가중치 타원에 의한 임팩트 힘의 근사화

로봇 시스템에 있어 관절의 최대 허용 속도가 각각 다를 때 각 관절의 속도는 이 최대 허용속도로 노말라이즈 되어야 한다[8]. 이와 같이 위 식 (8)에서 최대 순간 각속도의 변화($\Delta \dot{\theta}_{\max}$)가 다음과 같을 때

$$\Delta \dot{\theta}_{\max} = [\Delta \dot{\theta}_{1,\max}, \dots, \Delta \dot{\theta}_{n,\max}] \quad (17)$$

각 관절의 순간 각속도의 변화를 각각의 최대 순간 각속도의 변화로 나누면 다음과 같이 단위 순간 각속도 변화 $\Delta \hat{\theta}$ 로 노말라이즈 할 수 있다.

$$\Delta \hat{\theta} = W^{-1} \Delta \dot{\theta} \quad (18)$$

이때 가중치 매트릭스 W 는 다음과 같이 쓸 수 있고

$$W = \text{diag}[\Delta \dot{\theta}_{1,\max}, \dots, \Delta \dot{\theta}_{n,\max}] \quad (19)$$

식 (18)은 $\Delta \dot{\theta} = W \Delta \hat{\theta}$ 와 같이 쓸 수 있고 이를 식 (8)에 대입하면 단위 순간 각속도 변화에 대한 임팩트 힘은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{F}_w = (W (J J^{-1})^+)^T \Delta \hat{\theta} \quad (20)$$

또한 이때 임팩트 측정은 다음과 같이 정의하고 이를 앞의 정의와 구분하여 가중치 임팩트 measure라 하자.

$$\hat{M}_{di} = \sqrt{\det((W (J J^{-1})^+)^T (W (J J^{-1})^+))} \quad (21)$$

이를 식 (10)과 같은 방법으로 다음과 같이 singlar 값 분해를 할 수 있다.

$$(W (J J^{-1})^+)^T = U_w \Sigma_w V_w^T \quad (22)$$

또한 이때 임팩트 타원은 다음과 같이 정의되고 이를 가중치 임팩트 타원이라 하자.

$$\widehat{F}_w^T (J I^{-1} W^{-2} I^{-1} J^T) \widehat{F}_w \leq 1 \quad (23)$$

이는 식 (20)에서 단위 순간 각속도 변화 $\Delta \widehat{\theta}$ 가 단위 놈 (unit norm)일 때 ($\|\Delta \widehat{\theta}\|^2 = \Delta \widehat{\theta}^T \Delta \widehat{\theta} \leq 1$), 임팩트 힘의 놈(norm) ($\|\widehat{F}_w\|$)을 가중치 임팩트 전달비라 하고 임팩트의 단위 벡터가 u 이면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\|\widehat{F}_w\| = \frac{1}{\sqrt{u^T (J I^{-1} W^{-2} I^{-1} J^T) u}} \quad (24)$$

앞에서 언급된 타원들은 입력 벡터 놈과 출력 벡터 놈의 비에 대한 정보를 주기 때문에 각 입력이 제한 범위로 주어지는 실제 시스템에서의 출력에 대한 정확한 정보를 주지 못한다. 각 입력이 제한 범위로 주어져 있을 때, 출력에 대한 정확한 정보를 주는 것이 폴리토프(polytopes)방법이다. 이 폴리토프에 의한 방법과 매니폴리빌리티 타원을 비교 분석이 Mechiorri에 의해 이루어졌다[13]. 여기서 타원에 의한 방법은 작업기의 속도의 정확한 정보를 주지 못하는데, 특히 작업기의 최대 속도 방향이 서로 다른 것을 보이고 있다. 이 폴리토프를 임팩트 힘에 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있고

$$\widehat{F}_p = [(J I^{-1})^+]^T \Delta \theta \quad (25)$$

$$\|\Delta \theta_i\| \leq \Delta \theta_{i, \max} \quad (26)$$

이때 \widehat{F}_p 는 $[(J I^{-1})^+]^T$ 의 열 벡터와 각 관절의 허용 각속도 변화의 선형 조합이고, 원점에서 폴리토프까지의 거리를 임팩트 전달비($\|\widehat{F}_p\|$)라 하자.

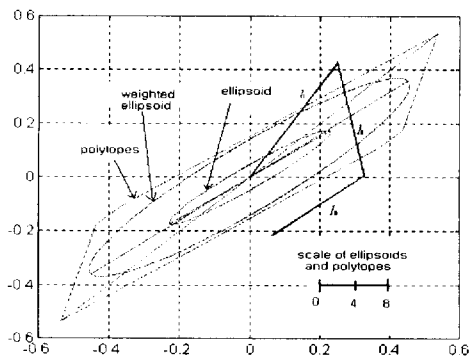


그림 1. 임팩트 타원들과 폴리토프
Fig. 1. Impact ellipsoids and polytopes

그러면 임팩트 타원들과 임팩트 폴리토프를 비교하기 위해 작업 공간이 평면인 3축 로봇에 적용하여 본다. 로봇의 각 관절의 길이가 $l_1 = 0.50m$, $l_2 = 0.433m$, $l_3 = 0.35m$ 이고, 질량 $m_1 = 30Kg$, $m_2 = 25Kg$, $m_3 = 20Kg$ 일 때 그림 1은 관절

각이 $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = -140^\circ$, $\theta_3 = -60^\circ$ 일 때 임팩트 타원, 가중치 임팩트 타원, 임팩트 폴리토프를 보여주고 있다. 그림 1에서 보듯이 가중치 임팩트 타원에 의해 구해진 최대 임팩트 전달비는 폴리토프에 의해 구해진 최대 임팩트 전달비 방향과 크기가 임팩트 타원의 것 보다 더 근사한 것을 알 수 있다.

4. 불분명한 환경에서 임팩트 힘의 최소화

대상 물체의 위치와 형태를 미리 알고 작업을 할 경우 임팩트의 방향 u 를 미리 정하고, 이때 임팩트 전달비를 작게 하면 된다. 그러나 대상 물체 위치와 형태를 정확히 파악하기 힘든 원격 조작 로봇의 경우에는 로봇의 작업기와 대상 물체와 접촉하는 방향을 정확히 알기가 힘들므로 임팩트의 방향 u 를 정하고 임팩트 전달비를 작게 하는 방법을 쓸 수 없다. 이러한 경우에는 최대 임팩트 전달비를 최소화하면 된다. 이는 임팩트 타원일 때는 $\max(\|\widehat{F}\|)$, 가중치 임팩트 타원일 때는 $\max(\|\widehat{F}_w\|)$ 을 최소화하면 된다. 각 관절의 각속도 변화가 제한되어 있는 실제 시스템의 경우에는 폴리토프 임팩트에 있어서 가장 먼 꼭지점까지의 거리 즉 $\max(\|\widehat{F}_p\|)$ 를 최소화하면 된다. 그러나 이는 3차원 이상에서 구현하는 것이 쉽지 않다[23]. 따라서 폴리토프 임팩트 타원에 더 근사한 가중치 임팩트 타원을 적용하여 임팩트를 최소화할 수 있다.

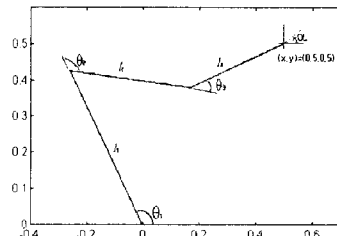


그림2. 평면 3 자유도 로봇
Fig. 2. Planar 3-degree-of-freedom robot

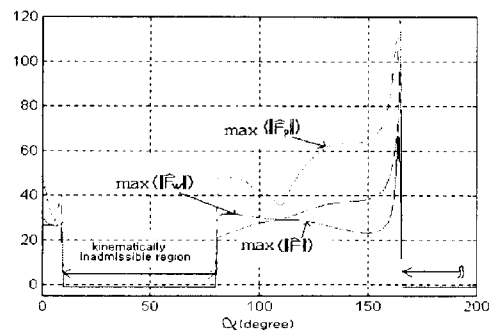


그림 3. 방향 벡터에 따른 최대 임팩트 전달비들
Fig. 3. Maximum impact transmission ratios along different orientation angle

그림 2에서 로봇의 작업기의 방향각 (α)을 회전시키면서 내부 운동(self-motion)을 할 때, 최대 임팩트 전달비들의 변화는 그림 3과 같다. 이때 최대 가중치 임팩트 전달비의

크기의 변화는 최대 폴리토프 임팩트 전달비의 크기의 변화를 잘 따르고 있다. 반면, 최대 임팩트 전달비는 최대 폴리토프 임팩트 전달비와 극대 극소점을 달리하는 부분이 있다. 따라서 각 관절의 최대 순간 속도 변화가 서로 다를 때, 3장에서 정의된 가중치 임팩트 타원을 이용하여 임팩트를 최소화 할 수 있고 이를 작업공간이 3차원인 로봇에 적용할 수 있다. 3장에서 언급된 로봇이 각 관절의 범위가 $\|\theta_1\| \leq 180^\circ$, $-120^\circ \leq \theta_2 \leq 0$, $\|\theta_3\| \leq 160^\circ$ 이고 각 관절의 순간 속도 변화의 허용범위가 $\|\Delta \theta_1\| \leq 1 \text{ rad/s}$, $\|\Delta \theta_2\| \leq 2 \text{ rad/s}$, $\|\Delta \theta_3\| \leq 3 \text{ rad/s}$ 일 때, 앞에서 언급된 세 방법에 의해 임팩트를 최소화한 자세들과 이에 해당하는 임팩트 폴리토프는 그림 4와 같다. 그림 4에서 보듯이 가중치 임팩트 타원을 이용한 최적 자세는 임팩트 폴리토프를 이용한 최적 자세와 거의 비슷하고 임팩트 타원을 이용한 최적 자세 때의 최대 폴리토프 임팩트 전달비가 작은 것을 알 수 있다.

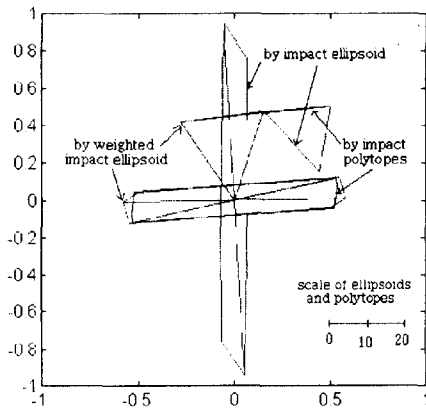


그림 4. 최대 임팩트의 최소화 추의 폴리토프
Fig. 4. Resultant polytopes after Minimization of maximum impact

5. 결론

로봇이 외부 환경과 접촉 및 충돌할 때 순간 속도 변화로 발생하는 임팩트를 최소화하는 문제를 임팩트 타원으로 해결하는 방법을 다루었다. 임팩트 최소화를 각 관절의 허용 각속도 변화가 각각 다른 것을 고려하지 않은 임팩트 타원, 각 관절 최대 허용 각속도 변화로 노말라니즈시켜 만든 가중치 임팩트 타원, 직접적인 폴리토프 방법 등을 이용하여 비교하였다. 결과적으로 기존의 임팩트 타원을 사용하면 최적 방향에 오류가 생길 수 있음을 확인하였다.

본 논문에서 제안한 방법은 2차원 작업 공간에서의 작업 등에 대해 예제를 적용하여 유용성을 보였으나 3차원 상에서 작업을 하는 로봇에 적용할 때는 개선의 여지가 남아있다. 또 추후에 다중 로봇 시스템에도 적용할 수 있도록 연구 결과를 확장할 계획이다.

- [1] Y. Wang and T. Mason, "Modelling impact dynamics for robotic operations," in *Proc. 1987 IEEE conf. Robotics Automat.*, Raleigh, NC, 1987, pp. 678-685.
- [2] Y. F. Zheng and H. Hemami, "Mathematical modeling of a robot collision with its environment," *J. Robotic Syst.*, vol. no. 3, pp. 289-307, 1985.
- [3] I.D. Walker, "The Use of Kinematic Redundancy in Reducing Impact and Contact Effects in Manipulation," in *Proc. 1990 IEEE Conf. Robotics Automat.*, pp. 434-439, Cincinnati, OH, 1991.
- [4] I. D. Walker, "Impact Configurations and Measures for Kinematically Redundant and Multiple Armed Robot Systems," *IEEE Trans. on Robotics and Automat.*, vol. 10, no. 5, pp. 670-683, 1994.
- [5] B. T. Barcio and I. D. Walker, "Impact Ellipsoid and Measures for Robot Manipulators," in *Proc. 1994 IEEE conf. Robotics Automat.*, pp. 1588-1594, 1994.
- [6] H. Asada, "A Geometric Representation of Manipulator Dynamics and its Application to Arm Design," *ASME J. of Dynamic Syst., Measurement, and Contr.*, vol. 105, pp. 131-142, 1983.
- [7] T. Yoshikawa, "Dynamic Manipulability of Robot Manipulators," *J. Robotics Syst.*, vol. 2, no. 1, pp. 113-124, 1985.
- [8] T. Yoshikawa, "Manipulability of Robotic Mechanisms", *The Int. J. of Robotics Res.*, vol. 4, no 2., pp. 3-9, 1985.
- [9] S. Chiu, "Task Compatibility of Manipulator Postures," *Int. Jour. Robotics Research.* vol. 7, no 5, pp. 13-21, 1988.
- [10] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," *Robotics Research The first international symposium.* The Mit press, pp.735-747, 1984.
- [11] Y. Nakamura, *Advanced Robotics. Redundancy and Optimization*, Addison Wesley, 1991.
- [12] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciacivco, and B. Siciliano, "Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple Armed Systems," *IEEE Trans. on Robotics and Automat.*, vol. 7, no 5., pp. 678-685, 1991.
- [13] C. Melchiorri, "Comment on 'Global Task Space Manipulability Ellipsoids for Multiple Armed Systems' and further considerations," *IEEE Trans. on Robotics and Automat.*, vol. 9, no 2., pp. 232-235, 1993.
- [14] J. K. Mills and D. M. Lokhorst, "Stability and Control of Robotic Manipulators During Contact/Noncontact Task Transition," *IEEE Trans. on Robotics and Automat.*, vol. 9, no. 3, pp. 335-345, 1993.
- [15] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, 1995.