

두 개의 pole을 갖는 도립 진자의 퍼지 슬라이딩 모드 제어기 설계

Design of the Fuzzy Sliding Mode Controller with Double Pole Inverted Pendulum

° 강항균, 한종길, 정사철, 함운철

전북대학교 전자공학과(Tel:0652-70-2409; Fax:0652-70-2400; E-mail:Woonchul@moak.chonbuk.ac.kr)

Abstracts In this paper, we derive dynamic equation of double pole inverted pendulum using Lagrangian equation, and design the fuzzy sliding mode controller. We demonstrate that the designed controller regulates double pole simultaneously regardless of cart position by computer simulation.

Keywords : Fuzzy Sliding Mode Control (FSMC), Double Pole Inverted Pendulum

1. 서 론

기존의 비선형 시스템을 제어하기 위해서는 비선형 시스템을 동작점에서 선형화하거나, 혹은 비선형 제한 기법을 적용하여 전체 상태공간에서 선형화하여, 선형화된 시스템에서 제어기를 설계하는 방법을 취했다. 그러나 이러한 설계 기법은 시스템의 비선형 특성 방정식을 정확히 알아야 하는데, 실제 시스템은 비선형 요소뿐 아니라 파라미터 등의 불확실성을 포함하고 있기 때문에 시스템에 대한 정확한 수학적 모델링을 하는 것은 불가능하다. 때문에 인간의 추론 방식을 모방한 Fuzzy Control에 대한 연구가 행해졌다. 그러나 종래의 Fuzzy Logic Controller (FLC)는 정규해석방법이 부족하고, 모든 decision rule이 인간의 경험에 의존하는 단점이 있다. Fuzzy Sliding Mode Control (FSMC) 방식은 FLC를 체계적으로 설계하는 간단한 방법을 제공한다. FSMC의 장점으로, 먼저 제어입력이 시스템을 asymptotic stability하도록 한다. 또한 FLC의 규칙집합을 최소화할 수 있고 모델의 불확실성과 외란에 대하여 강인함을 제공한다. 그리고 기존의 sliding mode control에서 발생할 수 있는 채터링 문제를 해결할 수 있다.

원래 로켓의 발사대를 안정화시키기 위한 목적에서 출발한 도립진자의 안정화에 대한 연구는 간단한 구조를 가지고 실제적인 제어문제를 다룰 수 있는 불안정한 시스템의 대표적인 예로 간주되어 많은 연구가 이루어졌다. 진자가 도립되어 있을 경우에는 진자는 불안정한 평형점에 머물러 있게 되기 때문에 일정 크기 이상의 외란이 발생하면, 시스템이 불안정하게 되어 현재 위치를 벗어나게 된다. 도립진자의 안정화 제어는 진자가 원래의 도립된 위치 즉 불안정한 평형점에 강제적으로 계속 머물도록 제어하는 것이다.

본 논문의 2장에서는 Lagrangian 방정식을 사용하여, 두 개의 pole을 갖는 도립진자의 동력학 방정식을 유도하고, 3장에서는 fuzzy sliding mode control을 사용하여 두 개의 pole을 동시에 세울 수 있는 제어기를 설계한다. 그리고 4장에서는 시스템에

대한 시뮬레이션을 통하여 타당성을 검증한다.

2. 동력학 방정식 유도

본 장에서는 두 개의 pole을 갖는 도립진자의 동력학 방정식을 유도한다. 도립진자의 구조는 그림 1과 같이 설정하였다.

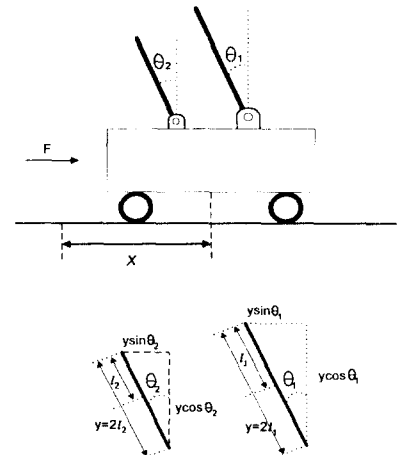


그림 1. 두 개의 pole을 갖는 도립진자 구조

여기에서

- l_1 : pole 1의 길이의 절반, 무게 중심점,
- l_2 : pole 2의 길이의 절반, 무게 중심점,
- m_c : cart의 무게

$$\begin{aligned}
m_{p1} &: \text{pole 1의 무게}, & m_{p2} &: \text{pole 2의 무게} \\
x &: \text{cart의 수평 위치}, & \dot{x} &: \text{cart의 속도} \\
\theta_1 &: \text{pole 1의 각}, & \dot{\theta}_1 &: \text{pole 1의 각속도} \\
\theta_2 &: \text{pole 2의 각}, & \dot{\theta}_2 &: \text{pole 2의 각속도} \\
g &: \text{중력 가속도}, & \rho &: \text{단위 길이당 질량} \\
\int_0^{2l} \rho dy &= m_p
\end{aligned}$$

그림 1과 같은 형태를 갖는 도립진자의 동역학 방정식은 Lagrangian 방정식을 이용하여 유도하였다. 먼저 운동에너지를 구해보면 전체 운동에너지는 cart의 운동에너지와 두 개의 pole의 운동에너지의 합으로 나타낼 수 있으며, 위치에너지의 경우에는 cart의 위치에너지가 존재하지 않으므로 두 개의 pole의 위치에너지의 합으로 전체 위치에너지를 나타낼 수 있다. Lagrangian 방정식을 통해, 각각 구한 운동 에너지와 위치에너지를 이용하여 동역학 방정식을 유도하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{3}{4} \frac{g \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \ddot{x}}{l_1} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{3}{4} \frac{g \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \ddot{x}}{l_2} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

$$\ddot{x} = \frac{F - m_{p1} \sin \theta_1 (l_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{3}{4} g \cos \theta_1) - m_{p2} \sin \theta_2 (l_2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{3}{4} g \cos \theta_2)}{[m_c + m_{p1} (1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_1) + m_{p2} (1 - \frac{3}{4} \cos^2 \theta_2)]} \quad (3)$$

3. 제어기 설계

본 논문에서는 cart의 위치제어를 고려하지 않고, cart의 가속도(또는 \ddot{x})를 입력 u 로 설정하고 두 개의 pole을 세우는 제어기를 설계하고자 한다.

2장에서 유도된 동역학 방정식에 대하여 다음과 같이 설정하면

$$x_1 = \theta_1, x_2 = \theta_2, x_3 = \dot{\theta}_1, x_4 = \dot{\theta}_2$$

동역학 방정식을 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3 \\
\dot{x}_2 &= x_4 \\
\dot{x}_3 &= \frac{3}{4} \frac{g \sin x_1 + \cos x_1 u}{l_1} \\
\dot{x}_4 &= \frac{3}{4} \frac{g \sin x_2 + \cos x_2 u}{l_2}
\end{aligned} \quad (4)$$

식(4)와 같이 유도된 동역학 방정식에서 시스템의 불확실성과

잡음을 하나의 항으로 통합하기 위해서 다음과 같은 Matching condition을 이용한다. 먼저 시스템을 일반적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t, x))x + f(t, x, u) + B[(u + w(t, x, u))] \quad (5)$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 이고 $\Delta A(t, x)$ 는 시스템의 불확실한 항이고 $f(t, x, u)$ 는 시스템의 비선형성을 고려한 항이며, $w(t, x, u)$ 는 입력잡음을 고려한 항이다. ΔA 와 f , 그리고 w 는 연속적인 함수라고 가정하고 다음과 같은 Matching condition을 고려한다.

A1. 식(6)을 만족하는 다음과 같은 함수가 존재한다.

$$h(\cdot) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$d(\cdot) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(t, x, u) = B h(t, x, u)$$

$$\Delta A(t, x) x = B d(t, x) \quad (6-1)$$

$$v(t, x, u) = \begin{bmatrix} v_1(t, x, u) \\ \vdots \\ v_m(t, x, u) \end{bmatrix} = h(t, x, u) + d(t, x) + w(t, x, u) \quad (6-2)$$

A2. 다음과 같은 식을 만족시키는 연속성을 갖는 양실함수 $r_i(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ 가 존재한다.

$$|v_i(t, x, u)| < r_i(t, x), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\|v(t, x, u)\| \leq \rho$$

위와 같은 가정 하에서 식(5)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\dot{x} = Ax + B[u + v(t, x, u)] \quad (7)$$

여기서 $v(t, x, u)$ 는 비선형 항과 불확실한 항이 Matching condition에 의해서 통합된 벡터이다.

3.1 퍼지 슬라이딩 제어기의 설계

슬라이딩 평면을 다음과 같이 설정하였다.

$$s = Gx \quad (8)$$

여기에서 행렬 $G \in m \times n$ 는 GB_0 가 nonsingular가 되도록 하는 full rank 이어야 하며, 슬라이딩 평면에서의 motion이 안정하도록 해야한다.

상태 궤적을 슬라이딩 평면에 계속 유지하게 하는 등가 제어 입력 u_{eq} 는 다음과 같다.

$$u_{eq} = -(GB_0)^{-1} GA_0 x \quad (9)$$

슬라이딩 제어기는 reaching condition($s\dot{s} < -\eta|s| < 0$, $\eta > 0$)을 만족하여야 하며, 그에 따른 슬라이딩 제어기는 다음과 같다.

$$u_s = -(GB_0)^{-1} [GA_0 x + Ks + \rho \operatorname{sgn}(s)] \quad (10)$$

3.2 시스템의 선형화 및 슬라이딩 평면 설계

식(4)와 같이 유도된 동역학 방정식에 대하여 평형점 '0'에서 Taylor급수를 이용하여 선형화하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ gb_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gb_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} (u(t) + v(t, x, u)) \quad (11)$$

여기에서 $b_1 = \frac{3}{4l_1}$, $b_2 = \frac{3}{4l_2}$ 이다.

Remark : 시스템이 제어가능한지를 조사하기 위해서 식 (11)에 대해서 controllability matrix를 구하면 $[B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ 이 되며, 본 논문에서 유도한 방정식의 controllability matrix의 determinant는 $-g^2 b_1^2 b_2^2 (b_2 - b_1)^2$ 이 된다. 따라서 시스템이 $b_1 = b_2$, 즉 두 pole의 길이가 서로 같도록 설계되면 제어가 사실상 불가능하다.

식(11)은 다음과 같은 좌표변환에 의해서 canonical form으로 변환될 수 있다.

$$\dot{y} = A_1 y + B_1 u = Q A Q^{-1} y + Q B u \quad (12)$$

여기에서

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1^2 g - b_1 b_2 g} & \frac{1}{b_2^2 g - b_1 b_2 g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_1^2 g - b_1 b_2 g} & \frac{1}{b_2^2 g - b_1 b_2 g} \\ \frac{1}{b_1 - b_2} & \frac{1}{-b_1 + b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_1 - b_2} & \frac{1}{-b_1 + b_2} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_1 b_2 g^2 & 0 & (b_1 + b_2)g & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

식(12)에서 슬라이딩 평면을 다음과 같이 설정한다.

$$s = Gy = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ 1]y \quad (13)$$

$\dot{s}=0$ 로부터 u_{eq} 를 구하면 다음과 같다.

$$u_{eq} = -(GB_1)^{-1} G A_1 y \quad (14)$$

식(12)에 식(14)를 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = [A_1 - B_1 (GB_1)^{-1} G A_1] y \quad (15)$$

$$|SI - [A_1 - B_1 (GB_1)^{-1} G A_1]|$$

$$= s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + 1 = 0 \quad (16)$$

식(16)과 같은 특성방정식의 근이 안정하도록 c_1, c_2, c_3 를 선정한다.

3.3 퍼지 슬라이딩 제어기의 구성

입력변수나 입력 언어 레벨의 선형적인 증가는 퍼지 규칙의 지수 적인 증가를 가져온다. 즉 두 개의 pole를 가진 도립 진자의 경우에 퍼지 입력변수로 $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ 를 사용하고, 각각 입력변수의 입력언어레벨의 수를 7개로, 출력 언어 레벨의 수를 7개로 잡을 경우에 7⁴개의 퍼지 규칙을 선정하여야 한다. 또한

도립진자의 경우에 nonminimum의 특성이 강하므로 퍼지 규칙을 만든다는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 입력변수나 입력 언어 레벨이 선형적으로 증가하면, 퍼지 규칙의 수도 선형적으로 증가하는 퍼지 슬라이딩 제어기를 설계한다. 슬라이딩 변수에 할당된 입력 언어항은 PB, PM, PS, ZO, NS, NM, NB으로 구성하고, 슬라이딩 함수 s 의 소속함수값은 상태 x 로부터 슬라이딩 평면($s=0$)까지 거리로 볼 수 있다. 따라서 퍼지 슬라이딩의 퍼지 규칙은 다음과 같다.

$$R_j : \text{IF } s \text{ is } S_j(m_j, \delta_j), \text{ Then } u \text{ is } U_j(\theta_j)$$

여기에서 s 는 입력변수이고 u 는 출력변수이고, S_j 와 U_j 는 각각 입력언어항과 출력언어항인 퍼지 집합이다. 비퍼지화는 입력으로 합성된 퍼지 집합의 무게중심을 이용하는 방법으로 아래와 같은 무게 중심법을 사용한다.

$$u = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_j \mu(R_j(s))}{\sum_{j=1}^N \mu(R_j(s))}$$

여기서 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ 는 출력 언어항 U_j 의 중심이다.

3.4 제어기 합성

슬라이딩 제어기는 모델의 불확실성과 외란에 대하여 강인성을 가지고 있으나 입력에서 채터링 현상이 발생하기 때문에, 이를 줄이기 위하여 퍼지 제어기를 도입한다.

방법 1. 슬라이딩 평면의 경계영역 부근에서 퍼지제어기를 사용하여 채터링 현상을 줄일 수 있도록 다음과 같이 제어기를 합성한다.

$$\begin{cases} u = -(GB_0)^{-1} u_f + u_{eq} & |s| \leq \epsilon \\ u = u_s & |s| > \epsilon \end{cases} \quad (17)$$

방법 2. 슬라이딩 함수를 입력변수로 하는 퍼지 제어기와 등가 제어기를 사용하여 제어기를 합성한다.

$$u = -(GB_0)^{-1} u_f + u_{eq} \quad (18)$$

슬라이딩 제어기와 위의 제어기를 상호 비교함으로써 제어기의 성능과 시스템을 분석한다.

4. 시뮬레이션

시뮬레이션에 사용된 매개 변수들의 값은 다음과 같이 설정하였다.

$$g = 9.8, \ l_1 = 1.0, \ l_2 = 0.3, \ m_{rl} = 0.1, \ m_{r2} = 0.03$$

식(13)의 특성근들을 LHP에 위치하도록 슬라이딩 평면을 설정하면 안정하지만 실제로 원점에 가깝도록 c_1, c_2, c_3 를 정하면 도립진자가 nonminimum 특성이 강하므로 발산하는 형태를 보인다. 반면에 특성근들이 원점에서 보다 멀리 벗어나 있도록 c_1, c_2, c_3 를 정하면 빠른 시간 내에 수렴한다. 여기에서는 각각 $c_1 = 24, c_2 = 26, c_3 = 9$ 로 설정하였고, 즉 $s = [24, 26, 9, 1]y$ 이다. 이 슬라이딩 평면을 원래의 시스템으로 변환시키보면 $s = -7.00x_1 + 5.70x_2 - 2.59x_3 + 1.17x_4$ 이다. 이 슬라이딩

함수의 제어 전략은 θ_2 의 진동주기가 θ_1 보다 빠르므로, θ_2 를 빠르게 제어함으로써 원하는 동작을 수행한다. 슬라이딩 제어기 파라미터 $K=2$, $\rho=2$ 로 정하였으며, 방법1의 제어기의 스위칭 상수는 $\epsilon=0.1$ 로, 출력언어항의 중심은 [NB,NM,NS,ZO,PS,PM,PB]=[-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4]로, $\delta_1=0.03$ 로 정하였으며, 방법2의 제어기의 입력언어항의 중심은 [NB,NM,NS,ZO,PS,PM,PB]=[-1, -0.6, -0.2, 0, 0.2, 0.6, 1]로, 출력언어항의 중심은 [NB,NM,NS,ZO,PS,PM,PB]=[-10, -7, -4, 0, 4, 7, 10]으로, $\delta_2=0.3$ 로 정하였다.

시뮬레이션 결과 모든 제어기가 원하는 각 0도에 잘 수렴하는 것을 보여주고 있다. 슬라이딩 제어기는 제어입력에서 심한 채터링 현상을 보여주고 있으나, 퍼지 슬라이딩 제어를 사용한 제어기에서는 채터링 현상을 볼 수 없다. 그리고 새롭게 제안된 방법 2의 제어기는 전반적으로 다른 제어기보다 성능 향상을 보인다.

5. 결 론

지금까지 두 개의 pole을 갖는 도립진자의 동력학 방정식을 Lagrangian을 이용하여 유도하였으며, 가변구조 시스템의 슬라이딩 모드를 갖는 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 설계하였다. 시뮬레이션을 통하여, 본 논문에서 설계한 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 이용하므로 두 개의 pole을 갖는 도립 진자를 제어할 때 입력의 채터링 현상을 제거할 수 있음을 보였다.

앞으로는 퍼지 규칙을 더욱 세분화함으로써 보다 좋은 특성을 갖는 제어기를 설계하고자 한다. 또한 cart의 위치까지도 고려하여서, 두 개의 pole을 세움과 동시에 cart를 원하는 위치로 보내도록 하는 연구를 진행 할 계획이다. 그리고 시뮬레이션으로만이 아니라 두 개의 pole을 갖는 도립진자 시스템을 제작하여, 실제로 제어기를 적용하는 연구도 진행할 계획이다.

참고문헌

- [1] G. C. Hwang and S. C. Lin, "A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems," *Fuzzy Sets and System*, vol.48, pp279-287, 1992.
- [2] J. C. Wu and T. S. Liu, "A Sliding-Mode Approach to Fuzzy Control Design," *IEEE Trans. syst. technol.*, vol.4, no.2, pp141-150, 1996.
- [3] Tzoo-Hseng S. Li and Chin-Yin Tsai, "Parallel Fuzzy Sliding Mode Control of the Cart-Pole System," *IEEE IECON*, vol.2, pp.1468-1473, 1995.
- [4] 소일영, 정사철, 함운철, "가변 구조 제어 이론을 이용한 유연한 로보트 매니플레이터의 제어기 설계," *KACC*, pp 579-583, 1995.

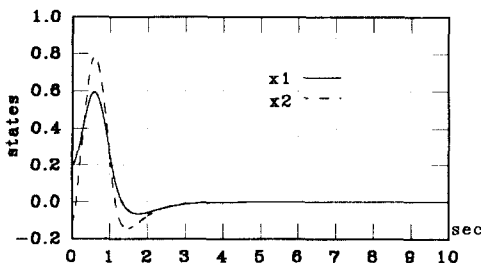


그림 2. 슬라이딩 모드 제어기를 사용한 pole의 궤적

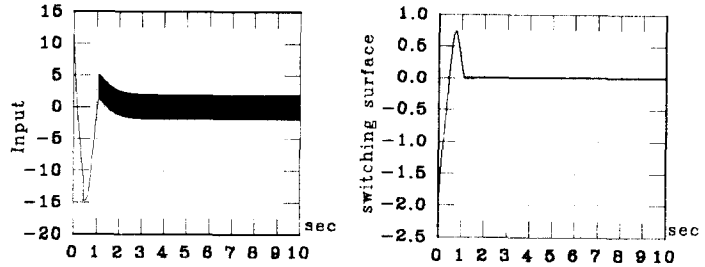


그림 3.(상단 좌측) 슬라이딩 모드 제어기의 입력
그림 4.(상단 우측) 슬라이딩 모드 제어기의 스위칭 평면의 궤적

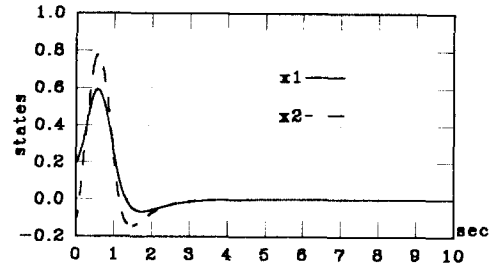


그림 5. 퍼지슬라이딩 모드제어기를 사용한 pole의 궤적(방법 1)

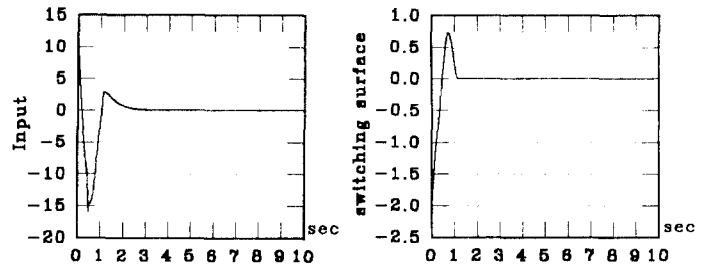


그림 6.(상단 좌측) 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 입력
그림 7. 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 스위칭 평면의 궤적

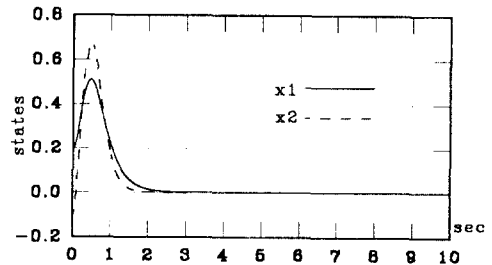


그림 8. 퍼지 제어기를 사용한 pole의 궤적(방법 2)

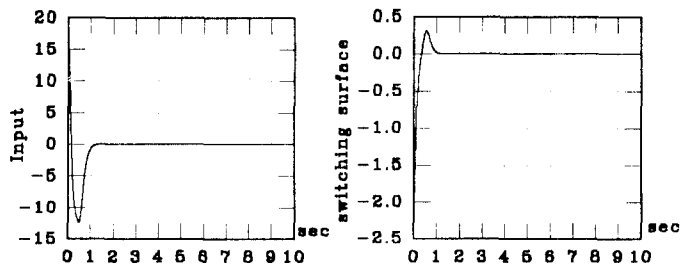


그림 9.(상단 좌측) 퍼지제어기의 입력
그림 10. 퍼지제어기의 슬라이딩 평면의 궤적