

## 이산시간 $H_\infty$ 2-자유도 제어기의 구조에 관한 연구

# On the Structure of a Discrete-Time $H_\infty$ Two-Degrees-of-Freedom Controller

최 병 옥

생산기술연구원 생산시스템개발센터 (Tel: 8509-159; Fax: 8509-244;  
Email: bwchoi@intech.kaitech.re.kr)

**Abstract:** Explicit state-space formulae for an  $H_\infty$  based two-degrees-of-freedom robust controller are derived in discrete-time. The controller provides robust stability against coprime factor uncertainty, and a degree of robust performance in the sense of making the closed-loop system match a prespecified reference model. It is shown that the controller consists of a plant observer, the chosen reference model, and a generalized state feedback law associated with the plant and model states. The controller structure is shown to be relatively simple and thus may reduce the computational load on the digital control processor.

**Key Words:** Discrete-time,  $H_\infty$  two-degrees-of-freedom controller, Model-matching, Robust stability

### 1. 서론

다변수 시스템의 강인제어기 설계를 위해 그간 많은 연구가 있어 왔으며, 그 결과  $H_\infty$  제어기법과 같은 새로운 방법이 등장하였고 상업적 소프트웨어 패키지도 나와 있다[1,2]. 동 방법은 원칙적으로 다변수 시스템을 다룰 수 있고 불확실성에 대해서 어느 정도의 강인성을 보장한다는 점에서 복잡하고 다변수인 시스템에 적합하다.

그럼에도, 동 제어기의 차수가 일반적으로 높고 제어기의 구조가 명확하지 않다는 점 때문에 산업계로의 응용에 제한적이었다고 할 수 있으며, 산업계의 기술자들에게는 구현하기에 너무 복잡하다는 인식도 적지 않게 존재하고 있다. 따라서, 제어기의 구조를 분명하고 가능한 한 간단하게 할 수 있는 방법이 모색될 필요가 있다.

본 논문에서는 시스템이 기준모델에 잘 추종할 수 있도록 고안된  $H_\infty$  2 자유도 제어기 설계기법[3]을 이산시간에서 다룬다. 또한, 이산시간  $H_\infty$  2-자유도 제어기의 합성법을 제시하며, 동 제어기가 플랜트의 상태관측기와 플랜트 및 기준모델의 상태케환으로 cascade된 구조를 갖고 있음을 보인다.

### 2. 이산시간 $H_\infty$ 제어기 설계

#### 2-1 정규화소인수 표현법과 불확실 모델

전달함수  $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$  의 좌변소인수분해(left coprime factorization)를 이루는 쌍  $(\tilde{M}, \tilde{N})$  이

$$\tilde{M} \tilde{M}^* + \tilde{N} \tilde{N}^* = I \quad (1)$$

을 만족할 때, 소인수분해가 정규화(normalized)되었다고 말하며, 여기서  $\tilde{M}^*(z) = \tilde{M}^T(z^{-1})$  이다. 정규화좌변소인수분해의 상태공간표현은 아래와 같이 구할 수 있다[5]. 즉,

$$[\tilde{N} \quad \tilde{M}] = \left[ \begin{array}{c|c} A + HC & B + HD \quad H \\ \hline Z_2 C & Z_2 D \quad Z_2 \end{array} \right] \quad (2)$$

이며, 여기서  $Z_2$  는  $Z_2^T Z_2 = (R_2 + CPC^T)^{-1}$  을 만족하고,  $P = P^T$  는 다음의 대수리카티방정식의 안정화해(stabilizing solution)이다.

$$BR_1^{-1}B^T - P + \Phi P \Phi^T - \Phi PC^T(R_2 + CPC^T)^{-1}CP \Phi^T = 0 \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv A - BR_1^{-1}D^T C \\ H &\equiv -(APC^T + BD^T)(R_2 + CPC^T)^{-1} \\ R_1 &\equiv I + D^T D \\ R_2 &\equiv I + DD^T \end{aligned}$$

이다.

플랜트의 섭동이나 불확실성은 식 (4)와 같이 플랜트의 정규화소인수들의 섭동으로 나타낼 수 있으며 ([그림 1] 참조),

$$G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N) \quad (4)$$

여기서  $\Delta_M, \Delta_N$  은 플랜트 모델  $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$  에 존재하는 불확실성을 나타내는 미지의 안정한 전달함수이다.

## 2-2 강인안정도 최대화

플랜트  $G$ 에 케환제어기  $K$ 를 단 페루우프시스템의 강인안정도(robust stability)를 최대로 하기 위해서는 공칭플랜트  $\bar{G}$ 를 안정화시키고 다음과 같은  $\infty$ -노움을

$$\gamma = \left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \bar{M}^{-1} \right\|_{\infty} \quad (5)$$

을 최소화시키는  $K$ 를 찾아야 한다. 섭동된 페루우프시스템은

$$\| \Delta_M \quad \Delta_N \|_{\infty} < \gamma^{-1} \quad (6)$$

의 범주 내에 들어가는  $\Delta_M, \Delta_N$ 에 대해서는 안정을 유지한다. 식 (5)의 최소 값을 구하는 수식, 그에 해당하는 최적제어기 및 준최적제어기의 상태공간식 등이 이미 도출되어 있다[5].

## 2-3 이산시간 $H_{\infty}$ 2-자유도 제어기 설계

그림 1은  $H_{\infty}$  2-자유도 제어기설계를 위한 다이어그램이다 [3].

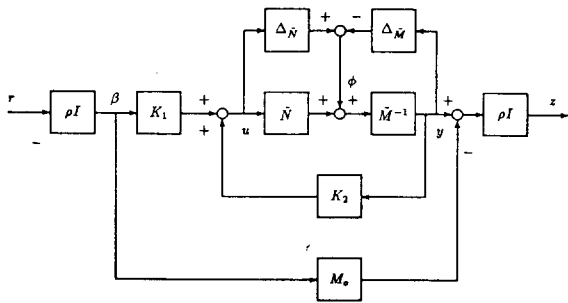


그림 1.  $H_{\infty}$  2-자유도 제어기 설계기법의 다이어그램

Fig. 1.  $H_{\infty}$  Two-degrees-of freedom Configuration

[그림 1]에서  $K_1$ 은 pre-filter,  $K_2$ 는 케환제어기, 그리고  $M_0$ 는 기준모델이다. 동 다이어그램을 표준화된  $H_{\infty}$  최적화 frame[그림 2]에 맞추면, 모든 외부입력벡터  $u$ 는  $[r \ \phi]^T$ 에 해당하고, 최소화할 신호들의 벡터  $e$ 는  $[u \ y \ z]^T$ 에 해당한다.  $u$ 는 제어입력이고,  $q$ 는 측정변수들의 벡터로서  $[\beta \ y]^T$ 에 해당한다.

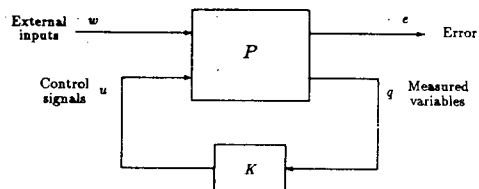


그림 2. 표준화  $H_{\infty}$  최적화 frame

Fig. 2. Standard  $H_{\infty}$  Optimization Framework

플랜트  $G(z)$ 와 기준모델  $M_0(z)$ 의 상태공간행렬이 각각  $G \equiv [A, B, C, 0]$ ,  $M_0 \equiv [A_0, B_0, C_0, D_0]$ 라고 할 때, 일반화 플랜트  $P(z)$ 의 상태공간행렬은 아래와 같이 얻어진다.

$$P = \begin{bmatrix} \bar{A} & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc|c} \hline \bar{A} & B_1 & B_2 & & \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} & & \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & & \\ \hline A & 0 & 0 & -HZ_2^{-1} & B \\ 0 & A_0 & B_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ C & 0 & 0 & Z_2^{-1} & 0 \\ \rho C & -\rho^2 C_0 & -\rho^2 D_0 & \rho Z_2^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho I & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & Z_2^{-1} & 0 \\ \hline \end{array} \quad (7)$$

여기서  $P$ 의 상태벡터  $x$ 는  $[x_G \ x_0]^T$ 으로 분할이 가능하며,  $x_G$ 는 플랜트의 상태변수,  $x_0$ 는 기준모델의 상태변수를 나타낸다.

## 3. 이산시간 $H_{\infty}$ 2-자유도 제어기의 합성 및 제어기의 구조 분석

본 장에서는 식 (7)의 일반화 플랜트를 내부적으로 안정화시키고 페루우프전달함수 ( $T_{ew} : [r \ \phi]^T \rightarrow [u \ y \ z]^T$ )의  $\infty$  노움을 달성하는 이산시간  $H_{\infty}$  2-자유도 제어기의 상태공간에서의 합성법을 도출하고 동 제어기의 구조를 분석한다. 그에 앞서 FI Control과 DF Problem의 관련 결과를 정리한다.

### 3-1. $H_{\infty}$ Full Information (FI) Control

모든 정보가 가능한 경우(full information)의 제어구조가 [그림 3]에 나타나 있다. 여기서, 제어기  $K$ 는 일반화 플랜트  $F$ 의 현재 상태변수  $x$ 와 현재의 외란입력  $u$ 에 관한 정보를 모두 알고 있다고 가정한다.

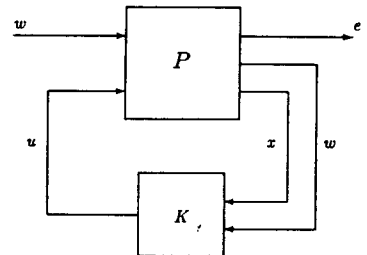


그림 3. 모든 정보가 가능한 경우의 제어구조

Fig. 3. Full Information Control Structure

일반화 플랜트 P를

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}X_k + B_1w_k + B_2u_k \\ e_k &= C_1x_k + D_{11}w_k + D_{12}u_k \end{aligned} \quad (8)$$

의 식으로 표현한다. FI Control은 외란  $w$ 와 제어입력  $u$ 와의 게임으로 간주할 수 있다[2]. 식 (8)의 시스템에 대해 비용함수를 아래와 같이 정하고(여기서  $P_N$ 은 terminal state weighting).

$$V = \sum_{k=0}^{N-1} (e_k^T e_k - \gamma^2 w_k^T w_k) + x_N^T P_N x_N \quad (9)$$

Lagrange multipliers를 사용하여 비용을 최소화하는 조건을 구한다[5]. 이로부터 다음의 이산시간대수리카티방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} X_\infty &= \bar{A}^T X_\infty \bar{A} + \bar{C}^T J \bar{C} \\ &\quad - F^T (\bar{D}^T J \bar{D} + \bar{B}^T X_\infty \bar{B}) F \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\left[ \begin{array}{c|cc} \bar{A} & B_1 & B_2 \\ \hline \bar{C} & D_{11} & D_{12} \\ \hline & I & 0 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{c|cc} \bar{A} & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ \hline & I & 0 \end{array} \right], \quad J \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

$$F \equiv (\bar{D}^T J \bar{D} + \bar{B}^T X_\infty \bar{B})^{-1} (\bar{D}^T J \bar{C} + \bar{B}^T X_\infty \bar{A})$$

이며, 플랜트를 내부적으로 안정시키면서  $\|T_{ew}\|_\infty < \gamma$ 를 보장하는 FI 제어출력신호는

$$u_k = -W_{12}^{-1} L_1 x_k - W_{12}^{-1} W_{11} w_k \quad (11)$$

로 주어진다[5]. 여기서  $W_{12}$ 는 Cholesky factorization

$$W_{12}^T W_{12} = D_{12}^T D_{12} + B_2^T X_\infty B_2$$

의 해이며,

$$\begin{aligned} W_{11} &\equiv W_{12}^{-1} (D_{12}^T D_{11} + B_2^T X_\infty B_1) \\ L_1 &\equiv W_{12}^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X_\infty \bar{A}) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 식 (11)의 FI 제어신호는 상수이득이다.

### 3-2. The Disturbance Feedforward (DF) Problem

앞 절의 FI Control을 구현하려면 상태변수  $x$ 와 외란입력변수  $w$ 를 전부 측정할 수 있어야 한다. 그러나, 측정이 가능하지 않을 경우에는 그 추정치  $\hat{x}$ ,  $\hat{w}$ 를 각각 산출하여 식 (11)에 대입할 수 있어야 한다. 만일 행렬  $D_{21}$ 이 정방형이면(식 (7)의 경우처럼), 측정방정식  $q = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$ 은 역변환이 가능하고, 따라서 외란입력  $w$ 의 추정치는  $u, q$  그리고  $x$ 의 추정치로부터 구할 수 있다.

식 (7)에서  $D_{22} = 0$  이므로, 측정방정식은

$$q = C_2 x + D_{21} w \quad (12)$$

이 된다. 상태추정치  $\hat{x}$ 를 구하기 위해 다음 식을 갖는다

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{A} \hat{x}_k + B_1 \hat{w}_k + B_2 u_k \quad (13)$$

관측기(observer)를 설계해야 하며, 여기서 외란추정치  $\hat{w}$ 는 식

(12)를 이용하여

$$\hat{w}_k = D_{21}^{-1} (q_k - C_2 \hat{x}_k) \quad (14)$$

으로 구해진다. 식 (12)와 (14)로부터 외란추정치 오차는

$$\hat{w} - w = D_{21}^{-1} C_2 (x - \hat{x}) \quad (15)$$

임을 알 수 있다. 또한 식 (13)에서

$$x_{k+1} = \bar{A} x_k + B_1 w_k + B_2 u_k \quad (16)$$

을 뺀 후 식 (15)를 대입하여

$$\hat{x}_{k+1} - x_{k+1} = (\bar{A} - B_1 D_{21}^{-1} C_2) (\hat{x}_k - x_k) \quad (17)$$

을 얻는다. 그런데, 식 (7)로부터

$$\bar{A} - B_1 D_{21}^{-1} C_2 = \begin{bmatrix} A + HC & 0 \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \quad (18)$$

임을 알 수 있고  $A + HC$ 와  $A_o$ 가 각각 안정하므로 상태추정치 오차의 dynamics도 안정하며, 따라서 추정치 오차가 영으로 접근해 갈 것이다. 그러므로, 우리는 관측기를 FI 제어출력장치와 함께 사용할 수 있다. 이 경우, 관측자는 측정변수  $q$ 로부터 상태추정치와 외란정보를 제공하는 셈이다. 즉, 관측기의 상태방정식을 다음과 같이 정리하여 쓸 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1} = (\bar{A} - B_1 D_{21}^{-1} C_2) \hat{x}_k + B_1 D_{21}^{-1} q_k + B_2 u_k \quad (19)$$

이제 FI 제어출력식 (11)의  $x, w$  대신 여기서 구한  $\hat{x}, \hat{w}$ 의 값으로 대치하여

$$u_k = -W_{12}^{-1} L_1 \hat{x}_k - W_{12}^{-1} W_{11} \hat{w}_k \quad (20)$$

와 같은 제어출력신호를 얻는다.

[그림 4]는 FI 제어출력장치와 관측기로 분리 구성된 제어기의 전체구조를 나타낸다.

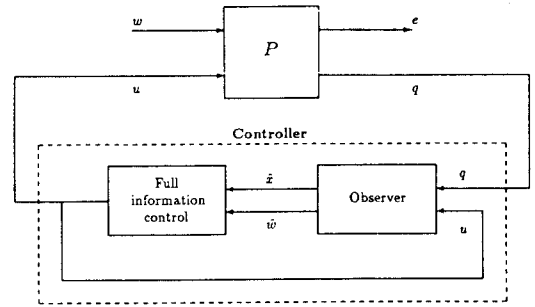


그림 4. 2 자유도 제어기의 분리구조  
Fig. 4. Controller Separation Structure

### 3.3. 제어기의 합성 및 구조 분석

본 절에서는 앞서 검토한 FI Control과 DF Problem의 특성을 합성하여 이산시간  $H_\infty$  2-자유도 시스템의 준최적제어기를 상태공간에서 구하고 동 제어기의 구조를 분석한다.

식 (7)로부터  $D_{12}^T D_{11} = 0, D_{12}^T C_1 = 0, D_{12}^T D_{12} = I$  임을 이용하여 정리하면, 제어출력신호는

$$\begin{aligned} u_k &= -W_{12}^{-1} L_1 \hat{x}_k - W_{12}^{-1} W_{11} \hat{w}_k \\ &= C_k \hat{x}_k + D_k q_k \end{aligned} \quad (21)$$

이 되고, 여기서

$$C_k \equiv -(I + B_2^T X_\infty B_2)^{-1} B_2^T X_\infty (\bar{A} - B_1 D_{21}^{-1} C_2)$$

$$D_k \equiv -(I + B_2^T X_\infty B_2)^{-1} B_2^T X_\infty B_1 D_{21}^{-1}$$

이다. 식 (21)을 (19)에 대입하여 다시 쓰면, 관측기의 상태방정식은

$$\hat{x}_{k+1} = A_k \hat{x}_k + B_k q_k \quad (22)$$

이 되고, 여기서

$$A_k \equiv \bar{A} - B_1 D_{21}^{-1} C_2 + B_2 C_k$$

$$B_k \equiv B_1 D_{21}^{-1} + B_2 D_k$$

이다.

리카티방정식 (10)의 해  $X_\infty$ 를  $\bar{A} \equiv \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_o \end{bmatrix}$ 에 대응하여

$X_\infty \equiv \begin{bmatrix} X_{\infty 11} & X_{\infty 12} \\ X_{\infty 21} & X_{\infty 22} \end{bmatrix}$ 으로 분할한 후,  $C_k, D_k$ 를 각각

$$C_k = [C_{k11} \quad C_{k12}] \text{와 } D_k = [D_{k11} \quad D_{k12}] \text{으로 분할}$$

정리한다. 마찬가지로 관측기의 상태벡터도 플랜트의 상태추정치

$\hat{x}_G$ 와 기준모델의 상태변수  $x_o$ 으로 분할하고, 측정치  $q$  대신  $[\rho r y]^T$ 를 사용하여 식 (22), (21)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다. 즉, 관측기의 상태방정식은

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{G_{k+1}} \\ x_{o_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + HC + BC_{k11} & BC_{k12} \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{G_k} \\ x_{o_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho BD_{k11} & -H + BD_{k12} \\ B_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 되고, 제어출력방정식은

$$u_k = [C_{k11} \quad C_{k12}] \begin{bmatrix} \hat{x}_{G_k} \\ x_{o_k} \end{bmatrix} + [\rho D_{k11} \quad D_{k12}] \begin{bmatrix} r_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad (24)$$

이 된다.

식 (23)은 다시 (25)와 같이 쓸 수 있으므로 제어기의 구조를

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{G_{k+1}} \\ x_{o_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + HC & 0 \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{G_k} \\ x_{o_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -H & 0 \\ 0 & 0 & B_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \\ r_k \end{bmatrix} \quad (25)$$

더욱 명확히 알 수 있다. 동 제어기는 관측기를 가지며, 플랜트의 상태추정치를 제공한다( $H$ 는 관측기의 이득). 동 관측기는 플랜트의 입,출력  $u_k, y_k$ 를 받아 작동한다. 한편, 기준모델의 상태변수  $x_o$ 는 기준입력  $r$ 에 의해서 쉽게 update된다. 일반화 플랜트의 상태변수  $[x_G \quad x_o]^T$  중에서  $x_o$ 는 추정이 필요하지 않으므로 관측기는  $x_G$ 의 추정치만 산출해낸다.

제어출력식 (24)는 플랜트의 상태추정변수  $\hat{x}_G$ 와 기준모델의

상태변수  $x_o$ 를 이용하는 상태궤환형이다.

## 4. 결론

본 논문에서는 시스템이 기준모델에 잘 추종할 수 있도록 고안된  $H_\infty$  2-자유도 제어기 설계기법을 이산시간에서 다루었으며, 제어기의 구조를 분명하고 가능한 한 간단하게 할 수 있는 방법을 모색하여 이산시간  $H_\infty$  2-자유도 제어기의 합성법을 제시하였고, 동 제어기가 플랜트의 상태관측기와 플랜트 및 기준모델의 상태궤환으로 cascade된 구조를 갖고 있음을 보였다.

동 제어기가 비교적 간단한 구조를 가질 수 있도록 합성함으로써 디지털제어에서 컴퓨터의 부담을 경감시킬 수 있는 효과를 기대할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- [1] R.Y. Chiang and M.G. Safonov, *The Robust Control Toolbox for Matlab*, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1992.
- [2] J. Doyle, K. Glover, K. Khargonekar, and B.A. Francis, "State space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.39, No.2, pp.831-847, 1989.
- [3] D.J. Hoyle, R.A. Hyde, and D.J.N. Limebeer, "An  $H_\infty$  Approach to Two Degree of Freedom Design", *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pp.1581-1585, Brighton, UK, 1991.
- [4] D. MacFarlane and K. Glover, *Robust Controller Design using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Vol. 138 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, 1990.
- [5] D.J. Walker, *Robust Control of Discrete Time Systems*, PhD thesis, Imperial College, University of London, 1991.