Proceedings of the 11th KACC, October 1996

이산 최적 H_∞ -제어 문제의 최적해를 구하는 방법에 대한 연구

Study on An Optimum Solution Method for Discrete Optimal H_∞ -Control Problem

하 철 근

울산대학교 항공우주공학과 (Tel: (0522)78-2590; Fax:(0522)77-3522; E-mail:cha@uou.ulsan.ac.kr)

Abstracts: In this paper, a solution method is proposed to calculate the optimum solution to discrete optimal H_∞ -control problem for feedback of linear time-invariant system states and disturbance variable. From the results of this study, condition of existence and uniqueness of its solution is that transfer matrix of controlled variable to input variable is left invertible and has no invariant zeros on the unit circle of the z-domain as well as extra geometric conditions given in this paper. Through a numerical example, the noniterative solution method proposed in this paper is illustrated.

Keywords: discrete optimal H_∞-control, infimum solution (γ_d^*), noniterative method, invariant zero

기 호 설 명

$Im\{\cdot\}$	image space	$\rho\{\cdot\}$	rank of matrix
$Re[\cdot]$	real part of complex value	$\{\Phi\}$	empty set
inf	infimum	Ω	complex domain in discrete system
sup	supermum	$\bar{\sigma}$	maximum singlar value
$\lambda\{\cdot\}$	eigenvalue	$\oplus$	direct sum in geomatric space
λ_{max}	maximum eigenvalue	$\|\cdot\|_\infty$	infinity norm
$\cup$	union in topology.	$\lvert\cdot\rvert$	absolute value

1. 서 론

Zames[1]에 의해 제기된 H_∞-제어문제는 지난 10여년 동안 많은 연구자들의 관심을 끌어왔다. 최적 H_∞-제어문제를 상태공간을 이용한 시간영역에서 그 문제를 해결 하는 방법이 최근에 제시되었다. Algebraic Riccati Equation (ARE) 접근법에 의한 최적 H_∞-제어문제는 반복 계산법(iterative method)에 의존하게 된다. 바꾸어 말하면 그 주어진 제어 매개변수를 점진적으로 작게 함으로써 폐회로 시스템의 외란에 대한 제어변수의 H_∞-norm이 최소값(infimum)에 이르게 된다. 최근에는 연속 시간 시스템에 대하여 H_∞-제어문제의 최적해를 비반복 계산법(noniterative method)으로 구하는 방법이 제시되었다. 한편 이산 H_∞-제어문제에 대한 연구도 비교적 활발히 이루어져 왔다[2]. 이산 H_∞-제어문제에 대한 대부분의 연구는 문제를 상태공간에서 정의하고 해의 존재조건을 대수적 Discrete Riccati Equation (DARE)에 의존하였다. 그러나 ARE와는 달리 DARE의 해는 수치적으로 반복계산법에 의존해야 하며 그 해의 존재는 보장되지 못한다. 그래서 이산 최적 H_∞-제어문제에 대한 연구는 비교적 많이 이루어지지 못하였다.

본 논문에서는 "Full Infirmation Feedback"(FIF)에 대한 이산 최적 H_∞-제어문제를 비반복 계산법으로 해결할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 문제 정의

일반적으로 선형 이산 시불변 시스템은 다음과 같은 상태방정식으로 나타낸다.

$$\Sigma_d:\begin{cases} x_{k+1}=Ax_k+Bu_k+Ew_k \\ z_k=Cx_k+D_1u_k+D_2w_k \\ y_k=Hx_k+L_1u_k+L_2w_k \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

여기서 x_k, u_k와 y_k는 각각 n, m 과 p차원의 상태변수, 입력변수 그리고 출력변수이다. 그리고 z_k와 w_k는 각각 차원 q, l인 제어변수와 외란변수이다. 그리고 {A,B}는 stabilizability 행렬 쌍이며 {A,H}는 detectability 행렬 쌍이다. 그리고 $[B^T\ D_1^T]^T$와 $[H\ L_2]$는 maximal rank를 갖는다고 하자. 그리고 식(1)에서 입력(u_k)에 제어출력(z_k)의 subsystem은 간단히 $\Sigma_{zF}=\{A,B,C,D_1\}$로 정의한다. 한편 식(1)의 이산 시스템을 안정화하기 위한 이산 시불변 제어기를 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Sigma_{dc}:\begin{cases} x_{k+1}=A_cx_k^c+B_cy_k \\ u_k=C_cx_k^c+D_cy_k \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

여기서 x_k^c는 r 차원의 제어기 변수벡타이며 상수 행렬들은 적절한 차원과 임의의 구조를 가진다. 한편 이산시스템의 internal stability는 다음과 같이 정의한다.

정의 1 : 이산시스템 Σ_d의 입력의 출력에 대한 행렬 $L_1=0$라 하자. 다음과 같이 정의되는 행렬 A_{dcl}이 이산영역에서

asympotopic stability을 갖는 경우를 폐회로 시스템 Σ_d이 internal stbility를 갖는다고 한다.

$$A_{dcl} = \begin{bmatrix} A+BD_cH & BC_c \\ B_cH & A_c \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (3)$$

일반적으로 H_∞-norm은 주파수 영역에서 정의되는 시스템에 대한 하나의 "measure"이다. 만일 이산 폐회로 시스템의 전달함수를 $G_d(z)$ 라 하면 그 norm은 아래와 같이 정의된다.

정의 2 : $\|G_d\|_\infty := sup_{w\in[0,2\pi]}\bar{\sigma}\{G_d(e^{jw})\}$

따라서 이 norm의 최소값(infimum) γ_d^*의 정의는 다음과 같다.

정의 3 : $\gamma_d^* := inf\{\|G_d\|_\infty : |\lambda(A_{dcl})| < 1\}$

본 연구에서는 상태변수 x_k와 외란변수 w_k가 모두 측정가능하여 되먹임되는 경우인 Full Information Feedback을 갖는 이산시스템의 최적 H_∞-norm을 찾는 이산 최적 '$H_\infty-FIF$' 문제를 다루고자 한다. 이 경우 이산 시스템은 다음과 같이 간략히 할 수 있다.

$$\Sigma_z : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k+Bu_k+Ew_k \\ y_k = [I_n \;\; 0]^Tx_k+[0 \;\; I_l]^Tw_k \\ z_k = Cx_k+D_1u_k+D_2w_k \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

그리고 subsystem $\Sigma_{zF} := \{A,B,C,D_1\}$은 eigenvalue -1를 갖지 않는다고 하자. 한편 이산 $H_\infty-FIF$ 문제에 대한 시불변 제어기는 다음과 정의한다.

$$\Sigma_{zC} : u_k = [F_1 \;\; F_2]\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} := Fy_k \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

3. 이산 시스템의 변환

우선 다음과 같은 변환을 정의한다.[3]

$$\delta := \frac{z-1}{z+1}$$

이산시스템 Σ_z을 "δ-operator"로 변환하여 상태방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\Sigma_w : \begin{cases} \delta\tilde{x} = A_w\tilde{x}+B_wu+E_ww \\ \tilde{y} = [I_n \;\; 0]^T\tilde{x}+[0 \;\; I_l]^Tu \\ z = C_w\tilde{x}+D_{w1}u_k+D_{w2}w \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

여기서 관련된 행렬들은 다음과 같다.

$A_w := (A+I_n)^{-1}(A-I_n)$, $\quad B_w := 2(A+I_n)^{-2}B$

$E_w := 2(A+I_n)^{-2}E$ $\quad D_{w1} := D_1 - C(A+I_n)^{-1}B$

$D_{w2} := D_2 - C(A+I_n)^{-1}E$ $\quad C_w := C$

그리고 변환시스템 Σ_w의 출력변수 벡터 $\tilde{y}$는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{y} := \begin{bmatrix} I_n & -(A+I_n)^{-1}E \\ 0 & I_l \end{bmatrix}\left\{y - \begin{bmatrix} -(A+I_n)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix}u\right\}$$

그리고 이산 제어기 Σ_{zC}는 δ-operator에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$\Sigma_{wC} : u = [F_{1\delta} \;\; F_{2\delta}]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} := F_\delta\tilde{y} \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

한편 변환시스템 Σ_w의 성질은 다음과 같다.

성질 3-1 : internal stability를 갖는 변환 시스템 Σ_w은 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$Re[\lambda\{A_w + B_{w1}F_{1\delta}\}] < 0$$

성질 3-2 : 변환 시스템 Σ_w이 internal stability를 갖는 것은 이산 시스템 Σ_z이 aymptotic stability를 갖는 것과 같다.

다음은 Special Coordinate Basis(SCB)에 의한 structual algorithm[4]을 이용하여 시스템 $\Sigma_{wF} := \{A_w, B_w, C_w, D_{w1}\}$에 적용한다. 그러면 아래와 같은 nonsingular 변환 행렬 Γ_s, Γ_o, Γ_i을 통하여 시스템 Σ_{wF}을 나타내면 아래와 같다.

$$\tilde{x} := \Gamma_s[x_a^{-T} \;\; x_a^{+T} \;\; x_b^T \;\; x_\delta^T \;\; x_c^T]^T$$
$$[z_o^T \;\; z_1^T]^T := \Gamma_o[z_o^T \;\; z_b^T \;\; z_\delta^T]^T$$
$$[v_o^T \;\; v_1^T]^T := \Gamma_i[u_o^T \;\; u_c^T \;\; u_\delta^T]^T$$

그리고

$$\Gamma_s^{-1}\{A_w - B_o^*C_o^*\}\Gamma_s = \begin{bmatrix} A_a^- & 0 & L_{ab}^-C_b & L_{a\delta}^-C_\delta & 0 \\ 0 & A_a^+ & L_{ab}^+C_b & L_{a\delta}^+C_\delta & 0 \\ 0 & 0 & A_b^+ & L_{b\delta}^+C_\delta & 0 \\ B_\delta E_{\delta a}^- & B_\delta E_{\delta a}^+ & B_\delta E_{\delta b} & A_\delta & B_\delta E_{\delta c} \\ B_\delta E_{ca}^- & B_\delta E_{ca}^+ & B_\delta E_{cb} & L_{c\delta}C_\delta^- & A_c \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_s^{-1}[B_o^* \;\; B_1^*]\Gamma_i = \begin{bmatrix} B_{oa}^- & 0 & 0 \\ B_{oa}^+ & 0 & 0 \\ B_{ob} & 0 & 0 \\ B_{o\delta}^- & 0 & B_\delta \\ B_{oc}^- & B_c & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Gamma_i = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_s^{-1}[C_o^{*T} \;\; C_1^{*T}]^T\Gamma_s = \begin{bmatrix} C_{oa}^- & C_{oa}^+ & C_{ob} & C_{o\delta} & C_{oc} \\ 0 & 0 & C_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_\delta & 0 \end{bmatrix}$$

또한 $C_\delta := [0 \;\; I_{m\delta}]$이며 $\Gamma_o := \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \Gamma_{or} \end{bmatrix}$이다. 그리고 만일 $\rho\{A_a^-\} = n_a^-$와 $\rho\{A_a^+\} = n_a^+$라면 $n_b := n_a^- + n_a^+$이다. 이와 같은 결과로 알 수 있는 것은 시스템 Σ_{wF}의 SCB 변환에서 $x_b = \{\emptyset\}$이면 이산 시스템 $\Sigma_{zF} := \{A,B,C,D_1\}$은 right inverse 시스템을 갖는다. 그리고 $x_c = \{\emptyset\}$이면 이산 시스템 Σ_{zF}은 left inverse 를 갖는다. 따라서 inverse system을 갖는 이산 시스템 Σ_{zF}은 $x_b \oplus x_c = \{\emptyset\}$이다. 그리고 시스템 Σ_{wF}이 복소수 $\delta-$영역의 허수축 상에 invariant zero를 갖지 않는다면 이산 시스템 Σ_{zF}이 단위원 위(on the unit circle)에 invariant zero를 갖지 않는다.

이산 시스템 Σ_{zF}의 (almost) invariant subspace 와 시스템 Σ_{wF}의 SCB 변환과의 관계를 살펴보기 위하여 다음과 같이 정의한다.[14]

$$\text{정의 4} : V_\delta(A,B,C,D_1) := \begin{cases} (A+GC)V_\delta \subseteq V_\delta \\ Im\{B+GD_1\} \subseteq V_\delta \\ \lambda\{(A+GC) \mid R^n/V_\delta\} \in \Omega_\delta \;\; \forall G \end{cases}$$

여기서 $\Omega_\delta := \Omega$는 $\delta :=$ "#"를, $\Omega_\delta := \Omega^-$는 $\delta :=$ "-"를,

Ω_δ : $=\Omega^o \cup \Omega^+$는 δ : ="+"를 각각 나타낸다. 그리고 Ω는 복소평면의 전 영역을, Ω^o은 단위원상(on the circle)을, Ω^-은 단위원내를, Ω^+은 단위원밖(outside the circle)을 각각 나타낸다. 따라서 이산 시스템 Σ_{zF}의 subspace는 다음과 같다.

1. $V_\#(A,B,C,D_1)$: $=\{x_c \oplus x_\delta\}$
2. $V_+(A,B,C,D_1)$: $=\{x_a^- \oplus x_c \oplus x_\delta\}$
3. $V_-(A,B,C,D_1)$: $=\{x_a^- \oplus x_c \oplus x_\delta\}$

4. Full-Information Feedback에 대한 이산 H_∞-norm 문제

일반적으로 이산 $H_\infty - FIF$ 문제는 다음과 같다. 이는 $\gamma_d > \gamma_d^*$을 만족하는 어떤 γ_d에 대하여 Full Information Feedback에 대하여 internal stability를 갖는 이산 시스템 Σ_z이 입력 w_k에 대한 출력 z_k의 H_∞-norm을 γ_d보다 작게 하는 문제이다. 이 문제에 대한 해의 존재 조건[2]을 구하기 위하여 다음과 같은 행렬을 정의한다.

$$V(P) : = B^TPB + D_1^TD_1$$
$$R(P) : = \gamma_d^2I - D_2^TD_2 - E^TPE + (E^TPB + D_2^TD_1)V(P)^{-1}(B^TPE + D_1^TD_2) \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

그리고 다음과 같은 $H_\infty - DARE$를 정의한다.

$$P = A^TPA + C^TC - \begin{bmatrix} B^TPA + D_1^TC \\ E^TPA + D_2^TC \end{bmatrix}^T G(P)^{-1}\begin{bmatrix} B^TPA + D_1^TC \\ E^TPA + D_2^TC \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

여기서

$$G(P) : = \begin{bmatrix} D_1^TD_1 & D_1^TD_2 \\ D_2^TD_1 & D_2^TD_2 - \gamma_d^2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ E^T \end{bmatrix} P[B \ \ E] \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

또한 stability 행렬은 다음과 같다.

$$A_{cl} : = A - [B \ \ E]G(P)^{-1}\begin{bmatrix} B^TPA + D_1^TC \\ E^TPA + D_2^TC \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

그리하여 이산 $H_\infty - FIF$ 문제의 해가 존재하기 위해서는 식(9)의 $H_\infty - DARE$를 만족하는 어떤 $P = P_{FI}$에 대하여 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\text{조건} : \begin{cases} P_{FI} \geq 0 \\ V(P_{FI}) > 0 \\ R(P_{FI}) > 0 \\ |\lambda_i\{A_{cl}\}| < 1 \quad \forall i = 1, \cdots, n \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

만일 이 조건을 만족하는 해 P_{FI}가 존재한다면 식(5)의 되먹임 이득은 다음과 같다.

$$\text{이득 행렬} : \begin{cases} F_1 : = -V(P_{FI})^{-1}(B^TP_{FI}A + D_1^TC) \\ F_2 : = -V(P_{FI})^{-1}(B^TP_{FI}A + D_1^TD_2) \end{cases} \cdots (13)$$

여기서 이산 $H_\infty - FIF$ 문제와 관련된 $H_\infty - DARE$는 부정정(indefinite) 비선형 항을 갖기 때문에 반복계산법에 의해 '안정 가능해'를 찾을 수 있으나 그 해의 존재는 보장되지 않는다[2]. 그리하여 다음 장에서는 이산 $H_\infty - FIF$ 문제에 대한 해의 존재조건으로 부터 최적해 γ_d^*를 구하는 과정을 제시하고자 한다.

5. 비반복 계산법에 의한 최적해 γ_d^*의 계산

앞에서 제시한 이산 최적 $H_\infty - FIF$ 문제가 최적해 γ_d^*를 갖기 위해서는 먼저 식(4)의 이산시스템 Σ_z은 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

조건 5-1 : 이산 시스템 Σ_z은 식(5)의 되먹임 Σ_{zC}에 대하여 internal stability를 갖는다.

조건 5-2 : 이산 시스템 Σ_{zF} : $=\{A,B,C,D_1\}$은 left inverse 시스템을 갖고 단위원 상에 invariant zero를 갖지 않는다.

조건 5-3 : $Im\{E\} \subseteq V_+(A,B,C,D_1) + V_-(A,B,C,D_1)$

조건 5-4 : $D_2 = C \ Im\{E\}$

이에 대하여 최적 $H_\infty - FIF$ 문제의 최적해는 다음과 같은 과정으로 구한다.

과정 1 : 이산시스템 Σ_z을 $\mathscr{S}$-operator를 통하여 변환 시스템을 얻는다.

과정 2 : 그 변환 시스템을 SCB 변환하여 아래와 같은 subsystem $\Sigma_\mathscr{S}$을 얻는다.

$$\Sigma_\mathscr{S} : \begin{cases} \mathscr{S}\widehat{x}_\delta = A_{SCB}\widehat{x}_\delta + B_{SCB}u_\delta + E_{SCB}u \\ z_\delta = C_{SCB}\widehat{x}_\delta + B_{SCB}u_\delta \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (14)$$

여기서 시스템 $\Sigma_\mathscr{S}$과 관련된 행렬들은 다음과 같다.

$$A_{SCB} : = \begin{bmatrix} A_a^+ & L_{ab}^+C_b \\ 0 & A_b \end{bmatrix}, \quad B_{SCB} : = \begin{bmatrix} B_{oa}^+ \\ B_{ob} \end{bmatrix}, \quad E_{SCB} : = \begin{bmatrix} E_{oa}^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{SCB} : = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{or}C_b \end{bmatrix}, \quad D_{SCB} : = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

또한 $\Gamma_s^{-1}E$: $=[E_a^{-T} \ E_a^{+T} \ E_\delta^T \ E_c^T]^T$이다.

과정 3 : 다음과 같은 대수방정식의 해 P_s와 Q_s를 구한다.

$$P_sA_{SCB} + A_{SCB}^TP_s - P_sB_{SCB}B_{SCB}^TP_s + C_{SCB}^TC_{SCB} = 0$$
$$A_a^+Q_s + Q_sA_a^{+T} - E_a^+E_a^{+T} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

여기서 $P_s \geq 0$와 $Q_s > 0$이다.

과정 4 : 이산 최적 $H_\infty - FIF$ 문제의 최적해 γ_d^*를 아래와 같이 구한다.

$$\gamma_d^* = \begin{cases} \sqrt{\lambda_{\max}\{Q_sP_s\}} & \text{if } n_p > n_a^- \\ 0 & \text{if } n_p = n_a^- \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

만일 $\gamma_d > \gamma_d^*$인 어떤 γ_d에 대하여 식(5)의 되먹임 행렬은 아래 과정으로 구한다.

과정 5 : 조건 $\gamma_d > \gamma_d^*$을 만족하는 γ_d에 대하여 $H_\infty - DARE$의 해 P_{FI}는 다음과 같다.

$$P_{FI} = 2(I + A^T)^{-1}\Gamma_s^{-T}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Gamma_s^{-1}(I + A)^{-1} \cdots\cdots\cdots (17)$$

여기서 $P_{FI} \geq 0$이며 P_w는 다음과 같다.

$$P_w := \{P_s^{-1} - \gamma_d^{-2} Q_s\}^{-1} \qquad \cdots\cdots\cdots (18)$$

과정 6 : 식(13)으로 부터 되먹임 Σ_{zC}의 이득행렬 F_1과 F_2를 구한다.

6. 수치계산 예

이제 앞에서 제시된 계산법으로 이산 최적 $H_\infty - FIF$ 문제의 최적해를 구하는 수치계산 예를 보이고자 한다. 다음과 같은 이산 시스템 Σ_2이 주어졌다고 하자.

A=

$$\begin{bmatrix} -0.0476190476190476 & -0.095238095238095 & -0.095238095238095 \\ 0.9523809523809526 & 2.904761904761905 & 1.904761904761905 \\ 0.9523809523809524 & 1.904761904761905 & 0.904761904761905 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.684807256235828 & 0.095238095238095 \\ 6.172335600907025 & -3.904761904761902 \\ 3.219954648526075 & -1.904761904761903 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -0.045921803152302 \\ -13.26006321361276 \\ -7.867278222668245 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0.7750 \\ -2.696392495472261 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.476190476190476 & 0 \end{bmatrix}$$

이 시스템은 stabilizable 하고 detactable 하며 eigenvalue {-0.0626, -0.1895, 4.014}을 갖는 불안정한 이산 시스템이다. 그리고 이는 조건 5-4를 만족한다. 이제 최적해 γ_d^*를 구하기 위하여 먼저 주어진 시스템을 $\mathscr{S}$-operator로 변환한 뒤 그 변환 시스템에 SCB 변환을 적용한 결과는 다음과 같다.

$$\Gamma_s^{-1}[A_u - B_o^* C_o^*]\Gamma_s =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.7778174593052023 & 0 \\ 1.414213562373095 & -1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_s^{-1}[B_o^* \ B_1^*]\Gamma_i = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 \\ 0 & 1.414213562373095 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_o^{-1}[C_o^{*T} \ C_1^{*T}]\Gamma_s = \begin{bmatrix} -1.0 & -0.7071067811865475 & 0 \\ 0 & -0.7071067811865475 & -1.0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_o^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Gamma_i = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

여기서 $\Gamma_s^{-1}\tilde{x} = [x_a^{-T} \ x_a^{+T}]^T$이며 $n_a^- = 2$ 그리고 $n_a^+ = 1$ 이다. 그리하여 이 시스템은 조건 5-2를 만족한다. 그리고 $E^T \Gamma_s^T = [-1.0 \ 1.0 \ 0.775]$이며 또한 조건 5-3을 만족한다. 따라서 과정 2에서 요구되는 시스템 Σ_8을 다음과 같이 얻는다.

$$A_{SCB} = [1.0], \quad B_{SCB} = [-1.0 \ 0] \quad E_{SCB} = [0.775]$$

$$C_{SCB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{SCB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

다음, 과정 3에서 P_s=2.0 그리고 Q_s=0.3003125를 얻는다. 그리하여 과정 4에 따라 이산 최적 $H_\infty - FIF$의 최적해는 γ_d^*=0.7750이다. 만일 γ_d=0.90이라면 γ_d>0.7750이므로 과정 5으로 부터 $H_\infty - DARE$의 해 P_{FI}는 다음과 같다.

$$P_{FI} = \begin{bmatrix} 3.868656716417905 & 0 & -3.868656716417903 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3.868656716417903 & 0 & 3.868656716417902 \end{bmatrix}$$

따라서 이 $P_{FI} \geq 0$가 $H_\infty - DARE$의 해가 되기 위한 조건을 식(12)로 부터 검증하면 다음과 같다.

$$V(P_{FI}) = \begin{bmatrix} 61.16518766710651 & -30.21236673773980 \\ -30.21236673773980 & 15.47462686567160 \end{bmatrix} > 0$$

$$R(P_{FI}) = 0.2093750 > 0$$

$$|\lambda_i\{A_{cl}\}| < 1 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3$$

그러므로 이 P_{FI}는 이산 $H_\infty - FIF$ 문제의 stabilizable 해이며 식(13)에 보여준 되먹임 이득행렬은 다음과 같다.

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.677419354838704 7 & 0 \\ 0.50 & -0.3225806451612812 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1.826588464674747 \\ 0.344481683488225 \end{bmatrix}$$

한편 만일 $\gamma_d \leq$0.7750이라면 $H_\infty - DARE$의 식(10)이 singular 행렬을 가지므로 stabilizable 해는 존재하지 않는다.

7. 결론

본 논문에서는 이산 최적 $H_\infty - FIF$ 문제를 정의하고 이를 해결하기 위한 방법을 제시하였다. 이를 위해 이산 시스템의 invariant zero를 $\mathscr{S}$ *- operator* 변환을 통하여 규정하였다. 이를 바탕으로 이산 최적 $H_\infty - FIF$ 문제의 최적해(infimum γ_d^*)를 비반복 계산법으로 구하기 위하여, 이산 시스템에 대한 기하학적 조건과 동시에 만족해야 할 Riccati 대수방정식과 Lyapunov 대수방정식을 존재 조건으로 제시하였다. 이와 같은 해석적 해법으로 종래의 반복계산법으로 구하던 이산 $H_\infty - FIF$ 문제의 stabilizable 해도 보다 정확히 구할 수 있다. 앞으로, 본 연구에서 제시된 개념을 확장하여 일반화된 이산 최적 H_∞-제어문제를 해결하기 위한 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] G. Zames, "Feedback and Optimal Sensitivity : Model reforance tTransformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverse," IEEE Transcations on Automatic control, AC-26, Vol.2, 1981, pp.301-320.

[2] A.A. Stoorvogel, The H_∞ Control Problem : A State Space Approach, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1992.

[3] C. Ha and U.L. Ly, "Optimal Discrete-time Static Output-feedback Design : A W-Domain Approach," Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.15, No.5, Sept.-Oct. 1992, pp. 1175-1182.

[4] P. Sannuti and A. Saberi., "Special Coordinate Basis for Multivariable Linear System--Finite and Infinite Zero-Structure, Squaring Down and Decoupling," International Journal of Control, Vol.45, No.5, 1987, pp.1655-1704.

[5] W.M. Wonham, Linear Multivariable Control : A Geometric Approach, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No.101, Springer-Verleg, New York.