Proceedings of the 11th
KACC, October 1996

PI 타입 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어

Variable Structure Control with a PI-type Reaching Law

°금 길 수*, 전 경 한*, 최 봉 열*

*경북대학교 전자공학과(Tel : 950-6553; Fax : 950-5505; E-mail : ctrl@ee.kyungpook.ac.kr)

Abstract In this paper, A new PI-type reaching law for variable structure control is proposed to alleviate the chattering and improve the robustness properties in the presence of matched uncertainty. The proposed reaching law consists of a proportional term and an integral term. And the dynamics of switching function can easily be specified by using the second-order system analysis method. And also the proposed scheme has the advantages of alleviating the chattering than Gao's one and reducing the influence of uncertainties by band pass filter characteristic. The efficiency of the proposed method has been demonstrated by simulations for Dutch Roll damping in a light aircraft.

Keywords Variable structure control, PI-type reaching law, chattering reduction

1. 서론

가변구조 제어(variable structure control)는 스위칭 평면상에서 시스템의 구조를 임의로 변화시켜 슬라이딩 운동(sliding motion)이라는 특이한 동특성을 얻는 제어 방식이다. 이러한 슬라이딩 모드(sliding mode)동안에는 시스템 매개변수 변화와 외부 잡음 등의 불확실성에 강인한 특성을 가지며 빠른 응답 특성과 물리적인 실현이 용이하다는 장점을 가진다 [1]-[2]. 그러나 슬라이딩 모드 동안에는 제어 입력의 빠른 스위칭이 요구되는데 스위칭 주파수의 유한성으로 인하여 스위칭 평면 근처에서 채터링이 발생하게 된다. 이러한 채터링 현상은 시스템의 진동(vibration)을 일으킬 수 있으며 또한 모델링 과정에서 무시되었던 시스템의 고주파 동특성을 여기시켜 제어 대상 시스템을 불안정하게 만들 수 있다. 이와 같은 채터링 문제를 해결하기 위한 연구로는 두 가지 접근 방법이 있다 [3]-[7].

첫 번째는 연속 제어 법칙(continuation control law)을 이용하는 방법이다. Slotine 등 [3]은 불연속 릴레이 형태의 스위치 대신 스위칭 평면을 중심으로 유계층을 설정하여 이 영역 안에서는 연속 제어 입력을 가함으로서 고주파 채터링을 감소시키는 효과를 얻을 수 있었으나 모델화되지 않은 동특성에 의한 저주파 진동과 정상 상태 오차를 발생시킨다는 문제점이 제기 되었다. 이를 개선하기 위하여 Chang 등 [4]은 a first-order plus integral sliding condition을 사용하여 대역 필터 특성을 가지는 스위칭 함수 동특성을 얻었다. 유계층 두께와 스프링 상수로서 대역 필터의 대역폭을 조정하여 불확실성에 대한 견실성과 추적 오차를 개선하였다.

두 번째는 도달 법칙(reaching law)을 이용해서 채터링을 개선하는 방법으로 최근에 많이 연구되어졌다 [5]-[7]. Gao 등 [6]은 Fernandez 등 [5]이 제안한 도달 법칙을 확장하여 도달 구간에서의 스위칭 함수의 동특성을 결정하는 방법을 일반화하였다. 일반적으로 채터링은 도달 모드에서 슬라이딩 모드로 전환하는 동안에 비이상적인 도달에 의해 발생하므로 도달 법칙을 이용하여 도달 구간에서의 동특성을 결정함으로 인해서 채터링을 개선할 수 있고 제어 법칙의 설계도 간단해진다. 그러나 Gao 등이 제안한 도달 법칙은 채터링을 야기시키는 불연속 항을 포함하는 경우가 대부분이다.

본 논문에서는 PI 타입 도달 법칙(proportional-integral type reaching law)을 가지는 가변구조 제어기를 제안한다. 제안된 도달 법칙은 불연속 항을 포함하지 않으므로 기존의 도달 법칙보다 채터링을 상대적으로 개선시킬 수 있고 도달 법칙이 Chang 등 [4]의 스위칭 함수의 동특성과 같이 대역필터 특성을 가지고 있으므로 모델화되지 않은 고주파 동특성을 감쇄 시키기 위해서 대역폭을 도달 법칙의 매개 변수를 조정함으로서 결정 할 수 있다. 또한 도달 모드에서의 동특성을 간단한 2차계 시스템의 해석 방법을 이용하여 쉽게 결정할 수 있다. 모의 실험을 통해서 제안한 제어기의 타당성을 살펴본다.

2. PI 타입 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어

가변구조 제어는 슬라이딩 모드 동안 시스템 매개변수 변화나 외부 잡음에 영향을 받지 않고 빠른 응답 특성과 견실성을 가진다. 그러나 시스템의 상태를 스위칭 평면으로 천이 시키는 도달 구간에서는 시스템의 견실성을 보장하지 못하므로 도달 시간을 줄이기 위하여 Gao 등이 도달 구간에서의 동특성을 결정해 주는 도달 법칙을 이용하였으나 불연속 항을 포함하고 있어서 채터링을 발생시킨다. 본 장에서는 채터링을 개선한 PI 타입 도달 법칙을 제안하고 공칭 시스템과 시스템 매개변수 변동과 외란 등의 불확실성을 포함하는 시스템에 대한 제어 법칙을 설계한다.

2.1. 공칭 시스템에 대한 제어 법칙

다음과 같이 표현되는 단일 입력 시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$는 상태 벡터, $A \in R^{n \times n}$는 선형 공칭 시스템 행렬, $B \in R^{n \times 1}$는 이득 행렬이다. $u \in R$ 는 스칼라 제어 입력, B는 full rank를 가지며 행렬쌍 (A, B)는 완전 제어 가능(completely controllable)하다고 가정한다.

제어 대상 시스템 (1)에 대해 다음과 같은 선형 스위칭 함수를 고려하자.

$$s = Cx \tag{2}$$

여기서 $C \in R^{1 \times n}$ 는 스위칭 평면 행렬이다.

슬라이딩 모드 동안 시스템 동특성을 나타내는 방정식은 다음과 같이 주어진다 [1].

$$\dot{x} = [A - B(CB)^{-1}CA]\,x \tag{3}$$

식 (3)에서 스위칭 평면 행렬 C는 $(A - B(CB)^{-1}CA)$의 고유치들이 원하는 슬라이딩 모드 동특성을 얻을 수 있도록 선택한다.

Gao 등에 의해서 제안된 도달 법칙은 다음과 같다 [5]-[6].

$$\dot{s} = -Ks - Q\,\mathrm{sgn}(s) \tag{4}$$

여기서 K, Q 는 양의 값을 가진다.

$$\mathrm{sgn}(s)=\begin{cases} 1\ , & \text{if } s>0 \\ -1\ , & \text{if } s<0 \end{cases},\ i=1,\cdots,m$$

선형 스위칭 함수 (2)에 대해서 도달 법칙 (4)의 제어 법칙 설계는 공칭 시스템인 경우 식 (2)를 미분하여 식 (1)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다 [6].

$$u=(CB)^{-1}(-CA\,x-K\,s-Q\mathrm{sgn}(\,s)) \tag{5}$$

식 (5)의 제어 법칙을 보면 시스템의 상태가 슬라이딩 모드 동안에 스위칭 평면 위에 머물도록 하기 위해서 스위칭 평면 근처에서 불연속 제어 입력에 의해 채터링을 발생시키는 단점을 가진다. 이러한 채터링을 개선하기 위하여 불연속 항을 가지지 않는 PI 타입 도달 법칙을 제안하고 제안된 도달 법칙을 만족하는 제어 법칙을 설계한다.

다음과 같은 적분기를 포함하는 PI 타입 도달 법칙을 제안한다.

$$\dot{s}=-K_P s-K_I\int s\,dt \tag{6}$$

여기서 K_P , K_I 는 양의 값을 가진다.

식 (6)에서 제안된 도달 법칙은 비례 속도 항과 적분기로 구성되어 있다. 여기서 적분기는 resetting기능을 가진다. 즉 스위칭 함수가 도달 구간에서는 적분을 하고 스위칭 평면에 도달하면 적분기를 reset한다.

제안된 도달 법칙은 불연속 항을 포함하지 않으므로 기존의 도달 법칙보다 상대적으로 채터링을 개선시킬 수 있으며 대역 필터 특성에 의해 대역폭을 조정하여 고주파 동특성을 감쇄시킬 수 있다. 또한 2차계 해석 기법을 이용하면 도달 구간에서의 동특성을 쉽게 예측할 수 있다.

다음은 제안된 PI 타입 도달 법칙에 의해서 공칭 시스템에 대한 제어 법칙을 설계한다.

선형 스위칭 함수 (2)에 대해서 제안된 도달 법칙 (6)을 만족하는 도달 제어 법칙을 구하기 위해 스위칭 함수 (2)를 미분하여 식 (1)을 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{s}&=C\dot{x}\\&=CA\,x+CBu \\&=-K_P s-K_I\int s\,dt\end{aligned} \tag{7}$$

와 같이 된다. 만약 $|CB|\neq 0$ 이라 가정하면 식 (7)을 u에 관해서 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$u=(CB)^{-1}(-CA\,x-K_p s-K_I\int s\,dt) \tag{8}$$

제어 법칙 (8)은 도달 법칙에 불연속 항을 포함하지 않으므로 슬라이딩 모드 동안에 채터링을 개선한다.

2.2. 불확실성을 포함한 시스템에 대한 제어 법칙

시스템 매개변수 변동과 외란 등의 불확실성을 포함하는 시스템에 대한 가변구조 제어에 대해서 알아본다.

다음과 같은 정합 조건을 만족하는 외란이 존재할 경우에 대해서 도달 조건을 만족하는 제어 법칙 설계에 대해서 알아본다.

$$\dot{x}=A\,x+B\,u+f \tag{9}$$

여기서 A,B 는 식 (1)에서와 같고 불확실성 벡터 f 는 다음과 같은 정합 조건을 만족하고 불확실성의 상위 경계치는 알려져 있다고 가정한다.

$$f=B\Delta f,\ \ |\Delta f|<f_{\max} \tag{10}$$

불확실성 시스템 (9)에 대해서 다음과 같이 정의되는 새로운 제어 법칙을 제안한다.

$$u=(CB)^{-1}(-CA\,x-K_P s-K_I\int s\,dt))-f_{\max}\mathrm{sgn}(CBs) \tag{11}$$

정리1

(10)을 만족하는 불확실성에 대하여 가변구조 제어 입력 (11)은 스위칭 함수 (2)를 가지는 시스템 (9)를 견실 안정화시킨다.

증명)

다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V=\frac{1}{2}s^2 \tag{12}$$

(12)를 시간에 대하여 미분하고 여기에 식 (9)를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}&=s\dot{s}\\&=s(CA\,x+CBu+CB\Delta f)\end{aligned} \tag{13}$$

(13)에 (11)를 대입하면

$$\begin{aligned}\dot{V}&=s(-K_P s-K_I\int s\,dt-CBf_{\max}\mathrm{sgn}(CBs)+CB\Delta f))\\&=s(-K_P s-K_I\int s\,dt)+sCB(\Delta f-f_{\max}\mathrm{sgn}(CBs))\\&<0\end{aligned} \tag{14}$$

이다. 그러므로 가변구조 제어 입력 (11)는 불확실성 시스템 (9)를 견실 안정화시킨다. ■

식 (10)에서 주어진 정합 조건을 만족하는 외란이 존재하는 경우에 대해서 식 (4)의 도달 법칙을 사용하여 정리 1과 같이 제어 법칙을 구하면 다음과 같이 주어진다.

$$u=(CB)^{-1}(-CA\,x-Ks-Q\mathrm{sgn}(s))-f_{\max}\mathrm{sgn}(CBs) \tag{15}$$

다음은 정합 조건을 만족하는 섭동이 존재하는 불확실 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}=(A+\Delta A)\,x+B\,u \tag{16}$$

여기서 ΔA는 다음과 같이 정합 조건을 만족하고 각 요소는 다음과 같이 상위 경계치는 알려져 있다고 가정하자.

$$\Delta A=B\Delta\tilde{A} \tag{17}$$

여기서 $\Delta\tilde{A}=[\Delta\,\tilde{a}_1,\cdots,\Delta\,\tilde{a}_n]$, $|\Delta\,\tilde{a}_i|<\tilde{a}_{\max}$, $i=1,\cdots,n$ 이다.

불확실성 시스템 (16)에 대해서 다음과 같이 정의되는 새로운 제어 법칙을 제안한다.

$$u=(CB)^{-1}(-CA\,x-K_P s-K_I\int s\,dt)-\tilde{a}_{\max}\sum_{i=1}^{n}|x_i|\mathrm{sgn}(CBs) \tag{18}$$

정리 2

(17)을 만족하는 불확실성에 대하여 가변구조 제어 입력 (18)은 스위칭 함수 (2)를 가지는 시스템 (16)를 견실 안정화시킨다.

증명)

다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V=\frac{1}{2}s^2 \tag{19}$$

(19)을 시간에 대하여 미분하고 여기에 식 (16)를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}&=s\dot{s}\\&=s(CA\,x+CB\Delta\tilde{A}\,x+CBu)\end{aligned} \tag{20}$$

(20)에 (18)를 대입하면

$$\dot{V} = s((CB\Delta\tilde{A}\boldsymbol{x} - K_P s - K_I \int s\,dt) - CB\ \tilde{a}_{\max} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \mathrm{sgn}(CBs))$$
$$= s(-K_P s - K_I \int s\,dt) + sCB(\Delta\tilde{A}\boldsymbol{x} - \ \tilde{a}_{\max} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \mathrm{sgn}(CBs)) \quad (21)$$
$$< 0$$

이다. 그러므로 가변구조 제어 입력 (18)는 불확실성 시스템 (16)를 견실 안정화시킨다 ■

본 장에서는 기존의 도달 법칙이 가지는 채터링 문제를 개선하기 위하여 PI 타입 도달 법칙을 제안하였고 불확실성을 포함하는 시스템에 대해서 제안된 도달 법칙을 만족하는 제어 법칙을 설계하여 안정성에 대해서 살펴보았다.

3. 모의 실험 및 고찰

제안된 도달 법칙의 타당성을 보이기 위해 경비행기에서 Dutch Roll damping을 위한 가변구조 제어기 설계에 대해서 고려한다. 33m/s의 속도에서 경비행기의 선형화된 모델은 다음과 같이 주어진다 [8].

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + Bu + f \quad (22)$$

여기서 v는 sideslip velocity(m/s), r은 yaw rate(rad/s), τ 는 rudder angle(rad)이고 $\boldsymbol{x}$, A, B는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} v \\ r \\ \tau \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -0.277 & -32.98 & -5.432 \\ 0.365 & -0.319 & -9.49 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

제어 입력은 방향타 각도로 다음과 같다.

$$u = \tau_c$$

개루프 시스템에서 Dutch roll mode의 감쇄비는 0.0856인데 슬라이딩 모드에서 Dutch roll mode에 대한 감쇄비를 0.706으로 설정하려고 하면 슬라이딩 평면의 고유치는 다음과 같이 된다.

$$\lambda_1, \lambda_2 = -1.5 \pm 1.5j \quad (23)$$

슬라이딩 모드에서의 동특성이 식 (23)의 고유치를 가지도록 하는 슬라이딩 평면 행렬을 식 (3)에 의해서 구하면 다음과 같다.

$$C = [\,-0.0028\ \ -0.0237\ \ 0.1\,] \quad (24)$$

모의 실험은 초기 편차를 $\boldsymbol{x}_0 = [\,2.0\ \ 0.05\ \ 0\,]^T$와 같이 두고 Gao 등의 비례항을 포함한 도달 법칙과 PI 타입 도달 법칙에 대해서 공칭 시스템과 정합 조건을 만족하는 외란이 존재하는 시스템에 대해 모의 실험을 한다. 제어법칙은 식 (5), (8), (11), (15)를 사용하여 모의 실험을 한다. 매개변수 값은 표 1과 같으며 두 방법의 비교를 위해 도달 기간이 동일하도록 K, Q와 K_P, K_I를 설계하였다.

표 1. 모의 실험을 위한 매개 변수

Table 1. Parameters for simulations.

Gao의 도달 법칙[6]	제안된 도달 법칙
K = 2	K_P = 2
Q = 0.014	K_I = 2
Δf = 0.001 sin 12t	Δf = 0.001 sin 12t

모의 실험은 두 경우 모두 동일한 도달 시간과 슬라이딩 모드 동특성을 가지도록 설계하였으므로 상태 벡터의 궤적은 거의 동일하므로 스위칭 함수와 제어 입력만을 나타냈다.

그림 1과 그림 2에서 공칭 시스템인 경우의 제어 입력을 보면 스위칭 평면 근처에서 입력의 채터링이 발생한다는 것을 볼 수 있으나 제안된 방식은 도달 법칙에 불연속 항을 포함하지 않으므로 그림 2-(b)에서 보는 것처럼 채터링이 현저히 감소되었음을 볼 수 있다.

그림 3과 그림 4는 정합 조건을 만족하는 외란을 포함한 시스템에 대한 모의 실험이다. 제안된 방식이 기존의 방식보다 채터링의 크기도 작고 대역 필터 특성에 의해서 고주파 성분이 필터링되어 상대적으로 채터링이 감소되었음을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 불연속 항을 포함하지 않는 PI-타입 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어기를 제안하였다. Gao 등[6]이 제안한 도달 법칙은 불연속 항을 포함하게 되어 채터링을 일으키는 문제점이 있다. 제안된 도달 법칙은 기존의 도달 법칙과 달리 채터링을 발생시키는 불연속 항을 포함하지 않으므로 기존의 도달 법칙보다 채터링의 크기를 감소시키고 도달 법칙의 대역 필터 특성에 의해서 모델화 되지 않은 고주파 동특성을 감쇄 시켰다. 또한 간단한 2차계 해석 방법을 이용하여 도달 모드 동특성을 쉽게 예측할 수 있고 유한 도달 시간을 가짐을 알 수 있다. 제안한 제어기의 타당성을 보이기 위해 경비행기에서 Dutch Roll damping을 위한 가변구조 제어기에 대하여 모의 실험을 수행하였다.

참고문헌

[1] V. I. Utkin, "Variable structure system with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.

[2] O. M. E. EL-Ghezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *Int. J. Contr.*, vol. 38, no. 3, pp. 657-671, 1983.

[3] J. J. E. Slotine, "Sliding controller design for nonlinear systems," *Int. J. Contr.*, vol. 40, no. 2, pp. 421-434, 1984.

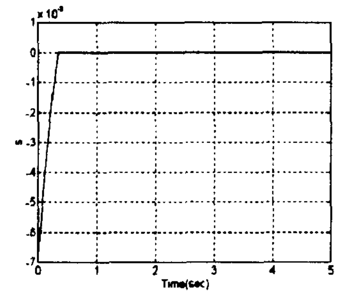
[4] L. Y. Chang, "A MIMO sliding control with a first-order plus integral sliding condition," *Automatica*, vol. 27, no. 5, pp. 853-858, 1991.

[5] R. B. Fernandez and J. K. Hedrick, "Control of multivariable nonlinear systems by the sliding mode method," *Int. J. Contr.*, vol. 46, no. 3, pp. 1019-1040, 1987.

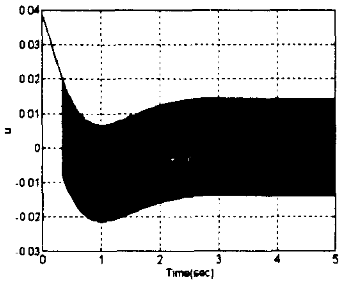
[6] W. B. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems : A new approach," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, pp. 45-55, 1993.

[7] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control : A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993

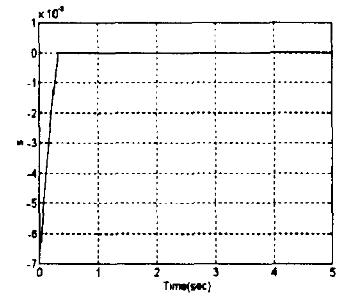
[8] S. K. Spurgeon, "Choice of discontinuous control component for robust sliding mode performance," *Int. J. Contr.*, vol. 53, no. 1, pp. 163-179. 1991.



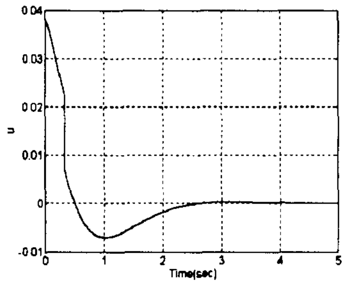
(a) switching function.



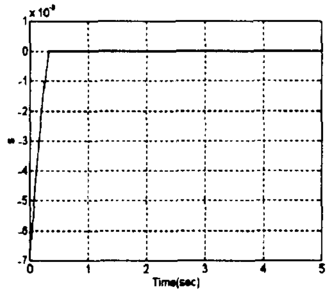
(b) control input.
그림 1. 공칭 시스템에 대한 가변구조 제어(Gao의 방식)
Fig. 1. VSC for nominal system (Gao's method).



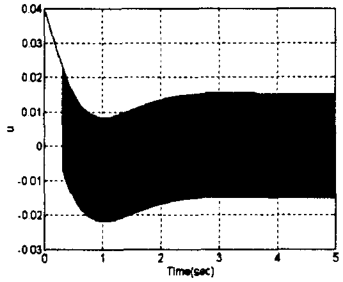
(a) switching function.



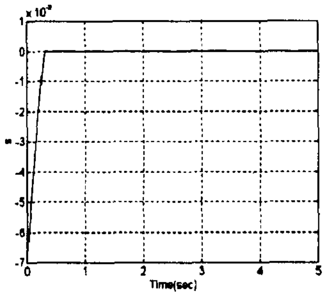
(b) control input.
그림 2. 공칭 시스템에 대한 가변구조 제어(제안된 방식)
Fig. 2. VSC for nominal system (Proposed method).



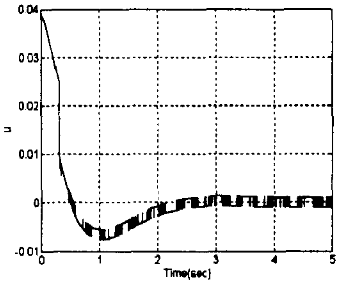
(a) switching function.



(b) control input.
그림 3. 불확실성을 포함하는 시스템에 대한 가변구조 제어(Gao의 방식)
Fig. 3. VSC for system with uncertainties (Gao's method).



(a) switching function.



(b) control input.
그림 4. 불확실성을 포함하는 시스템에 대한 가변구조 제어(제안된 방식)
Fig. 4. VSC for system with uncertainties (Proposed method).