

초기 오차와 시간 지연을 고려한 선형 플랜트에 대한  
강인한 반복 학습 제어기의 설계

Design of Robust Iterative Learning Controller for  
Linear Plant with Initial Error and Time-delay

°박광현\*, 변증남\*\*, 황동환\*\*\*

\*한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (Tel : 869-5419; Fax : 869-8750; E-mail : akaii@ctrgate.kaist.ac.kr)

\*\*한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (Tel : 869-3419; Fax : 869-8750; E-mail : zbien@ee.kaist.ac.kr)

\*\*\*충남 대학교 전자공학과 (Tel : 821-5670; Fax : 823-5436; E-mail : dhhwang@hanbat.chungnam.ac.kr)

Abstracts In this paper, we are going to design an iterative learning controller with the robust properties for initial error. For this purpose, the PID-type learning law will be considered and the design guide-line will be presented for the selection of the learning gain. Also, we are going to suggest a condition for the convergence of control input for a plant with input delay. Several simulation results are presented, which shows the effectiveness of the proposed algorithms.

Keywords Iterative Learning, Initial Error, Time-delay, Asymptotic Tracking, PID

1. 서론

근래에 매우 정밀한 제어 시스템에 대한 요구가 늘어남에 따라 기존의 제어가 가지는 한계를 극복할 수 있는 제어 기법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 한 가지 방법으로 플랜트의 동특성에 대한 정보가 불확실한 경우에도 같은 동작을 반복적으로 수행함에 따라 주어진 목표 궤적을 정밀하게 추종할 수 있는 반복 학습 제어 기법을 들 수 있는데, Uchiyama[1]가 이 제어 기법을 처음으로 제안하였고 그 후 Arimoto[2] 등이 이론적으로 정립하였다.

하지만 반복 학습 제어 기법을 실제 적용할 때 문제시 되는 몇 가지 제약이 여전히 남아 있다. 대표적으로 플랜트 출력이 초기 오차가 존재하는 경우의 수렴성 보장 문제와 입력이나 출력에 시간 지연이 존재할 때 반복 학습 제어기의 적용 가능성을 들 수 있다. 반복 학습 제어는 경로의 완전 추종을 위해 매 반복 시 초기값 오차가 없는 것을 가정한다. 하지만, 초기값을 원하는 값으로 정확하게 일치시키기는 매우 어렵기 때문에 초기값 오차는 일반적으로 존재하게 된다. K.H.Lee와 Z.Bien[3]은 이러한 초기값 오차에 의해 제어 입력이 발산할 수 있음을 보였다. 또한 H.S.Lee[4]는 초기값 오차가 존재하는 경우에 대해 PD형 반복 학습 법칙을 사용하여 매 반복 시의 초기에 생긴 오차가 시간이 지남에 따라 감소하는 근사 추종에 대해 다루었으며 학습 법칙의 파라미터를 결정하는 설계 지침을 제시하였다. 시간 지연이 있는 플랜트에 반복 학습 제어를 적용할 때, 지연 시간에 대한 추정 오차가 존재하면 제어 입력이 발산할 가능성이 있다[5]는 정도의 연구 결과만을 볼 수 있을 뿐 이에 대한 연구 결과는 아직 거의 찾아볼 수 없다.

본 논문에서는 H.S.Lee[4]의 결과에 대한 확장으로 PID형 반복 학습 법칙에 대한 근사 추종을 다룰 것이며 초기에 생긴 오차가 시간이 지남에 따라 감소하는 형태를 임의로 정할 수 있음을 보일 것이다. 또한 플랜트의 입력 신호에 시간 지연이 존재하는 경우에 대해서 제어 입력이 수렴하기 위한 조건을 제시할 것이다. 끝으로, 제안한 반복 학습 제어 기법의 유용성을 시뮬레이션을 통해 보일 것이다.

2. 초기값 오차의 영향을 감소시키기 위한  
PID형 반복 학습 법칙

본 절에서는 매 반복 시 초기값 오차가 일정한 경우와 변하는 경우 각각에 대해 PID형 반복 학습 법칙을 적용시켰을 때 출력의 오차 한계를 계산하고 시간에 따른 오차의 감소 형태를 임의로 정하기 위한 설계 지침을 제시한다.

본 절에서 다루고자 하는 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $y \in R^q$ 는 각각 상태, 입력, 출력을 나타내며  $A, B, C$ 는 적절한 차수를 가지는 행렬이다.  $CB, B$ 는 계수(rank)가 각각의 행 수와 열 수의 최소값과 같다고 가정하자.

사용되는 노름(norm)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq m} |f_i| \\ \|G\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |g_{ij}| \\ \|h(t)\|_{\lambda} &= \sup_{t \in [0, T]} e^{-\lambda t} \|h(t)\|, \lambda > 0 \end{aligned}$$

이 때  $f = [f_1 \ \dots \ f_n]^T$ ,  $G = [g_{ij}]_{m \times n}$ ,  $h: [0, T] \rightarrow R$ 이다.

본 논문에서 아래 첨자  $k$ 는 반복 시행 횟수를 나타낸다.

2.1. 초기값 오차가 일정한 경우

다음과 같은 PID형 반복 학습 법칙을 생각해 보자.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \left( \dot{e}_k(t) + R_0 e_k(t) + R_1 \int_0^t e_k(\tau) d\tau \right) \quad (2)$$

여기서

$$\begin{aligned} e_k(t) &= y_d(t) - y_k(t) \\ R_i &\in R^{q \times q}, i = 0, 1 \\ t &\in [0, T] \text{이다.} \end{aligned}$$

정리 1 학습 법칙 (2)를 시스템 (1)에 적용하고 매 반복 시 초기값이 일정하다고 하면, 즉,  $x_k(0) = x_0, k = 0, 1, 2, \dots$  일 때,

$$\begin{aligned} \|I_q - CB\Gamma\|_{\infty} &\leq \rho < 1 \text{ 이면,} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) &= y_d(t) + C_R e^{-\lambda t} \chi_0 \text{이다.} \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_R &= \begin{bmatrix} 0_{q \times q} & I_{q \times q} \\ -R_1 & -R_0 \end{bmatrix} \\ C_R &= \begin{bmatrix} I_{q \times q} & 0_{q \times q} \end{bmatrix} \\ \chi_0 &= \begin{bmatrix} I_{q \times q} \\ -R_0 \end{bmatrix} C(x_d(0) - x_0) \end{aligned}$$

증명 부분 참조

주 1 초기값 오차가 생기는 이유는 크게 두 가지가 있다. 첫번째는 출력의 초기값을 목표 출력 궤적의 초기값에 정확하

계 일치시킬 수는 있지만 이에 해당하는 상태 변수의 초기값이 결정되지 않음으로 인해 오차가 생기는 경우이고, 두번째는 초기값을 주어진 목표 궤적의 초기값에 정확히 일치시키기가 어렵기 때문에 오차가 생기는 경우이다. 따라서 이러한 초기값 오차는 매 반복 시 변할 수도 있는데 이 경우에 대해서는 제 2.2 절에서 다루기로 하자.

**주 2** Arimoto[2]는 초기값 오차가 없다고 가정하고 오차의 미분값만을 사용하는 D 형 반복 학습 법칙( $R_0 = R_1 = 0$ )을 시스템 (1)에 적용함으로써  $\|I - CB\|_x \leq \rho < 1$  이면  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$  임을 보였으며, H.S.Lee[4]는 매 반복 시의 초기값 오차가 일정할 때, 즉,  $x_k(0) = x_0 \neq x_d(0)$  일 때, 오차와 오차의 미분값을 사용하는 PD 형 반복 학습 법칙( $R_0 = -R, R_1 = 0$ )을 (1)에 적용함으로써  $\|I - \Gamma CB\|_x \leq \rho < 1$  이면,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t) + e^{Rt} C(x_0 - x_d(0))$  이 된다는 사실을 보였다. 이러한 근사 추종의 관점에서 보면 PID 형 반복 학습 법칙은 PD 형 반복 학습 법칙의 확장으로 생각할 수 있으며, 근사 추종의 형태는 보다 다양하게 결정될 수 있다.

**주 3** 정리 1 에서 출력 궤적은 주어진 목표 궤적과 파라미터  $R_0, R_1$ 에 의해 정확하게 예측될 수 있다. 또한,  $A_R$ 의 고유치는  $R_0, R_1$ 을 조절하여 임의로 정할 수 있으므로 출력 궤적이 주어진 목표 궤적에 근사 추종하는 형태를 임의로 정할 수 있다. 이 때, 근사 추종을 위해서는  $A_R$ 의 모든 고유치의 실수부가 음이 되도록  $R_0, R_1$ 을 결정하여야 한다.

**주 4** 반복 학습 법칙 (2)를 더욱 확장하여

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \left( \begin{array}{l} \dot{e}_k(t) + R_0 e_k(t) + R_1 \int_0^t e_k(\tau_1) d\tau_1 \\ + R_2 \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} e_k(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ + R_{m-1} \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{m-1}} e_k(\tau_{m-1}) d\tau_{m-1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \end{array} \right) \quad (3)$$

와 같은 형태의 반복 학습 법칙을 시스템 (1)에 적용시켰을 때, 정리 1 에서

$$A_R = \begin{bmatrix} O_{(m-1)q \times q} & I_{(m-1)q \times (m-1)q} \\ -R_{m-1} & -R_{m-2} \dots -R_1 - R_0 \end{bmatrix}$$

$$C_R = \begin{bmatrix} I_{q \times q} & 0_{q \times q} & 0_{q \times q} & \dots & 0_{q \times q} \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -R_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -R_1 & -R_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -R_{m-2} & -R_{m-3} & \dots & -R_0 & 0 \end{bmatrix}^{m-1} \begin{bmatrix} I_{q \times q} \\ 0_{q \times q} \\ \vdots \\ 0_{q \times q} \end{bmatrix} C(x_d(0) - x_0)$$

로 되어  $m \times q$  개의 고유치를 임의로 정할 수 있으므로 근사 추종 형태를 결정할 때 더 많은 자유도가 주어지게 된다.

## 2.2. 초기값 오차가 가변적인 경우

모든 상태 벡터는 관측 가능하다고 가정하고, 다음과 같은 PID 형 반복 학습 법칙을 생각해 보자.

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma \left( \dot{\delta x}_k(t) + M_0 \delta x_k(t) + M_1 \int_0^t \delta x_k(\tau) d\tau \right) \quad (4)$$

여기서

$$\delta x_k(t) = x_d(t) - x_k(t) \text{ 이다.}$$

$$M_i \in R^{n \times n}, i = 0, 1$$

**정리 2** 학습 법칙 (4)를 시스템 (1)에 적용하고 매 반복 시 초기값의 최대 변화 범위가  $\|\delta x_k(0)\|_z \leq \Delta$  로 주어졌을 때,

$$\|I_r - \Gamma B\|_z \leq \rho < 1 \text{ 이면.}$$

$k \rightarrow \infty$  일 때  $\|x_d + C_M e^{Mk} \delta x_k(0) - x_k\|_z$  의 최대값은

$$\|e^{Mk} M - A' e^{-A'k}\|_z \cdot \|e^{Mk} - e^{-A'k}\|_z \cdot \Delta \text{ 에 의해 결정된다.}$$

여기서

$$M = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_1 & -M_0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & A \end{bmatrix}$$

$$C_M = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}$$

**증명** 부록 참조

**주 1** 오차의 한계를 줄이기 위해서는  $M \equiv A'$  이 되도록  $M$  을 정해주는 것이 바람직하다. 즉,  $M_0 \equiv -A, M_1 \equiv 0$  이 되도록 하는 것이 좋다.

**주 2**  $M_0, M_1$  는 오차의 한계뿐 아니라, 초기값 오차가 일정한 경우에서도 같이 오차의 감소 형태에도 영향을 미친다. 따라서 이러한 두 가지 요소를 모두 생각하면서 파라미터 값을 결정해야 하는데, 이는 [4]에서 보다 더 많은 자유도가 주어지기 때문에 보다 다양하게 선택되어질 수 있다.

## 3. 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 대한 반복 학습 법칙

입력에 시간 지연이 존재하는 다음과 같은 시스템 (5)를 생각해 보자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5)$$

여기서  $h > 0$  는 지연 시간을 나타낸다.

문제를 간단히 하기 위하여 단일 입출력이고, 초기값 오차가 없다고 가정하고, 주파수 영역에서의 다음 (6)과 같은 반복 학습 법칙을 생각해 보자.

$$U_{k+1}(s) = U_k(s) + \Gamma(s)(Y_d(s) - Y_k(s)) \quad (6)$$

**정리 3** 반복 학습 법칙 (6)을 시스템 (5)에 적용하고 매 반복 시 초기값 오차가 없다고 할 때, 모든  $s \in C$  에 대해

$$|1 - \Gamma(s)G(s)e^{-hs}| < 1 \text{ 이면, } \lim_{k \rightarrow \infty} |Y_d(s) - Y_k(s)| = 0 \text{ 이다.}$$

여기서

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

**증명**

$$|U_d(s) - U_{k+1}(s)| \leq |1 - \Gamma(s)G(s)e^{-hs}| |U_d(s) - U_k(s)|$$

$$|1 - \Gamma(s)G(s)e^{-hs}| < 1 \text{ 이면 } \lim_{k \rightarrow \infty} |U_d(s) - U_k(s)| = 0$$

$$|Y_d(s) - Y_k(s)| \leq |G(s)e^{-hs}| |U_d(s) - U_k(s)| \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |Y_d(s) - Y_k(s)| = 0$$

**증명** 끝

**주 1** 기존의 P 형, PD 형, PI 형, PID 형 반복 학습 법칙 등은 주파수 영역에서 유리 함수의 형태이므로 (6)과 같이 표현될 수 있다.  $H(s) = \Gamma(s)G(s)$  라 할 때,

$$|1 - H(j\omega)e^{-j\omega h}|^2 = (1 - H(j\omega)^* e^{j\omega h})(1 - H(j\omega)e^{-j\omega h})$$

$$= 1 + H^2(j\omega) - H^*(j\omega)e^{j\omega h} - H(j\omega)e^{-j\omega h}$$

$$= 1 + H^2(j\omega) - 2 \operatorname{Re}\{H(j\omega)e^{-j\omega h}\}$$

$$= 1 + H^2(j\omega) - 2 \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} \cos(h\omega) + 2 \operatorname{Im}\{H(j\omega)\} \sin(h\omega)$$

$$= 1 + H^2(j\omega) - 2A_m \cos(h\omega + \phi)$$

여기서

$$A_m = \left\{ \text{Re}[H(j\omega)]^2 + \text{Im}[H(j\omega)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \right)$$

이다.

$\cos(h\omega + \varphi) \leq 0$  이 되는 주파수 영역이 존재하기 때문에  $|1 - H(j\omega)e^{-h\omega}| \geq 1$  인 주파수 영역이 존재하게 된다. 따라서 주파수 영역에서 유리 함수로 표현되는 기존의 반복 학습 법칙이 입력에 시간 지연이 있는 시스템에 적용되었을 때에는 제어 입력이 발산하는 주파수 영역이 존재한다.

주 2 지연 시간을 추정하면 다음 (7)과 같은 반복 학습 법칙을 생각할 수 있다.

$$U_{k+1}(s) = U_k(s) + \Gamma'(s)e^{\eta s} (Y_d(s) - Y_k(s)) \quad (7)$$

여기서  $\eta$  는 추정된 지연 시간이다.

이 때, 지연 시간의 추정에 오차가 존재하면,  $\Delta = \eta - h$  라 할 때, 정리 3 에서  $\Gamma(s)$  대신  $\Gamma'(s)$  을,  $h$  대신  $\Delta$  를 대입한 경우와 같으므로 마찬가지로 제어 입력이 발산하는 주파수 영역이 존재한다.

주 3 정리 3 의 조건을 만족시키기 위해서는  $e^{-hs}$  를 완전히 상쇄시키는 반복 학습 법칙을 설계해야 한다.

#### 4. 수치 예

제안된 반복 학습 법칙의 유용성을 보이기 위해 다음 (8)과 같은 시스템을 생각해 보자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (8)$$

$$y(t) = [0 \ 1]x(t)$$

##### 4.1. 초기값 오차가 일정한 경우

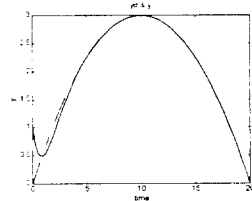
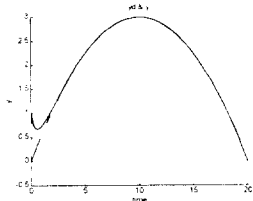
$$y_d(t) = 0.03t(20-t), \quad 0 \leq t \leq 20 \quad (9)$$

$$x_k(0) = x_0 = 1, \quad k = 0.1, 2, \dots$$

목표 출력 궤적과 초기값 오차가 (9)일 때, 다음의 그림 1 은  $R_0, R_1$  의 값에 의해 수렴된 오차 궤적의 형태가 다양하게 결정될 수 있음을 나타낸다. 이 때, 정리 1 과 (8)에서  $CB=1$  이므로 최적의  $\Gamma$  는 1 이지만 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하여  $\Gamma = 1/1.3$  으로 하였다.

(a)  $R_0 = 2, R_1 = 0$

(b)  $R_0 = 2, R_1 = 2$



(c)  $R_0 = 2, R_1 = 1$

(d)  $R_0 = 0.5, R_1 = 2$

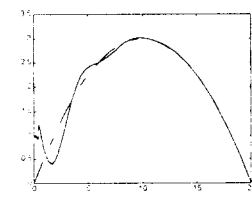
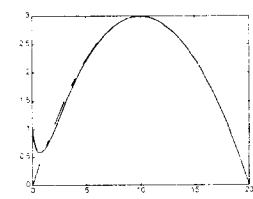


그림 1. 초기값 오차가 일정한 경우

Fig 1. Constant Initial Error

##### 4.2. 초기값 오차가 가변적인 경우

초기값 오차, 목표 상태 궤적이 다음과 같다고 하자.

$$x_d(t) = \begin{cases} 0.3t^2 - 0.01t^3, & 0 \leq t \leq 20 \\ 0.03t(20-t), & 0 \leq t \leq 20 \end{cases} \quad (10)$$

$$x_k(0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

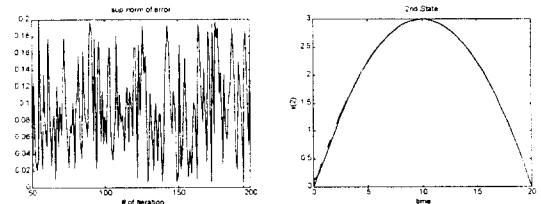
여기서  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  는  $[-0.2, 0.2]$  의 균등 분포를 따른다.

목표 상태 궤적과 초기값 오차가 (10)과 같고, 시스템 파라미터의 불확실성을 고려하여  $\Gamma = [0 \ 1/1.3]$  로 하였다.

다음의 그림 2 는  $M_0 \cong -A, M_1 \cong 0$  으로 하였을 때 오차 한계를 초기값의 최대 변화 범위보다 작게 하면서 오차 궤적의 형태를 다양하게 결정할 수 있음을 보인다.

즉,  $|x_{2,d}(0) - x_{2,k}(0)| \leq 0.2$  이므로 최대 노름 (sup-norm) 이 0.2 보다 작게 되며 오차 궤적의 형태는 초기값 오차가 일정한 경우에서와 같이  $M_0, M_1$  에 의해 다양하게 결정될 수 있다.

(a)  $M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.2 & 3.2 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  일 때 두번째 상태 변수의 최대 노름과 상태 궤적(200번째 반복)



(b)  $M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.2 & 3.2 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$  일 때 두번째 상태 변수의 최대 노름과 상태 궤적(200번째 반복)

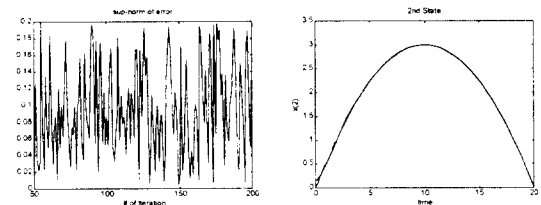


그림 2. 초기값 오차가 가변적인 경우

Fig 2. Variable Initial Error

#### 5. 결론 및 추후 연구 과제

본 논문에서는 첫째, 매 반복 시 초기값 오차가 존재하는 경우에 대해 근사 추종이라는 관점에서 PD형 반복 학습 법칙의 확장이라고 할 수 있는 PID형 반복 학습 법칙을 제안하고 각 학습 파라미터를 결정하기 위한 설계 지침을 제시하였다. 또한 PD형 학습 법칙과 비교할 때 오차 궤적의 형태를 좀 더 다양하게 결정할 수 있음을 보였다. 둘째, 입력에 시간 지연이 존재하는 경우에 대한 수렴 조건을 제시하였으며, 주파수 영역에서 유리 함수 형태로 표현되는 기존의 반복 학습 법칙과 지연 시간에 대한 추정 오차가 있는 반복 학습 법칙을 적용시켰을 때에는 제어 입력이 발산하는 주파수 영역이 존재함을 보였다.

반복 학습 제어의 새로운 영역으로, 시간 지연이 있는 플랜트에 대한 반복 학습 법칙의 설계가 앞으로 많이 연구되어야 할 부분이다.

#### 참고 문헌

- [1] M. Uchiyama, "Formation of high speed motion pattern of mechanical arm by trial", *Transaction of the Society of*

*Instrumentation and Control Engineering*, vol. 19, pp. 706-712, May 1978.

- [2] S.Arimoto, S.Kawamura, and F.Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning", *Journal of Robotic System*, vol. 1, no. 2, pp. 123-140, 1984.
- [3] K. H. Lee, Z. Bien, "Initial condition problem of learning control", *IEE Proc. Part D*, vol. 138, no. 6, pp. 525-528, 1991.
- [4] H. S. Lee, *Study on the Robustness and the Convergence Properties of Iterative Learning Controller*, Ph. D. Dissertation, KAIST, 1996.
- [5] L.M.Hideg, "Stability and Convergence Issues in Iterative Learning Control : Part II", *International Symposium on Intelligent Control*, 1996.

## 부록

### 정리 1 증명

$\hat{y}_k(t) = y_k(t) + C_R e^{-\lambda t} \chi_0$  라 하면,

$$\frac{d}{dt} (C_R e^{-\lambda t} \chi_0) + R_0 C_R e^{-\lambda t} \chi_0 + R_1 \int_0^t C_R e^{-\lambda \tau} \chi_0 d\tau = 0$$

이므로 (2)에서

$$\begin{aligned} \hat{e}_{k+1} &= y_d - \hat{y}_{k+1} \\ &= \hat{e}_k - C \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B(u_{k+1} - u_k) d\tau \\ &= \hat{e}_k - C \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B \Gamma \left( \dot{\hat{e}}_k + R_0 \hat{e}_k + R_1 \int_0^\tau \hat{e}_k d\sigma \right) d\tau \\ &= (I - CB\Gamma) \hat{e}_k + CA \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B \Gamma \hat{e}_k d\tau \\ &\quad - C \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B \Gamma \left( R_0 \hat{e}_k + R_1 \int_0^\tau \hat{e}_k d\sigma \right) d\tau \\ \|\hat{e}_{k+1}\|_\lambda &\leq \|I - CB\Gamma\|_\infty \|\hat{e}_k\|_\lambda + \|CA\|_\infty \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \|B\Gamma\|_\infty \|\hat{e}_k\|_\lambda \\ &\quad + \|C\|_\infty \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \|B\Gamma\|_\infty \left( \|R_0\|_\infty + \|R_1\|_\infty \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \right) \|\hat{e}_k\|_\lambda \end{aligned}$$

여기서  $a = \|A\|_\infty$ .

조건에서  $0 \leq \rho < 1$  이므로, 다음 부등식을 만족하는  $\lambda$  를 선택할 수가 있다.

$$\rho_0 = \frac{\rho + \|CA\|_\infty \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \|B\Gamma\|_\infty}{\|C\|_\infty \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \|B\Gamma\|_\infty \left( \|R_0\|_\infty + \|R_1\|_\infty \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \right)} < 1$$

따라서

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_{k+1}\|_\lambda &\leq \rho_0 \|\hat{e}_k\|_\lambda \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{e}_k\|_\lambda &= 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k &= y_d + C_R e^{-\lambda t} \chi_0 \end{aligned}$$

### 정리 2 증명

$$X_k(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t x_k(\tau) d\tau \\ x_k(t) \end{bmatrix}, X_d(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t x_d(\tau) d\tau \\ x_d(t) \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \Gamma' = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

라 할 때, (1)과 (3)은 각각

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A'X(t) + B'u(t) \\ u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \Gamma' \left( \delta \hat{X}_k(t) - M \delta X_k(t) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

로 표현될 수 있다.

$u_o(t), v_k(t)$  를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$X_d(t) = e^{-\lambda t} X_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B' u_o(\tau) d\tau$$

$$e^{-\lambda t} \delta \hat{X}_k(0) + e^{-\lambda t} \delta X_k(0) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B' v_k(\tau) d\tau$$

또한  $\hat{X}_k^d(t) = X_d(t) + e^{-\lambda t} \delta \hat{X}_k(0)$  라 하면,

$$\frac{d}{dt} \left( e^{-\lambda t} \delta \hat{X}_k(0) \right) + M_0 e^{-\lambda t} \delta \hat{X}_k(0) + M_1 \int_0^t e^{-\lambda \tau} \delta \hat{X}_k(0) d\tau = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} \delta u_{k+1} &= \delta u_k - \Gamma' \left( \hat{X}_k^d - \dot{X}_k \right) + \Gamma' M \left( \hat{X}_k^d - X_k \right) \\ &= (I - \Gamma' B') \delta u_k \\ &\quad - \Gamma' (A' - M) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B' \delta u_k - \left( e^{-\lambda t} M - A' e^{-\lambda t} \right) \delta X_k(0) \end{aligned}$$

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \left( \rho + h \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \right) \|\delta u_k\|_\lambda + \|e^{-\lambda t} M - A' e^{-\lambda t}\|_\lambda \Delta$$

여기서  $h = \|\Gamma' (A' - M)\|_\infty \|B'\|_\infty$ .

$a = \|A'\|_\infty$  이다.

조건에서  $0 \leq \rho < 1$  이므로, 다음 부등식을 만족하는  $\lambda$  를 선택할 수가 있다.

$$\rho_0 = \rho + h \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} < 1$$

따라서

$$\|\delta u_{k+1}\|_\lambda \leq \rho_0 \|\delta u_k\|_\lambda + \|e^{-\lambda t} M - A' e^{-\lambda t}\|_\lambda \Delta$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta u_k\|_\lambda \leq \frac{1}{1 - \rho_0} \|e^{-\lambda t} M - A' e^{-\lambda t}\|_\lambda \Delta$$

$$\hat{X}_k^d - X_k = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} B \delta u_k d\tau + \left( e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \right) \delta X_k(0) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_d + C_R e^{-\lambda t} \delta x_k(0) - x_k\|_\lambda &\leq \frac{1 - e^{-(\lambda-a)T}}{\lambda - a} \|B\|_\infty \frac{1}{1 - \rho_0} \|e^{-\lambda t} M - A' e^{-\lambda t}\|_\lambda \Delta + \|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\|_\lambda \Delta \end{aligned}$$