Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

비선형 샘플치 시스템의 출력조절

Output Regulation of Nonlinear Sampled-data Systems

정 선 태

숭실대학교 전자공학과 (Tel: 820-0638; Fax: 814-1652; E-mail: cst@syscon.soongsil.ac.kr)

Abstracts The effects of time-sampling on nonlinear output regulation problem is investigated. Output regulatedness is preserved under time sampling as in linear systems, however output regulatability is not robust with respect to time-sampling, and thus one needs to seek an approximate nonlinear sampled-data output regulator.

Keywords Output regulation, Nonlinear systems , Sampled-data systems, Time-sampling, Digital regulator

1. 서론

전체 폐루프시스템을 안정화하면서, 외란을 제거하고 출력이 외부기준입력을 추종하도록 하는 '출력조절(output regulation)의 문제는 가장 기본적인 제어의 문제의 하나로 선형 시스템 뿐만 아니라 비선형 시스템에 대해서도 많은 연구가 진행되어 있다 [1,2,3,4,6,8] 그런데, 주어진 연속시간 시스템에 대해 출력조절을 달성하는 조절기(regulator)를 실제로 구현하게 될 때 설계된 연속시간 조절기는 그 제어기구조의 복잡성으로 인한 구현의 어려움 또는 경제성 등의 여러가지 이유로 디지탈 구현을 고려하게 되는 데, 이는 보통 다음의 두 가지 방법으로 한다.

첫째, 연속시간 시스템에 대해 얻어진 연속시간 제어기를 이산화하여 디지탈제어기 구현

둘째, 주어진 연속시간 시스템을 이산화 하여 얻어진 샘플치 시스템에 대해 설계된 디지탈 조절기설계

전자의 경우, 이산화 하는 샘플링 시간이 매우 짧게 되면 연속시간 제어기와 유사한 성능을 갖게 되리라는 연속성의 원리를 바탕으로 흔히 많이 이용되는 접근방법이나, 이는 원하는 제어 시스템의 성능에 좀 더 접근하는 성능을 얻기 위하여 매우 빠른 샘플링을 요구하며, 또한 샘플링시간에 대해 어느 정도의 근사적인 해인가를 알기가 어렵다. 이에 반해, 후자의 경우, 원래의 연속시간 비선형 시스템을 이산화한 샘플치 모델에 대한 디지탈조절기설계는 샘플링 시간이 문제의 정의에 포함되버려 샘플링 효과를 직접적으로 다룰 수 있고, 매우 빠른 샘플링을 필요하지 않아, 후자의 방법이 디지탈 조절기 구현시 여러가지 장점을 가지고 있다.

그런데, 후자의 경우, 연속시간 시스템에 설계 가능했던 출력조절의 문제가 원래의 연속시간 시스템을 샘플링하여 얻어진 샘플치 시스템에 대해서도 설계가능한 것인가를 조사하는 것이 필요하게 된다. 따라서 본 논문에서는 선형시스템의 출력조절문제에 대한 샘플링영향의 조사[8]에 이어 비선형 시스템의 출력조절문제의 샘플링영향에 연구한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 비선형시스템의 출력조절의 문제와 그 해에 대해 연속시간 과 이산시간 각각에 대해 설명하며, 제3절에서는 비선형시스템의 출력조절의 문제에 대한 샘플링영향에 대한 본 논문의 주요한 결과가 기술되며, 마지막으로 제 4절에 결론이 주어진다.

2. 비선형 시스템의 출력조절

먼저 출력조절 문제를 위해 고려한 비선형 시스템은 다음과 같다.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u, w) & (2.1a) \\ \dot{w} = s(w) & (2.1b) \\ e = h(x, w) & (2.1c) \end{cases}$$

여기서 (2.1a)는 외란과 (또는) 기준신호 w 의 영향을 받고 있는 시스템의 동역학을 나타낸다. 또 (2.1b)는 외부 시스템(exosystem)으로써, 고려된 외란과 기준신호의 시스템을 모델화한 것이며, 세번째 식 (2.1c)는 기준신호를 추적할 때의 에러를 기술한 것이다. 또, R^n의 원점근방 X와 외란 또는 기준 공간 W에 대해서 $x \in X$, $u \in R^m$, $w \in W$ 이며 f, s, h는 각각 $f: X \times W \times R^m \to R^n$, $s: W \to W$, $h: X \times W \to R^l$으로 정의된 C^∞함수이다. 또 $f(0,0,0)=0$, $s(0)=0$, $h(0,0)=0$ 으로 가정한다. 즉 $x=0$, $u=0$, $w=0$ 을 시스템 (2.1)의 평형점으로 간주한다.

비선형 시스템의 출력조절 문제는 다음과 같다. $\dot{x}=f(x,0,0)$이 $x=0$에 대해 지수적 안정(exponentially stable)하고, $u=0$에 대해 $x=0$, $w=0$ 근방에 $U \subset X \times W$ 가 존재하여, $(x(0), w(0)) \subset U$ 인 모든 초기조건에 대해 $\lim_{t\to\infty} h(x(t), w(t)) = 0$을 만족할 때 시스템 Σ는 '출력조절됨(output regulated)'이라고 한다. 또, Σ 가 내재적으로 안정되지 않고 출력조절되지않았을 때, 다음의 보상기 Γ를 설계하여

$$\Gamma : \begin{cases} \dot{z} = g(z, e) \\ u = \theta(z) \end{cases}$$

Σ와 Γ가 결합된 폐루프 시스템에 대해 지수적 안정 (즉, $\dot{x}=f(x,\theta(z),0)$, $\dot{z}=g(z,h(z,0))$ 이 $x=0$에 대해 지수적 안정) 과 출력조절됨 (즉 $u=0$에서, $x=0$, $w=0$ 근방에 $U \subset X \times W$ 가 존재하여, $(x(0), w(0)) \in U$ 인 모든 초기조건 $(x(0), w(0))$ 에 대해 $\lim_{t\to\infty} h(x(t), w(t)) = 0$을 만족)을 달성하면 보상기 Γ를 조절기(regulator)라 한다. 시스템 Σ에 대해 조절기 Γ를 설계할 수 있을 때 시스템 Σ를 '출력조절가능(output regulatable)'하다고 한다. 이제 '출력조절됨(regulatedness)'와 '출력조절가능(output regulatability)'의 조건을 기술한다[1].

보조정리 2.1: $\frac{\partial s}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 허수축에 위치하고,

$\dot{x}=f(x,0,0)$이 안정한 선형근사화를 가질 때, 시스템 Σ 가 '출력조절됨'일 필요충분조건은 다음과 같다.

W의 원점 근방 W^0에서 정의되고 다음의 식 (2.2)을 만족하는 어떤 $C^k(k\geq 2)$ 함수 $x=\pi(w)$ $(\pi(0)=0)$ 이 존재한다.

$$\frac{\partial \pi}{\partial w}s(w)=f(\pi(w),0,w) \qquad (2.2a)$$

$$h(\pi(w),w)=0 \qquad (2.2b) \qquad ///$$

정리 2.2: $\frac{\partial s}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 허수축에 위치하고, $f(x,u,0)$ 이 $x=0$, $u=0$ 에서 안정가능(stabilizable) 선형 근사화를 가지고, Σ 가 검출가능(detectable) 선형 근사화를 가질 때, 시스템 Σ 가 '출력조절가능' 일 필요 충분 조건은 다음과 같다.

W의 원점 근방 W^0에서 정의되고 다음의 식 (2.3)을 만족하는 어떤 $C^k(k\geq 2)$ 함수 $x=\pi(w)$ $(\pi(0)=0)$ 와 $u=c(w)$ $(c(0)=0)$가 존재한다.

$$\frac{\partial \pi}{\partial w}s(w)=f(\pi(w),c(w),w) \qquad (2.3a)$$

$$h(\pi(w),w)=0 \qquad (2.3b) \qquad ///$$

보조 정리 2.1과 정리 2.2의 증명은 [1]를 참조하라. 정리 2.2는 비선형 시스템이 '출력조절가능' 이기 위한 필요충분조건은 output zeroing controlled invariant submanifold가 존재하는 것임을 알려준다. 따라서, 이 '출력조절가능'은 zero dymamics와 관련이 있다. [6]에는 '출력조절가능'의 해 존재는 zero dynamics 와 관련이 있음을 잘 설명해주고 있다. 또한, 출력조절가능 문제의 해를 쉽게 판별할 수 있는 충분조건을 구하였다. 차후의 논의를 위해, 여기서 이를 기술한다. 먼저 논의에 필요한 기호를 정리한다.

$$\Sigma_s:\begin{cases}\dot{x}=f_s(x,u)\\ e=h_s(x)\end{cases}$$

$$(f_s(x,u)\equiv f(x,u,w=0),\ h_s(x)\equiv h(x,w=0))$$

$$\Sigma_e:\begin{cases}\dot{x}_e=f_e(x_e,u)\\ e=h_e(x_e)\end{cases}$$

$$(x_e\equiv(x,w)',\ f_e(x_e,u)\equiv(f(x,u,w),s(w))',\ h_e(x_e)\equiv h(x,w))$$

(Z^*,f_s^*), (Z_e^*,f_e^*) 을 각각 원점 근방 의 $U\subset X$, $U_e\subset X_e$ 에서 -정의되는 시스템 Σ_s 와 Σ_e 의 zero dynamics[6]라 하자.

보조정리 2.3: 시스템 Σ 에서, $\frac{\partial s}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 허수축에 위치하고, $f(x,u,0)$ 가 $x=0$, $u=0$ 에서 안정가능 선형 근사화를 가지고, Σ 가 검출가능(detectable) 선형 근사화를 가지며, 시스템 Σ_s 와 시스템 Σ_e 가 각각 zero dynamics (Z^*,f_s^*), (Z_e^*,f_e^*) 를 가질 때, 다음의 조건이 만족하면 '출력조절가능'이다.

1) $T_0Z_e^*+T_0(X\times\{0\})=T_0X_e$

2) 시스템 Σ_s 의 zero dynamics 은 $x=0$ 에서 hyperbolic 평형점을 갖는다. ///

차후의 논의를 위해 비선형 이산 시스템의 출력조절에 대해서도 기술한다[2]. 고려한 비선형 이산 시스템은 다음의 (2.4)와 같고,

$$\Sigma_d:\begin{cases}x_{k+1}=F(x_k,u_k,w_k) & (2.4a)\\ w_{k+1}=S(w_k) & (2.4b)\\ e_k=h(x_k,w_k) & (2.4c)\end{cases}$$

여기서 (2.4) 각 식의 의미와 각 변수의 의미는 연속시간 시스템 Σ에서와 같고, 비선형 이산시스템에서의 '출력조절됨'과 '출력조절가능'의 정의는 연속시간 시스템 Σ 에서와 같다.

보조정리 2.4: $\frac{\partial S}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 단위원 위에 위치하고, $x_{k+1}=F(x_k,0,0)$이 안정 선형 근사화를 가질 때, Σ_d 가 '출력조절됨'일 필요 충분 조건은 다음과 같다.

W의 원점 근방 W^0에서 정의되고 다음의 식 (2.5)을 만족하는 어떤 $C^k(k\geq 2)$ 함수 $x=\Pi(w)(\Pi(0)=0)$ 가 존재한다.

$$\Pi(S(w)) = F(\Pi(w),0,w) \qquad (2.5a)$$

$$h(\Pi(w),w) = 0 \qquad (2.5b) \qquad ///$$

정리 2.5: $\frac{\partial S}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 단위원 위에 위치하고, $F(x,u,0)$ 가 $x=0$, $u=0$ 에서 안정가능 선형 근사화를 가지고, Σ_d 가 검출가능 선형 근사화를 가질 때, 시스템 Σ_d 가 '출력조절가능' 일 필요 충분 조건은 다음과 같다.

원점의 어떤 근방 $W^0\subset W$에서 정의되고, $\Pi(0)=0$, $C(0)=0$ 을 만족하며 다음의 식 (2.6)을 만족하는 $C^k(k\geq 2)$ 함수 $x=\Pi(w)$, $u=C(w)$ 가 존재하는 것이다.

$$\Pi(S(w))=F(\Pi(w),w,C(w)) \qquad (2.6a)$$

$$h(\Pi(w),w)=0 \qquad (2.6b) \qquad ///$$

비선형 이산 시스템의 경우에도 출력조절 문제의 해존재는 zero dynamics와 관련이 있으며, 보조정리 2.3 과 유사한 정리가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 여기서는 지면 관계상 이의 추가적인 기술은 생략한다.

3. 비선형 시스템 출력조절에 대한 샘플링 영향

연속시간 비선형 시스템 Σ 을 이산화하여 얻어진 샘플치 비선형시스템을 $\Sigma(T)$로 표시하자 (T는 샘플링 시간 주기).

$$\Sigma(T):\begin{cases}x_{k+1}=F_T(x_k,w_k,u_k)\\ w_{k+1}=S_T(w_k)\\ e_k=h(x_k,w_k)\end{cases}$$

여기서 우리가 정의하는 샘플치 비선형 시스템의 출력조절문제의 해가 존재한다는 것은 어떤 T^* $(T^*>0)$가 있어, $0<T<T^*$인 모든 T에 대해, 샘플치 비선형 시스템 $\Sigma(T)$의 출력 조절문제의 해가 존재하는 것을 말한다.

연속시간 비선형 시스템 Σ에 대해 보조정리 2.1 과 정리 2.2에서 주어진 가정들을 만족한다고 하면, 다음의 이유로 샘플치 비선형 시스템에 대해서도 같은 가정이 보존된다.

i) 선형화와 이산화는 서로 교환(commute)이고[7], 선형 시스템에서 안정도와 안정가능, 검출가능 모두, 이산화에 대해서 보존되는 것이 잘 알려져 있으므로, 연속 시간 비선형 시스템이 만약 안정 가능 선형화와 검출가능 선형화를 갖는 경우, 샘플치 비선형 시스템도 안정가능 선형화와 검출 가능 선형화가 보장됨을 쉽게 알수 있다.

ii) 외부시스템 $\dot{w} = s(w)$ (*)의 선형화 $\frac{\partial s}{\partial w}$ 의 고유치가 모두 허수축에 있으면, (*)의 이산화로 얻어진 $w_{k+1} = S_T(w_k)$의 선형화 $\frac{\partial S_T}{\partial w}$ 의 고유치 역시 모두 단위원 위에 있음이 보장되기 때문이다.

샘플치 시스템이 '출력조절됨' 이면, 원래의 연속시간 시스템 Σ가 '출력조절됨' 임을 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면, 샘플치 시스템이 출력조절됨 일 때, $F_T(\pi(w), w) = \Pi_T(S_T(w))$ 의 양변을 T=0에서 T에 대해 미분하면

$f(\pi(w), w) = \frac{\partial \pi}{\partial w} s(w)$ 가 성립함을 쉽게 알 수있다. 따라서, 보조정리 2.1 의 가정과 조건이 모두 만족된다.

다음 정리 3.3은 원래의 연속시간 비선형 시스템이 '출력조절됨'일 때 샘플치 비선형 시스템도 '출력조절됨'이 성립함을 보여준다. 정리 3.3 을 위하여, 다음의 보조정리들이 필요하다. 조건 (2.2)는 output zeroing invariant submanifold의 존재를 의미하며, 여기서는 center submanifold $x = \pi(w)$가 바로 output zeroing invariant submanifold이다.

다음의 보조정리는 이를 명확히 보여준다.

보조정리 3.1: 조건 (2.2)을 만족하는 center submanifold $x = \pi(w)$는 Σ 의 동력학

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \tilde{f}(x, w) = \begin{pmatrix} f(x, 0, w) \\ s(w) \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

에 대해 locally invariant하다. 또, 어떤 integral submanifold $x = \pi(w)$가 동력학 (3.1)에 대해 locally invariant하면 조건(2.2a)가 성립한다.

증명: 먼저 보조정리의 두 번째 기술을 증명하자. 어떤 integral submanifold가 동력학 의원점근방$f(x)$)에 대해 locally invariant 할 필요충분조건은 그 integral submanifold의 distribution Δ에 대해 $[f, \Delta] \subset \Delta$ 가 성립하는 것임이 잘 알려져 있다[5]. 따라서 보조정리의 두 번째는 center submanifold $x = \pi(w)$의 distribution Δ에 속한 임의의 vector field g에 대해 $[\tilde{f}, g] \in \Delta$일 때 조건 (2.2)가 만족함을 보이면 된다.

먼저 center submanifold x= π (w)의 distribution Δ는 다음으로 주어짐을 쉽게 보일 수 있다.

$$\Delta = span\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial w_1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial w_2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial w_m} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

따라서 distribution Δ에 포함된 임의의 vector field g는 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial w} v \\ v \end{pmatrix}$$ (여기서 $v = (v_1, \cdots, v_m)'$ 인 constant vector).

$[\tilde{f}, g]$도 distribution Δ에 포함된 vector field이므로 어떤 임의의 constant vector v'에 대해 $[\tilde{f}, g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial w} v' \\ v' \end{pmatrix}$ (3.2)로 표현된다. (3.2)에서 양변의 식을 비교하면

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) = f(\pi(w), w)$$

임이 성립함을 어렵지 않게 증명할 수 있다. 보조정리의 첫번째는 조건(2.2)가 성립할 때, 보조정리 두번째 증명의 역으로부터 쉽게 증명할 수 있다. □

연속시간 시스템의 경우와 같이 조건 (2.5)은 $x = \Pi(w)$ 가 output zeroing invariant submanifold임을 말한다. 다음의 보조정리는 이를 명확히 보여준다.

보조정리 3.2: 조건 (2.5a)를 만족하는 center submanifold $x = \Pi(w)$는 Σ_a의 동력학

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \tilde{F}(x_k, w_k) = \begin{pmatrix} F(x_k, 0, w_k) \\ S(w_k) \end{pmatrix}$$

대해 locally invariant한다. 또 역도 성립한다.

증명: 어떤 integral submanifold가 동력학 $x_{k+1} = F(x_k)$에 대해 locally invariant하다는 것의 필요충분조건은 그 submanifold의 distribution Δ에 대해 $F_* \Delta \subset \Delta$가 성립하는 것임은 잘 알려져 있다. 이로부터, 앞 보조정리 3.1의 증명과 같은 방법으로 어렵지 않게 증명이 가능하므로 생략한다. □

정리 3.3: 다음의 (a)와(b)는 등치조건이다.

(a) 연속시간 시스템 Σ 가 '출력조절됨'이다.

(b) 샘플치 시스템 $\Sigma(T)$가 '출력조절됨'이다.

증명: (b)⇒(a)임은 이미 증명했으므로, (a)⇒(b)만 증명하면 된다. 보조정리 3.1은 연속시간 시스템 Σ 가 '출력조절됨' 일 때 $x = \pi(w)$ 인 submanifold의 distribution Δ에 대해 $[\tilde{f}, \Delta] \subset \Delta$ 가 성립함을 보여준다.

$$\tilde{F}_{T*} g(F_T^{-1}(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} ad_{\tilde{f}}\, g(x) \frac{T^k}{k!} \qquad (3.3)$$

(Campbell-Baker-Hausdorff formula)

가 성립하고[5], $g \in \Delta$ 인 g에 대해 $[\tilde{f}, g] \in \Delta$이 성립하므로 (3.3) 은 $g \in \Delta$인 모든 g에 대해 $\tilde{F}_{T*} g \in \Delta$을 말해준다. 즉, $\tilde{F}_{T*} \Delta \subset \Delta$가 성립한다. □

다음의 보조정리는 샘플치 비선형 시스템의 출력조절 문제의 해가 존재하기 위해서 원래의 연속시간 비선형 시스템의 출력조절 문제의 해가 존재해야한다는 것을 보여준다.

보조정리 3.4: 연속시간 비선형시스템 Σ의 출력조절 문제의 해 존재가 시스템 Σ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 비선형 시스템 $\Sigma(T)$의 출력조절 문제의 해 존재의 필요조건이다.

증명: 샘플치 비선형 시스템 $\Sigma(T)$의 출력조절 문제의 해가 존재하면, 보조정리 2.4에 의해, 어떤 $T^* > 0$에 대해,

$0 < T < T^*$인 모든 T에 대해서 다음의 식 (3.4)를 만족하는 $x = \Pi_T(w)$, $u = C_T(w)$ (Π_T, C_T 는 각각 T에 대해 analytic이다)가 존재한다.

$$\Pi_T(S_T(w)) = F_T(\Pi_T(w), w, C_T(w)) \quad (3.4a)$$
$$h(\Pi_T(w), w) = 0 \quad (3.4b)$$

Π_T, C_T, S_T, F_T 는 각각 T에 대해 analytic이므로 T에 대해 Taylor series전개가 가능하다.

이때 각각을 T에 대해 Taylor series전개한 것을 다음과 같이 쓰기로 하자.

$$S_T(w) = w + Ts(w) + O(T^2) \quad (3.5a)$$

$$F_T(x, w, u) = x + Tf(x, w, u) + O(T^2) \quad (3.5b)$$

$$\Pi_T(w) = \pi_0(w) + T\pi_1(w) + O(T^2) \quad (3.5c)$$

$$C_T(w) = c_0(w) + Tc_1(w) + O(T^2) \quad (3.5d)$$

식 (3.5)를 (3.4)에 대입하여 T에 대해 정리하면 다음과 같다.

T^0 terms, 즉 T에 대해 상수인 항들

$$\begin{cases} \pi_0(w) = \pi_0(w) & (3.6a) \\ h(\pi_0(w), w) = 0 & (3.6b) \end{cases}$$

T^1 terms, 즉 T에 대해 1차인 항들

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial w} s(w) + \pi_1(w) = \pi_1(w) + f(\pi_0(w), w, c_0(w)) \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial h(\pi_0(w), w)}{\partial x} \pi_1(w) = 0 \quad (3.7b)$$

(3.7a)에서

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial w} s(w) = f(\pi_0(w), w, c_0(w)) \quad (3.8)$$

(3.6b)와 (3.8)에서 $x = \pi_0(w)$, $u = c_0(w)$ 는 원래의 연속 시간 비선형 시스템 Σ 의 출력조절 문제의 해존재의 필요충분조건의 미분방정식 (2.3)을 만족한다. ▨

비선형 시스템의 출력조절의 해 존재가 샘플링에 대해 보존될 것인지를 조사하기위해 먼저 선형 시스템의 경우부터 살펴보아야 한다. 이는 비선형 시스템에 대해서 출력조절가능이 성립하기 위해서는 선형화 시스템에 대해 출력조절 가능이 성립해야 하기 때문이다. 따라서 이는 선형화 시스템에 대해 출력조절가능이 샘플링에 대해서 보존되지 않으면 원래의 비선형 시스템은 당연히 출력 조절 가능이 샘플링에 대해서 보존되지 않음을 말한다. 이 경우, 이미 [8]에 출력조절가능이 샘플링에 대해 보존되지 않음을 보였다.

그러면, 어떤 종류의 원래의 비선형 시스템에 대해 샘플치 비선형 시스템이 출력 조절 가능일 것인 가가 연구의 관심이 될 것이다. 다음은 정리는 출력조절 가능이 성립되는 어떤 비선형 시스템의 부류를 기술한다.

보조정리 3.5: 시스템 Σ 에서, $\frac{\partial s}{\partial w}(0)$ 의 모든 고유치가 허수축에 위치하고, $f(x, u, 0)$ 가 x=0, u=0 에서 안정가능 선형 근사화를 가지고, Σ 가 검출가능 선형 근사화를 가지며, 시스템 Σ_s 와 시스템 Σ_e 가 zero dynamics (Z^*, f_s^*), (Z_e^*, f_e^*) 를 가질 때, 다음의 조건이 만족하면 샘플치 비선형 시스템은 출력조절가능이다.

1) $T_0 Z_e^* + T_0(X \times \{0\}) = T_0 X_e$

2) 시스템 Σ_s 의 선형 근사화 시스템을 이산화하여 얻어진 시스템의 zero가 단위원 안 또는 밖에 존재한다.

증명: 선형 시스템에서 안정가능과 검출가능은 이산화에 대해 보존되며, $\dot{w} = s(w)$ (*)의 선형근사화의 고유치가 모두 허수축에 있으면, (*)의 이산화된 시스템의 선형근사화는 모두 단위원 위에 존재하게 된다. 또한, 원래의 비선형 시스템에 zero dynamics가 정의될 수 있으면, 샘플치 시스템에 대해서도 zero dynamics 가 정의된다. 또, 조건 1)의 경우, 이산화에 대해 보존된다. 조건 2)는 시스템 Σ_s 의 이산화된 시스템이 hyperbolic 평형점을 갖는 것을 말한다. 비선형 이산 시스템에서도 보조정리 2.3 과 같은 정리가 성립한다는 것을 쉽게 알 수 있으므로, 이 경우 샘플치 비선형 시스템은 출력 조절가능임을 알 수 있다. ▨

4. 결론

비선형 출력조절 문제에 있어서, 선형 시스템에서와 같이[8] '출력조절됨'은 샘플링에 대해 보존되나, 일반적으로 '출력조절가능성'은 보존되지 않음을 살펴 보았다. 또한, '출력조절가능성'이 샘플링에 보존되는 시스템의 부류를 간단히 살펴보았다. 이러한 결과는 비선형시스템에 디지탈 조절기를 설계할 때, 원래의 연속시간 시스템에 대해 설계된 연속시간 조절기를 빠른 샘플링을 통하여 근사조절기를 설계하거나(이는 사실상 샘플링 시간 T에 대해 1차근사인 조절기다), 또는 이산화된 샘플치 비선형 시스템에 대해 근사 샘플치 비선형 조절기를 구해야 한다는 것을 의미한다. 앞으로, 어떤 구조를 갖는 비선형 시스템에 정확한 샘플치 조절기를 설계할 수 있는 지를 더 자세히 살펴보고, 또, 샘플링 시간 T에 대해 1차근사보다 나은 디지탈 비선형 조절기를 설계할 수 있기 위해서는 원래의 연속시간 비선형시스템이 어떠한 구조를 가져야 하는 지가 연구되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] C.I. Byrnes and A. Isidori, "Steady State Response, Separation Principle, and The Output Regulation of Nonlinear Systems," *28th Proc. conf. on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2247-2251, 1989.

[2] C.I. Byrnes and Wei Lin "On Discrete-Time Nonlinear Control," *32nd Proc. conf. on Decision and Control*, vol.3, pp. 2990-2996, 1993.

[3] B.A. Francis, "The Linear Multivariable Regular Problem," *SIAM J.Contr.Optimiz.*, vol. 15, pp. 486-505, 1987.

[4] M. Hautus, "Linear Matrix Equations with Applications to the Regulator Problem," *in Outils and Modèles Math. pour l'Auto., I.D. Landau, Ed. Paris: C.N.R.S.*, pp. 399-412, 1983.

[5] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 2nd ed., 1989.

[6] A. Isidori, and C.I. Byrnes, "Output Regulation of Nonlinear Systems," *IEEE trans.. Aut. Contr.*, AC-35, pp. 131-140, 1990.

[7] S. Monaco, S. and D. Normand-Cyrot, "Zero Dynamics od Sampled Nonlinear Systems," *Systems & Control Letter*, pp 229-234, 1988.

[8] 정선태, "선형 샘플치 시스템의 출력궤환", '95 한국자동제어 학술대회 논문집, pp 784-787, oct. 23-25, , 서울, 1995.