

슬라이딩 모드를 이용한 개선된 도립진자 시스템 제어기에 관한 연구

A Study of Improved Inverted Pendulum Controller using Sliding Mode

°이 규 형*, 이 태 봉**, ***박 준 열

*홍익대학교 전자공학과 (Tel: 320 - 1123; Fax: 320 - 1119)

**경원전문대학 전자과(Tel: 0342 - 750 - 5755)

*** 홍익대학교 전자공학과(Tel: 320 - 1636; Fax: 320 - 1119; E-mail: parkjy@www.hongik.ac.kr)

Abstracts The inverted pendulum system is mechanical system which can handle the modern control theory and practical applications. In theoretical field, it is used as the experimental device identifying the effects of control method and in applicative field There are difficulties in designing or linearizing the practical controller because it is so sensitive to the parameter variation and has the highly non-linear characteristic.

In this paper, we suggested the systems which compensate the non-linearity throughout the internal control method and designed controller which is robust to the parameter variation using sliding mode.

Keywords inverted pendulum system, practical controller, internal control method, sliding mode.

1. 서론

도립진자 시스템은 현대 제어이론과 응용 문제를 취급할 수 있는 불안정성이 강한 기계적인 시스템이다. 이론 부분에서는 고전 및 현대의 다양한 제어방식의 효과를 확인하는 실험 장치로 사용되고, 응용 부분에서는 특히 산업용 로봇 시스템의 기본 시스템으로, 그리고 우주 항공 분야의 비행체 자세 제어 시스템 설계에 필수적인 장치이다.

로켓트의 발사대를 안정화시키기 위한 목적으로 출발한 도립진자 시스템의 안정화에 대한 연구는 1965년 Kapitza에 의하여 처음으로 설계 제작된 이후 Schaefer 와 Cannon이 1969년 Bang - Bang 제어를 사용하여 도립위치에 있는 bending beam을 안정화시킬 수 있는 방법으로 출력 제한 기법을 이용한 제어를 제시하였다. 또한, Strugean과 Loscutoff는 1972년에 상태공간을 이용한 출력 제한 제어기로서 관측기 레귤레이터형 동적 안정화 제어를 사용하여 도립 진자를 안정화시킬 수 있는 제어시스템을 설계하였다.

그리고 이러한 연구 결과를 근거로 Sehba(1983) 및 Furuta(1984)는 이중 및 삼중 도립 진자시스템의 안정화에 대한 시뮬레이션 결과를 발표하였다[1].

그러나 이 결과는 시스템의 상태가 평형점 주위에서 선형화된 근사모델에 대해서만 만족하며 시스템의 안정성에 영향을 미치는 파라미터의 변동에 지극히 민감하다는 단점을 가지고 있다.

한편 슬라이딩 모드 제어는 가변구조 제어의 특별한 한 형태로 상태공간에 임의로 안정화가 보장되는 평면을 잡아 상태공간에 존재하는 상태변수들을 제어입력을 사용하여 제안된 평면을 벗어나지 않도록 제어하는 이론으로 일단 제안된 평면에 도달하면 슬라이딩 모드의 장점중에 하나인 무분성으로 인해 파라미터의 변동에 무관하게 제어가 가능하게 되며 이로인해 최근에 파라미터의 변동에 극히 민감한 시스템의 제어에 많이 사용되고 있다 [2][4].

그러나 슬라이딩 모드 제어방식을 기존에 나타나 있는 선형화된 도립진자 시스템에 적용한 경우[3][5] 파라미터의 변동에는 강인한 특성을 나타낼수는 있을지 몰라도 도립진자 시스템의 비선형성을 극복하기위해 이용된 선형화 과정에서 발생한 시스템의 변질이나 정밀한 제어가 불가능하다는 점을 개선시키지 못한다는 단점은 여전히 존재하게 된다.

따라서 본 논문에서는 도립진자 시스템을 모델화함에 있어 비선형성을 극복할수 있는 제어를 새롭게 제안하여 시스템의 변질을 배제하고 이를 슬라이딩 모드로 제어하여 보다 정밀한 제어를 가능케 하였고 안정화에 이르기까지의 시간도 단축하였다.

본 논문에서는 2장에서 슬라이딩 모드 제어방식으로 일반적으로 선형화된 기존의 도립진자 시스템의 제어를 설계하였고 3장에서는 개선된 도립진자 시스템을 제안하여 기존 시스템과의 차이를 밝혔다.

이어 4장에서 3장에서 밝힌 차이를 이용하여 일반적인 제어기와 제안된 비선형제어를 각기 동일한 초기조건으로 동작시켜 제안된 제어기의 장점을 알수있도록 모의실험을 수행하고 5장에서 결론과 추후과제를 살펴보았다.

2. 슬라이딩 모드를 이용한 일반적인 도립진자시스템의 제어기

도립진자 시스템의 모형과 미소변수의 식은아래와 같다.

$$m \frac{d^2}{dt^2} [z(t) + l \sin \theta(t)] = H(t)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} [l \cos \theta(t)] = v(t) - mg$$

m = 진자 질량

M = 환차 질량

l = 진자 무게 중심까지의 거리

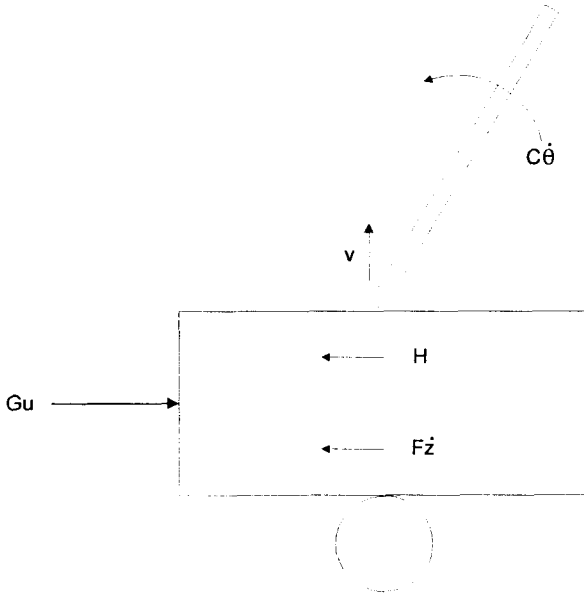


그림 1. 도립진자 시스템의 구조적 모형

그림에서 볼 수 있는 변수를 사용하여 활차의 운동 방정식을 결정하면 다음과 같다.

$$M\ddot{z}(t) = Gu(t) - H(t) - F\dot{z}(t) \quad (2.1)$$

이중에서 진자가 넘어질때의 수평력 H(t) 중에서 미소량을 무시한다면 식 (2.1)은 다음식과 같다.

$$(M + m)\ddot{z}(t) + F\dot{z}(t) = Gu(t) \quad (2.2)$$

이제 진자의 운동방정식을 구하여 보면 다음식과 같다.

$$(J + ml^2)\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) - mgl\sin\theta(t) + ml\cos\theta(t)\dot{z}(t) = 0 \quad (2.3)$$

슬라이딩 모드 제어기의 가장 큰 장점중의 하나는 일단 상태 변수가 슬라이딩 평면에 도달하면 외란이나 파라미터 변동에 무관하게 동작할 수 있도록 제어해 준다는 점에 있다.

이를 보장하기 위해서는 우선 안정성이 보장된 슬라이딩 평면을 결정하고 이 보장된 슬라이딩 평면을 따라 상태변수가 움직이도록 하는 등가 제어입력을 설계하고 이 등가 제어입력을 기준으로 슬라이딩 모드를 보장하여 줄수 있는 제어입력을 구하는 것이 그 과정이라 할 수 있다.

우선 제어하고자 하는 시스템이 아래와 같다고 하자.

$$\dot{X} = AX + Bu(t) \quad (2.4)$$

이제 결정하고자 하는 슬라이딩 평면을 다음과 같다고 하자.

$$S(X) = CX \quad (2.5)$$

상태변수가 슬라이딩 평면에 도달하여 슬라이딩 평면만을 따라서 동작한다고 하면 그 수식적인 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S(\dot{X}) &= C\dot{X} \\ &= C[AX + Bu(t)] = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

그러므로 슬라이딩 평면을 따라 동작하도록 상태변수를 제어하는 등가 제어입력은 다음과 같다.

$$u_{eq}(t) = -(CB)^{-1}CAX \quad (2.7)$$

식 (2.7)을 시스템 식(2.4)에 적용하면 아래식 (2.8)과 같이 표현할 수 있고 이는 슬라이딩 평면에서의 운동방정식이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= [I - B(CB)^{-1}C]AX \\ &= A_{eq}X \end{aligned} \quad (2.8)$$

이제 슬라이딩 평면의 계수행렬인 C를 결정하여 슬라이딩 평면의 운동방정식이 안정할 수 있도록 하고 식 (2.8)의 안정성을 보장할 수 있는 계수행렬 C를 이용하여 식 (2.7)에 따라 등가 제어입력을 계산한다. 이 등가 제어입력은 물리적으로 슬라이딩 모드를 보장하여 줄수 있는 제어입력의 평균치가 된다.

슬라이딩 모드를 보장하기 위해서는 슬라이딩 평면부근에서 상태변수의 궤적이 기하학적으로 아래의 그림과 같아야 한다.

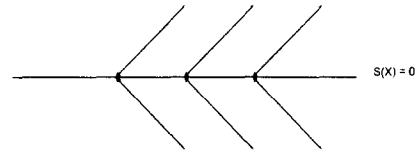


그림 2. 슬라이딩 모드를 보장하는 상태궤적

위의 그림과 같은 상태궤적을 보장하기 위한 수식적인 표현은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} S(X) \cdot S(\dot{X}) &= S(X) \cdot [C\dot{X}] \\ &= S(X) \cdot [C[AX + Bu(t)]] < 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

그러므로 슬라이딩 평면을 기준으로 나누어진 각 구간에 적용할수 있는 제어입력은 식 (2.10)과 같다.

$$\begin{aligned} S(X) > 0 \quad CAX + CBu(t) < 0 \\ u(t) < -(CB)^{-1}CAX \end{aligned} \quad (2.10.1)$$

$$\begin{aligned} S(X) < 0 \quad CAX + CBu(t) > 0 \\ u(t) > -(CB)^{-1}CAX \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

즉 슬라이딩 모드를 보장하는 제어입력은 식 (2.7)를 기준으로 S(X)의 부호에 따라 결정된다.

본 논문에서는 식 (2.10)의 각 식에 $-K\text{sign}\{S(X)\}$ 를 첨가

하여 슬라이딩 모드의 존재조건을 만족하도록 한다.

본 논문에서 제어하고자 하는 독립진자 시스템의 일반적인 제어기의 운동방정식은 아래 두 식 (2.11), (2.12)와 같다.

$$\ddot{z}(t) = \frac{-F}{(M+m)} \dot{z}(t) + \frac{G}{(M+m)} u(t) \quad (2.11)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{1}{(J+ml^2)} \left[mgl\theta(t) + \frac{Fml}{(M+m)} \cdot \dot{z}(t) - c\dot{\theta}(t) - \frac{mlG}{(M+m)} \cdot u(t) \right] \quad (2.12)$$

이제 상태변수를 아래와 같이 정의하고 파라미터 값을 표 1과 같이 주변 Matrix로 표현한 독립진자 시스템의 운동 방정식은 식 (2.13)과 같다.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 34.7 & -0.19 & 0 & 77 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -81 \\ 0 \\ 25.2 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.13)$$

$$X = [\theta(t) \quad \dot{\theta}(t) \quad z(t) \quad \dot{z}(t)]$$

표 1. 독립진자 시스템의 파라미터 값

활차	$M = 0.96$ [kg]	진자	$m = 0.12$ [kg]
	$G = 24.7$ [N/v]		$l = 0.26$ [m]
	$F = 23.5$ [kg/s]		$J = 1.6 \times 10^{-3}$ [kg · m ²]
			$g = 9.8$ [m/sec ²]
			$c = 1.7 \times 10^{-3}$ [kg · m ² /s]

주어진 시스템이 4차 시스템이므로 설정하고자 하는 슬라이딩 평면은 아래와 같다.

$$S(X) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] X \quad (2.14)$$

주어진 시스템을 슬라이딩 모드로 제어하기 위해서 구한 슬라이딩 평면의 계수행렬 C은 [10 10 1 1]이 되고 식 (2.10)을 이용하여 구한 제어입력은 다음과 같다.

$$u(t) = 0.44x_1(t) + 0.01x_2(t) + 0.95x_4(t) - \text{sigm}(S(X)) \quad (2.15)$$

3. 비선형 제어기의 설계

2장에서 나타난 진자의 운동방정식 식 (2.3)은 비선형이므로 활차의 운동방정식과 동시에 제어할수 없다.

그러므로 진자의 운동방정식을 선형방정식으로 전환시킬수 있는 내부 제어입력 v(t)를 제안한다.

$$v(t) = -g\theta(t) + g\sin\theta(t) - \dot{z}(t)\cos\theta(t) \quad (3.1)$$

식 (3.1)에 의해 진자의 운동방정식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$(J+ml^2)\ddot{\theta} + c\dot{\theta}(t) - mgl\theta(t) = mlv(t) \quad (3.2)$$

이제 활차의 운동방정식은 u(t)에 의해 제어되고 진자의 운동방정식은 v(t)에 의해 제어되므로 u(t)로부터 v(t)를 구할수 있도록 내부 제어기를 구성해야 한다.

우선 v(t)를 입력으로 한 식(3.2)를 안정화 할 수 있는 제어규칙을 다음과 같이 정의한다.

$$vd(t) = k_1\theta(t) + k_2\dot{\theta}(t) \quad (3.3)$$

식 (3.3)이 발생하기 위한 가속도는 식 (3.1)로부터 아래와 같이 구해진다.

$$\ddot{z}d(t) = \frac{(-vd(t) - g\theta(t) + g\sin\theta(t))}{\cos\theta(t)} \quad (3.4)$$

u(t)에 의해 $\ddot{z}(t)$ 가 발생하므로 $\ddot{z}(t)$ 가 $\ddot{z}d(t)$ 를 추종하도록 활차를 제어하도록 한다.

이제 입력 u(t)는 활차를 제어하면서 진자의 운동방정식을 제어 할수 있는 v(t)까지 발생시켜야 하므로 아래와 같이 정의한다.

$$u(t) = -k_3z(t) - k_4\dot{z}(t) + q\ddot{z}d(t) \quad (3.5)$$

식 (3.5)을 식 (2.2)에 대입하여 z(t)와 $\ddot{z}d(t)$ 의 전달함수가 고주파 영역에서 1 이 될 수있도록 q를 정하면

$$q = \frac{M+m}{G} = \frac{1}{\beta}$$

이제 비선형을 선형으로 보상하여 쓸 수 있는 내부제어기를 거친후 평형점 주위에서 선형화된 시스템의 제어입력은 식 (3.3),(3.4),(3.5), $\sin\theta(t) = \theta(t)$, $\cos\theta(t) = 1$ 에 의하여 다음식으로 구할수 있다.

$$u_N(t) = -\frac{k_{N1}}{\beta}\theta(t) - \frac{k_{N2}}{\beta}\dot{\theta} - k_{N3}z(t) - k_{N4}\dot{z}(t) \quad (3.6)$$

한편 내부제어기를 거치지 않고 평형점주위에서 선형화된 일반적인 독립진자 시스템의 제어입력은 다음과 같다.

$$u(t) = -k_1\theta(t) - k_2\dot{\theta}(t) - k_3z(t) - k_4\dot{z}(t) \quad (3.7)$$

즉, 개선된 시스템과 일반적인 선형화 시스템과의 차이는 비선형성의 보상여부에서 나타나며 그 구체적인 차이는 비선형성을 나타내는 변수 $\theta(t)$ 와 $\dot{\theta}(t)$ 의 입력 계수에서 나타나게 된다.

4. 시뮬레이션

식 (2.13)을 Matlab을 사용하여 동일한 초기 조건으로 수행해보았다. 3장에서 유도한것과 같이 기존의 일반화된 시스템의

제어기와 본 논문에서 제안하고자 하는 개선된 시스템의 비선형성이 보상된 제어기는 그 제어입력의 계수에서 차이가 발생한다.

식 (3.6)와 (3.7)을 비교하여 보면 비선형 제어기와 일반적인 선형제어기의 제어입력계수는 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$k_{M_1} = \beta k_1, \quad k_{N_2} = \beta k_2, \quad k_{N_3} = k_3, \quad k_{M_4} = k_4$$

위의 관계에 의하여 구하여진 비선형성이 보상된 개선된 독립진자 시스템 제어기의 제어입력은 다음과 같다.

$$u_N(t) = 10.11x_1(t) + 0.23x_2(t) + 0.95x_4(t) - \text{sign}\{S(X)\} \quad (4.1)$$

초기조건은 동일하게 [3 0 0 0] 으로 시작하였다.

그 결과는 다음과 같다.

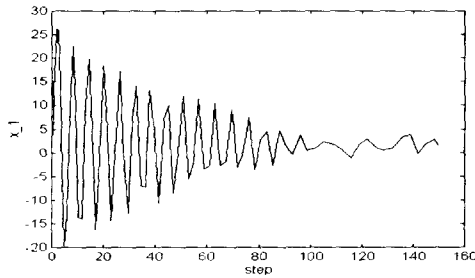


그림 3. 일반적인 독립진자 시스템의 응답

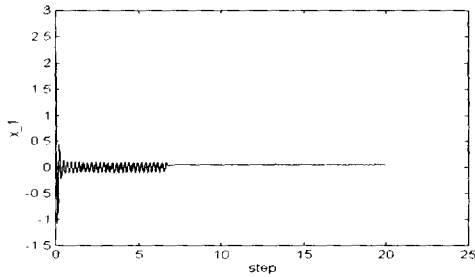


그림4. 개선된 독립진자 시스템의 응답

5. 결론

4장의 시뮬레이션에서 본 바와 같이 일반적인 선형제어기에 비하여 본 논문에서 제안한 비선형 제어기는 독립진자의 진동이나 안정화 시키기 까지 소요되는 시간에서 크게 개선되었음을 보이고 있다.

그러나 본 논문에서 제안된 비선형 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 평면에 도달한 이후부터 그 특성이 보장되며 상태 변수가 슬라이딩 평면에 도달할 때까지는 외란이나 파라미터의 변동에 여타 제어기와 같이 민감한 반응을 보이게 된다.

이는 개선된 제어기의 문제점이 아니라 슬라이딩 모드가 그 자체로 가지고 있는 단점이며 이를 개선시키기 위해 슬라이딩 모드가 가지고 있는 또 다른 단점인 떨림현상을 유발하지 않는 범위내에서 상태변수가 슬라이딩 평면에 보다 빠르게 도달할 수 있게 하는 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] K. Furuta and T. Okutani and H. Some, " Computer control of double inverted pendulum ", *Computer and Elect. Eng.*, Vol.5, pp.67 - 84, 1978
- [2] U. Itkis, " *Control System of Variable Structure.* " Keter Publishing House Jerusalem Ltd., 1976
- [3] 윤관수, 허육열, " 가변구조 제어를 적용한 독립진자 제어기의 실현 ", 한국 자동제어학술회의 논문집, 1990
- [4] 이태봉, " 떨림현상이 감소된 불확실한 다변수 시스템의 슬라이딩 모드 제어에 관한 연구 ", 홍익대학교 대학원, 1993
- [5] 한문섭, " 독립진자의 가변 구조 제어 ", 인하대학교 대학원, 1989