

두 축이 동시에 운동하는 비선형 천장 크레인의 부분상태 궤환제어 알고리즘 개발

Development of Partial State Feedback Control Algorithm for Nonlinear  
Overhead Crane Whose Two Axes are Moved Simultaneously

°이 종규, 이상룡

경북대학교 기계공학부 (Tel: 952-2229; Fax: 956-7907)

**Abstracts** In this study, when the nonlinear overhead crane which allows simultaneously travel and traverse motion moves a desired transport route, the object suspended the end of rope does undesirable swing motion. Nonlinear overhead crane pertubes in the vicinity of an operating point, therefore the nonlinear overhead crane is modified to linear overhead crane for the operating point. The linear overhead crane was controlled to swing angles of the object by the ratio of torque inputs to motors of the girder and the trolley. As a basis for the result of the linear overhead crane, the nonlinear overhead crane was controlled swing angles of the object and positions of the overhead crane without collision with environmental equipment by partial state feedback control.

**Key words** Overhead Crane, Swing Motion, Operating Point, State Feedback Control, Gain Matrix

1. 서론

생산 공장, 제품 창고, 철강 업체, 항만 등 하중이 큰 물체의 운반이 필요한 장소에서 많이 사용되고 있는 천장 크레인은 크레인 운전시의 가속 특성, 하중이 큰 작업물을 지지하는 로프의 강성 부족, 바람과 같은 외부 교란, 크레인 조작 미숙 등의 요인으로 작업물 운송 도중에 크레인 끝부분에 달려 있는 작업물에 진자 운동이 발생하여 주변 설비와의 충돌 발생, 작업자 안전 사고 유발, 작업물을 정확한 하역 작업에 내려놓는데 과도한 시간이 소요되는 문제점들이 발생하고 있다. 이러한 문제점들을 해결하기 위해서 작업물의 진자 운동을 억제할 수 있는 제어 알고리즘을 개발하는 연구가 활발히 진행되고 있다. Ohnishi<sup>[1]</sup> 등은 천장 크레인에 대한 무진자 및 목표점의 위치 제어를 수행하였지만, 크레인이 동시에 종횡으로 운동하는 평면을 고려하지 않았다. Moustafa<sup>[2]</sup> 등은 동시에 종횡으로 움직이는 비선형 천장 크레인을 모델링하였지만, 비선형 천장 크레인에 대한 진자각 및 위치들을 제어하는 것은 고려하지 않았다.

본 연구의 목적은 거더(girder)와 트롤리(trolley) 모터가 동시에 운동하는 비선형 천장 크레인에 대한 로프 끝에 달려 있는 화물의 진자각 및 천장 크레인의 위치들을 제어하는 알고리즘을 개발하는 것으로, 이를 위해 비선형 천장 크레인을 동작점 부근에 대한 선형 천장 크레인으로 구하고, 두 모터에 걸리는 회전력(torque)의 비와 부분 상태 궤환 제어로서 화물의 진자각들을 제어한 후 선형 천장 크레인의 결과를 근거로 하여 비선형 천장 크레인에 대한 화물의 진자각 및 크레인의 위치들을 제어한다.

2. 천장 크레인의 비선형 상태방정식

그림 1에서 본 천장 크레인(이하 크레인이라고 한다.)은 트롤리와 거더가 각각 X축과 Y축을 동시에 움직이면서 정해진 운송 경로를 따라 화물을 운반할 때, 화물은 운동하는 평면에서 진자

각  $\psi$ 와 화물을 단 로프와 Z축 사이의 진자각  $\theta$ 가 발생하는 진자 운동을 한다. 점 O는 고정 좌표계의 원점이고, 점 o는 이동 좌표계의 원점이다.

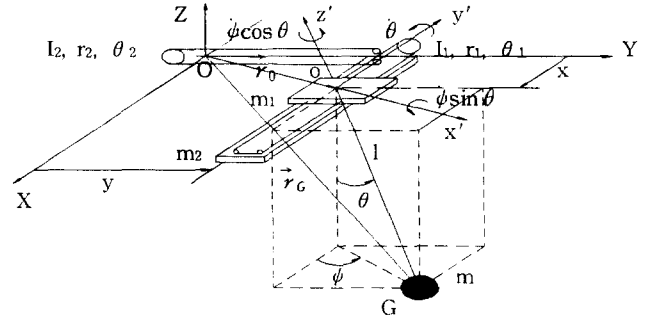


그림 1. 좌표계를 이용한 천장 크레인  
Fig. 1. Overhead crane using coordinates

로프의 끝부분에 달려 있는 질량 m인 화물은 z'축에 대한 대칭인 강체이고, 질량 중심은 G이고, 로프는 질량과 탄성 변형이 무시되고, 길이를 l로 하고, 로프의 비틀림 상수는 p로 하고, 크레인의 운동으로 발생하는 마찰 또는 모터에서 발생하는 감쇠력은 무시한다. 원점 O에 대한 원점 o의 위치 벡터는 다음과 같다.

$$\vec{r}_o = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{1}$$

여기서,  $x=r_1\theta_1$ ,  $y=r_2\theta_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ 는 트롤리와 거더 모터드럼의 등가 반경,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ 는 트롤리와 거더 모터드럼의 회전각이다. 구 좌표계를 이용한 원점 O에 대한 점 G의 위치벡터는 다음과 같다.

$$\vec{r}_G = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k} \tag{2}$$

여기서,  $x_G=x+l\sin\theta\cos\psi$ ,  $y_G=y+l\sin\theta\sin\psi$ ,  $z_G=-l\cos\theta$ 이다. 크레인의 운동방정식은 운동에너지와 포텐셜 에너지의 차로 정의되는 라그랑지 함수를 이용하여 구할 수 있고, 라그랑지 함수 L

은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\psi}^2\sin^2\theta)/2 + m\dot{x}l\sin\theta\cos\psi + m\dot{x}(l\dot{\theta}\cos\theta\cos\psi - l\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi) + m\dot{y}l\sin\theta\sin\psi + m\dot{y}(l\dot{\theta}\cos\theta\sin\psi + l\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi) + m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + m_2\dot{y}^2/2 + I_1(\dot{x}/r_1)^2/2 + I_2(\dot{y}/r_2)^2/2 + I_a\dot{\psi}^2\cos^2\theta/2 + I_t(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta)/2 - p\dot{\phi}^2/2 + mgl\cos\theta \quad (3)$$

여기서  $\phi$ 는 로프의 비틀림 각이고,  $g$ 는 중력가속도이다. 또한 비틀림각  $\phi$ 와 진자각  $\theta$ ,  $\psi$ 에 대한 구속방정식은 다음과 같다.

$$\dot{\phi} - \dot{\psi}\cos\theta = 0 \quad (4)$$

구속방정식이 있을 때, 라그랑지 승수를 이용한 라그랑지 방정식에서 일반 좌표계  $x, y, \theta, \psi$ 에 대한 크레인의 운동방정식은 다음과 같이 구할 수 있고, 이때 로프의 길이는 일정하게 하였다.

$$d_1\ddot{\theta}\cos\theta\cos\psi - d_1\dot{\psi}\sin\theta\sin\psi + \ddot{x}/l - 2d_1\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi - d_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\cos\psi = u_1 \quad (5)$$

$$d_2\ddot{\theta}\cos\theta\sin\psi + d_2\dot{\psi}\sin\theta\cos\psi + \ddot{y}/l + 2d_2\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi - d_2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)\sin\theta\sin\psi = u_2 \quad (6)$$

$$m_t\ddot{\theta} + \ddot{x}/l\cos\theta\cos\psi + \ddot{y}/l\cos\theta\sin\psi - m_t\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + m_a\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + g_l\sin\theta = 0 \quad (7)$$

$$(m_t\sin^2\theta + m_a\cos^2\theta)\ddot{\psi} - \ddot{x}/l\sin\theta\sin\psi + \ddot{y}/l\sin\theta\cos\psi + 2(m_t - m_a)\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta + m_p\dot{\phi}\cos\theta = 0 \quad (8)$$

여기서,  $J_1=(m+m_1)r_1^2+I_1$ ,  $J_2=(m+m_1+m_2)r_2^2+I_2$ ,  $u_1=T_1r_1/(I_1J_1)$ ,  $u_2=T_2r_2/(I_2J_2)$ ,  $d_1=mr_1^2/J_1$ ,  $d_2=mr_2^2/J_2$ ,  $g_l=g/l$ ,  $m_t=1+I_t/(ml^2)$ ,  $m_a=I_a/(ml^2)$ ,  $m_p=p/(ml^2)$ 이고,  $T_1, T_2$ 는 각각 트롤리와 거더 모터의 회전력이다. 식 (4)~(8)로부터 크레인의 운동방정식은 비선형임을 알 수 있고, 비선형 상태방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (9)$$

여기서,  $\vec{x}=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T$ ,  $x_1=\theta$ ,  $x_2=\psi$ ,  $x_3=x$ ,  $x_4=y$ ,  $x_5=l$ ,  $x_6=\dot{\psi}$ ,  $x_7=\dot{x}$ ,  $x_8=\dot{y}$ ,  $x_9=\phi$ ,  $\vec{u}=[u_1, u_2]^T$ ,  $\vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)=[x_5, x_6, x_7, x_8, A_n^{-1}B_n, x_9\cos x_1]^T$ ,  $t$ 는 시간, 첨자 T와 -1은 각각 전치행렬과 역행렬이다.

$$A_n = \begin{bmatrix} d_1\cos x_1\cos x_2 & -d_1\sin x_1\sin x_2 & \frac{1}{l} & 0 \\ d_2\cos x_1\sin x_2 & d_2\sin x_1\cos x_2 & 0 & \frac{1}{l} \\ m_t & 0 & \frac{1}{l}\cos x_1\cos x_2 & \frac{1}{l}\cos x_1\sin x_2 \\ 0 & m_t\sin^2 x_1 + m_a\cos^2 x_1 & -\frac{1}{l}\sin x_1\sin x_2 & \frac{1}{l}\sin x_1\cos x_2 \end{bmatrix}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} \mu_1 + 2d_1x_5x_6\cos x_1\sin x_2 + d_1(x_5^2 + x_6^2)\sin x_1\cos x_2 \\ \mu_2 - 2d_2x_5x_6\cos x_1\cos x_2 + d_2(x_5^2 + x_6^2)\sin x_1\sin x_2 \\ (m_t - m_a)x_6^2\sin x_1\cos x_1 - g_l\sin x_1 \\ 2(m_a - m_t)x_5x_6\sin x_1\cos x_1 - m_px_9\cos x_1 \end{bmatrix}$$

### 3. 선형 상태방정식

섭동 함수  $\delta\vec{x} = \vec{x}(t) - \vec{x}_n(t)$ ,  $\delta\vec{u} = \vec{u}(t) - \vec{u}_n(t)$ 를 이용하면 비선형 상태방정식은 다음과 같은 선형 상태방정식이 구해진다.<sup>[3]</sup>

$$\delta\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \Big|_n \delta\vec{x} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}} \Big|_n \delta\vec{u} \quad (10)$$

크레인의 평형점들은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}_e, \dot{y}(t) = \dot{y}_e, \dot{x}(t) = \dot{x}_e, \dot{y}(t) = \dot{y}_e, x(t) = x_e, y(t) = y_e, \\ \theta(t) &= \theta_e, \psi(t) = \psi_e, \phi(t) = \phi_e, \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t) = 0, \dot{\psi}(t) = 0, \\ \dot{\phi}(t) &= 0, \dot{\phi}(t) = 0, u_1(t) = u_{1e}, u_2(t) = u_{2e} \end{aligned} \quad (11)$$

크레인의 평형 상태방정식들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_{1e} = \dot{x}_e/l, u_{2e} = \dot{y}_e/l, \dot{x}_e\cos\psi_e + \dot{y}_e\sin\psi_e + g_l\tan\theta_e = 0$$

$$(\dot{x}_e\sin\psi_e - \dot{y}_e\cos\psi_e)\tan\theta_e - m_p\dot{\phi}_e = 0, \phi_e = \psi_e\cos\theta_e \quad (12)$$

여기서,  $\theta_e \neq \pi/2$ ,  $p$ 가 작아서  $m_p \ll 1$ 이므로  $m_p$ 를 무시할 수 있고, 트롤리 가속도  $a_t \ll g$ 이므로 진자각  $\theta$ 가 작아서  $\sin\theta = \tan\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ 이므로 진자각들의 평형점은 다음과 같다.

$$\theta_e = \pm \frac{a_t}{g} \quad (a_t = \sqrt{\dot{x}_e^2 + \dot{y}_e^2}), \psi_e = \tan^{-1}(\dot{y}_e/\dot{x}_e), \phi_e = \psi_e \quad (13)$$

본 연구에서는 크레인의 거더와 트롤리 모터는 각각 일정한 가속도 및 등속 운동을 하고, 진자각 및 진자각속도들만 제한하는 부분 상태 제한 제어를 하므로, 크레인이 가감속 운동하면 선형 상태방정식은 다음과 같다. (부록 참조)

$$\delta\dot{\vec{x}} = A_a\delta\vec{x} + B_a\delta\vec{u} \quad (14)$$

여기서,  $\delta\vec{x} = [\delta x_1, \delta x_5, \delta x_2, \delta x_6]^T$ ,  $\delta\vec{u} = [\delta u_1, \delta u_2]^T$

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ n_{11} & 0 & n_{12} & n_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_{21} & 0 & n_{22} & n_{29} \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n_{51} & n_{52} \\ 0 & 0 \\ n_{61} & n_{62} \end{bmatrix}$$

등속 운동이면  $\theta_e = \psi_e = \phi_e = 0$ 이므로 진자각  $\theta$ 만 트롤리 모터의 회전력으로 제어가 가능하고,  $\theta$ 가 영으로 수렴하면  $\psi$ 도 영으로 수렴하므로 선형 상태방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta\dot{\vec{x}}_0 = A_0\delta\vec{x}_0 + \vec{b}_0\delta\vec{u}_1 \quad (15)$$

여기서,  $\vec{x}_0 = [\delta x_1, \delta x_5]^T$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g_l/(m_t - d_1) & 0 \end{bmatrix}, \vec{b}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/(m_t - d_1) \end{bmatrix}$$

### 4. 부분 상태 제한 제어기 설계

상태 제한 제어기는 가제어성 행렬  $C=[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$ 의 계수(rank)가 행렬 A의 계수와 같은 완전 가제어이면 설계할 수 있다. 여기서, A는  $n \times n$  행렬, B는  $n \times r$  행렬이다. 시스템의 입력력 r이 둘 이상이면 제한 이득 K는  $r \times n$  행렬로 표시가 되지만, A가 0이 아닌 서로 다른 고유치(eigenvalue)를 가지면  $K=qk$ 로 수정할 수 있다. 여기서, q는  $r \times 1$  행렬로서 임의로 선택하는 상수이고, k는  $1 \times n$  행렬로서 제한 이득이다. 따라서 시스템의 입력수는 둘 이상에서 하나로 줄어든다.<sup>[4]</sup>

크레인의 위치 및 화물의 진자각들을 동시에 제한 제어하는 것은 화물 운송시 주변 설비와의 충돌할 가능성이 매우 높으므로, 진자각 및 진자각속도들만 제한하는 부분 제한 제어를 한다. 크레인의 가감속 운동에서  $A_a$ 는 0이 아닌 서로 다른 고유치를 가지고,  $C_a = [\vec{b}, A_a\vec{b}, A_a^2\vec{b}, A_a^3\vec{b}]$ 는 완전 가제어이므로 거더와 트롤리 모터의 회전력비로서 제어할 수 있으므로 식 (14)는 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta\vec{u} &= \vec{q}\delta w, & \vec{b} &= B_a\vec{q} \\ \delta\dot{\vec{x}} &= A_a\delta\vec{x} + \vec{b}\delta w & w &= -\vec{k}_a\delta\vec{x} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, w의 입력수는 하나이고,  $\vec{k}_a$ 는 시스템의 상태 변수들이 임의의 초기 조건에서 영으로 수렴하도록 고유치들의 위치를 정하였을 때, Bass-Gura식을 이용하여 구한 이득벡터로서 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>[4]</sup>

$$\vec{k}_a = (\vec{p}_a - \vec{a}_a)(A_a^{-1})^T C_a^{-1} \quad (17)$$

여기서  $\vec{p}_a = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ 는 원하는 고유치가  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 인 제한 시스템의 특성 다항식  $p(s) = s^4 + p_1s^3 + p_2s^2 + p_3s + p_4 = 0$ 에서

구한 상수이고,  $\vec{a}_a = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ 는 개회로 시스템의 특성 다항식  $a(s) = s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$ 에서 구한 상수이고,  $\Delta_c$ 는 첫 번째 열  $[1 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ 로 이루어진 lower triangular Toeplitz 행렬이다. 크레인의 등속 운동에서 이득 벡터  $\vec{k}_c$ 는 가감속 운동과 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{k}_c = (\vec{p}_c - \vec{a}_c)(\Delta_c^{-1})^T C_c^{-1} \quad (18)$$

여기서,  $\vec{p}_c = [p_1 \ p_2]^T$ ,  $\vec{a}_c = [a_1 \ a_2]^T$ ,  $C_c = [\vec{b}_0 \ A_0 \ \vec{b}_0]$ 이다. 비선형 크레인의 위치 및 화물의 진자각들은 그림 2에서 본 것과 같이 선형 크레인의 부분 상태 궤환 제어로부터 구한 이득행렬  $K_a$ 를 이용하고, 거더와 트롤리 모터의 회전력비로서 제어한다. 여기서,  $\vec{x}_p = [x_1 \ x_2 \ x_5 \ x_6]^T$ ,  $\vec{x}_m = [\theta_e \ \psi_e \ 0 \ 0]^T$ 이다.

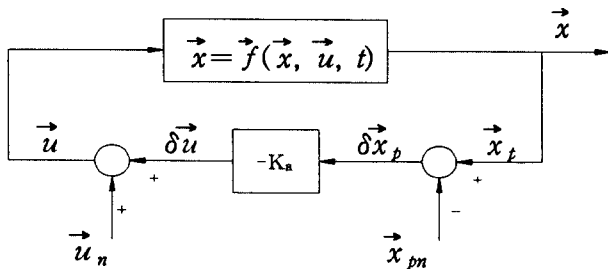
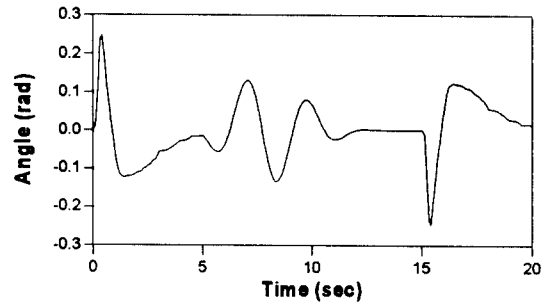


그림 2. 비선형 천장 크레인의 블록 선도  
Fig. 2. Block diagram of nonlinear overhead crane

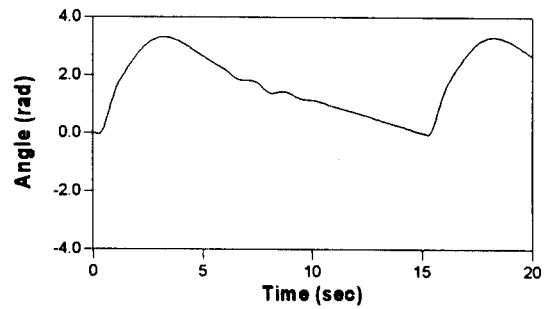
## 5. 시뮬레이션 결과

크레인은 정해진 운송 경로를 따라 가감속 및 등속 운동할 때, 컴퓨터 시뮬레이션에 이용된 크레인의 정보들은  $m_1=1,150\text{kg}$ ,  $m_2=9,500\text{kg}$ ,  $m=8,000\text{kg}$ ,  $l=2.5\text{m}$ ,  $p=0.1\text{Nm/rad}$ , 트롤리와 거더의 최대속도  $v_x=v_y=0.525\text{m/sec}$ , 화물 형상을 나타낸  $m_c=1.2323$ ,  $m_a=0.02478$ , 가감속 운동시간은 각각 5초, 등속 운동시간은 10초, 수치해석은 Runge-Kutta 방법으로 스텝 크기는 0.1초이고, 트롤리와 거더 모터의 등가 질량 관성모멘트  $I_1, I_2$ 를 무시하였다.

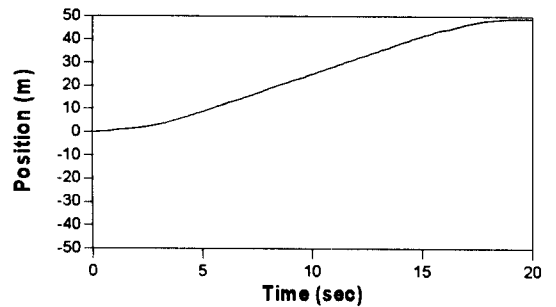
그림 3은 화물의 진자각 및 진자각속도들만 궤환 제어한 비선형 크레인의 동특성으로, 가감속 운동에서 화물의 진자각  $\theta$ 는 상수 벡터  $\vec{q}$ 를 0.1초마다 조정하여 구한 이득행렬  $K_a$ 를 이용하여 화물이 주변 설비와의 충돌을 피하면서 평형점으로 수렴될 수 있고, 진자각  $\psi$ 는 평형점으로 수렴되지 않지만 화물의 진자각  $\theta$ 로 인한 주변 설비와의 충돌이 없다면 화물 운송에는 큰 영향을 주지 않을 것이고, 트롤리와 거더의 위치는 진자각  $\theta$ 가 최대일 때 각각 첫번째 극대점과 극소점이 발생하도록 제어하였으며 완만히 증가 또는 감소한다. 등속 운동에서 원하는 고유치들의 위치를 이동하여 구한 이득 벡터  $\vec{k}_c$ 를 이용하여 궤환 제어한  $\theta$ 와 궤환 제어하지 않은  $\psi$ 가 동시에 평형점으로 수렴시켰고, 그 결과로  $\theta$ 의 진폭이 조금 크게 나타났다가 평형점으로 수렴하고, 트롤리의 위치는 단조 증가하고, 거더의 위치는 단조 감소한다. 또한 트롤리와 거더의 위치가 반대 방향으로 진행하는 것은 화물의 진자 운동을 제어한 결과로 생겼고, 그림 3 (A)의 진자각  $\theta$ 의 최대값은 그림 3 (B)의 진자각  $\theta$ 의 최대값 보다는, 진자각  $\psi$ 가 커지고, 트롤리와 거더는 더 멀리 움직이므로, 부분 상태 궤환 제어를 이용한 비선형 크레인의 위치는 화물의 진자각  $\theta$ 의 최대값을 비교하므로써 제어할 수 있다.



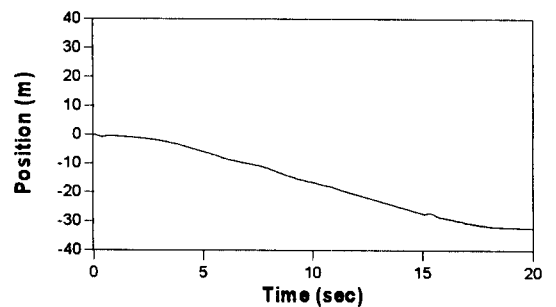
(a)  $\theta$



(b)  $\psi$



(c) x



(d) y

$$(A) \theta_{\max} = 14.1^\circ$$

## 6. 결론

거더와 트롤리 모터가 동시에 운동하는 비선형 크레인에 부분 상태 폐환 제어를 이용한 결과, 화물의 진자각  $\theta$ 의 진자 운동을 억제할 수 있었고, 진자각  $\psi$ 의 진자 운동은 억제할 수 없었지만,  $\psi$ 는  $\theta$ 에 종속되므로  $\theta$ 의 진자 운동을 방지할 수 있으므로 화물을 주변 설비와의 충돌을 피하면서 목표점 까지 운송할 수 있고, 화물의 진자각  $\theta$ 의 최대값의 크기를 비교하므로써 비선형 크레인의 위치는 제어할 수 있었다.

## 7. 참고 문헌

- [1] T. Egusa., E. Ohnishi, I. Tsuboi and M. Uesugi, "Automatic Control of an Overhead Crane", *IFAC World Congress*, Kyoto, Japan, pp 1885~1890, 1981.
- [2] A. M. Ebeid and K. A. Moustafa " Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway" *ASME Journal of DSMC*, Vol. 110, pp 266~271. 1988.
- [3] W. L. Brogan, *Modern control theory*, 3rd ed., Prentice Hall., 1991.
- [4] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall., 1980.

## 8. 부록

$$P_2 = m_p x_{1e}^2 + m_a$$

$$D_2 = \frac{1}{l^2} [ P_2 \{ m_t - (d_1 \cos^2 x_{2e} + d_2 \sin^2 x_{2e}) \} - m_p d_1 x_{1e}^2 \sin^2 x_{2e} ]$$

$$+ \frac{1}{l^2} (d_1 d_2 x_{1e}^2 - m_p d_2 x_{1e}^2 \cos^2 x_{2e})$$

$$d_{11} = \frac{1}{l^2} (d_2 x_{1e}^2 - P_2) \cos x_{2e} \quad d_{12} = \frac{1}{l^2} (d_1 x_{1e}^2 - P_2) \sin x_{2e}$$

$$d_{13} = \frac{1}{l^2} \{ P_2 - (d_1 \sin^2 x_{2e} + d_2 \cos^2 x_{2e}) x_{1e}^2 \}$$

$$d_{14} = \frac{1}{l^2} (d_2 - d_1) x_{1e} \sin x_{2e} \cos x_{2e} \quad d_{21} = \frac{1}{l^2} (m_t - d_2) x_{1e} \sin x_{2e}$$

$$d_{22} = \frac{1}{l^2} (d_1 - m_t) x_{1e} \cos x_{2e} \quad d_{23} = d_{14}$$

$$d_{24} = \frac{1}{l^2} \{ m_t - (d_1 \cos^2 x_{2e} + d_2 \sin^2 x_{2e}) \}$$

$$n_{11} = \frac{1}{D_2} \left( \frac{m_p x_{2e}}{x_{1e}} d_{14} - g d_{13} \right)$$

$$n_{21} = \frac{1}{D_2} \left( \frac{m_p x_{2e}}{x_{1e}} d_{24} - g d_{23} \right)$$

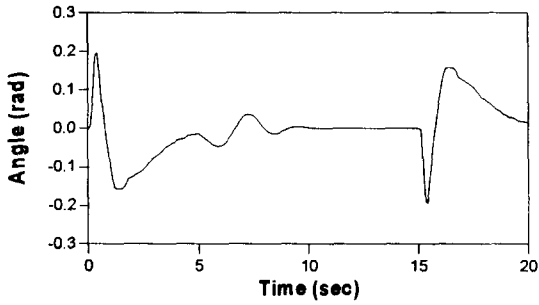
$$n_{12} = \frac{1}{D_2} \left( m_p \frac{x_{2e}}{x_{1e}} d_{13} - g x_{1e}^2 d_{14} \right)$$

$$n_{22} = \frac{1}{D_2} \left( m_p \frac{x_{2e}}{x_{1e}} d_{23} - g x_{1e}^2 d_{24} \right),$$

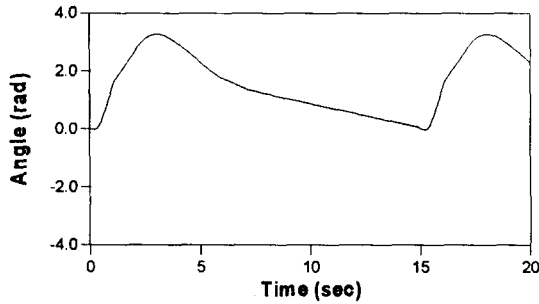
$$n_{19} = -\frac{1}{D_2} m_p d_{14} \quad n_{29} = -\frac{1}{D_2} m_p d_{24}$$

$$n_{51} = \frac{d_{11}}{D_2} \quad n_{61} = \frac{d_{21}}{D_2}$$

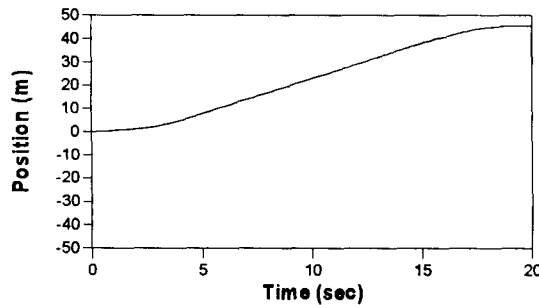
$$n_{52} = \frac{d_{12}}{D_2} \quad n_{62} = \frac{d_{22}}{D_2}$$



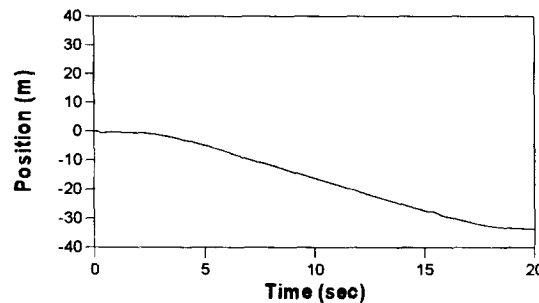
(a)  $\theta$



(b)  $\psi$



(c)  $x$



(d)  $y$

(B)  $\theta_{\max} = 11.1^\circ$

그림 3. 부분상태폐환제어를 이용한 비선형 천장 크레인의 동특성

Fig. 3. Dynamic characteristic of nonlinear overhead crane using the partial state feedback control