

## 로봇 매니플레이터를 위한 삼분 비선형 슬라이딩 모드를 가지는 가변구조 제어

### VSC with Three-segment Nonlinear Sliding Mode for Robot Manipulator

\*최성훈\*, 전경한\*, 최봉열\*

\*경북대학교 전자공학과 (Tel: 950-6553; Fax: 950-5505; E-mail: ctrl@ee.kyungpook.ac.kr)

**Abstract** In this paper robust tracking control scheme using the new three-segment nonlinear sliding mode technique for nonlinear rigid robotic manipulator is developed. Sliding mode consists of three segments, the proportional acceleration segment, the constant velocity segment and the deceleration segment using terminal sliding mode. Strong robustness and fast error convergence can be obtained for rigid robotic manipulators with large uncertain dynamics by using the new three-segment nonlinear sliding mode technique together with a few useful structural properties of rigid robotic manipulator. The efficiency of the proposed method for the tracking has been demonstrated by simulations for two-link robot manipulator.

**Keywords** Variable structure control, Robot manipulator, Three-segment sliding mode

#### 1. 서론

비선형 제어기의 하나인 가변구조 제어(VSC : Variable Structure Control)는 불확실성을 포함하는 시스템이 슬라이딩 모드(sliding mode)라는 독특한 동특성(dynamics)으로 인해 얻어지는 제어 효과로 그 이론 및 적용에 있어 꾸준한 연구가 계속되었다[1]. 그 중 가변구조 제어에 있어 슬라이딩 모드 제어 기법은 제어방법이 매우 정확하고 파라미터 변동 및 부하에 대해 둔감한 특성을 갖고 있다. 그러므로 슬라이딩 평면 설계는 고려해야 할 중요한 설계요소인데 고전적 가변구조 제어에서는 선형 슬라이딩 모드를 주로 이용했다[2]. 그러나 기존의 가변구조 제어에서는 건실성을 보장받지 못하는 도달 모드가 존재하게 되고 선형 슬라이딩 모드에서 빠른 수렴을 얻기 위하여 스위칭 함수의 매개변수 값을 크게 설정하면 원하지 않는 과도 응답이 나타날 수 있다.

이러한 단점을 개선하기 위하여 Davari와 Zhang은 삼분 비선형 슬라이딩 모드(three-segment nonlinear sliding mode) 제어를 제시하였다[3]. 이는 비선형 슬라이딩 모드가 가속(acceleration), 등속(constant velocity), 그리고 감속(deceleration)구간으로 나뉘어지며 빠른 수렴속도와 정확한 과도 오차동특성을 얻을 수 있고 도달 모드를 없애므로서 전구간에서 건실성이 보장되어 다양한 분야에서 활용되기 시작했다[4,5]. 특히 Zhihong 등은 선형 시불변 공칭 시스템에 삼분 비선형 슬라이딩 모드를 적용한 [3]을 개선하여 불확실성에 건실한 삼분 비선형 슬라이딩 모드의 설계를 제안했으며 이를 비선형이고 불확실성이 포함된 로봇 매니플레이터에 적용하였다[4]. 그러나 가속구간에서 등가속 스위칭 평면을 이용하여 삼분 비선형 슬라이딩 모드에서 얻고자 하는 고속 추적을 얻지 못하며 감속구간에서는 선형 슬라이딩 모드를 그대로 적용하여 유한시간에 영으로 수렴함을 보장 못하며 수렴속도가 느리다.

본 논문은 [4]를 개선한 새로운 삼분 비선형 슬라이딩 모드를 가지는 가변구조 제어를 제안한다. 가속은 Zhihong 등이 제안한 등가속대신 비례가속을 사용하여 빠른 수렴을 얻고자 했으며 감속은 터미널 슬라이딩 모드(terminal sliding mode)를 적용하여[6] 유한시간에 영으로의 수렴을 보장하고 빠른 수렴을 얻는다. 또한 제안된 알고리즘의 건실안정성을 Lyapunov 함수를 이용해서 증명하고 모의실험을 통해서 불확실성의 상위유계를

가지는 시스템에 대해 제안된 삼분 비선형 슬라이딩 모드가 기존의 경우보다 빠른 수렴속도를 가지며 불확실성에 대해서 건실안정함을 보인다. 그리고 제어입력에서 유계성을 사용하여 원하지 않는 채터링을 제거하였다.

#### 2. 로봇 매니플레이터의 동특성 및 시스템 정의

다음 식과 같이 표현되는  $n$ -자유도를 가지는 로봇 매니플레이터의 동특성을 고려한다.

$$M(q)\ddot{q} + F(q, \dot{q}) + G(q) = u(t) \quad (1)$$

여기서  $q$ 는 조인트 각위치(angular position)의  $n$ 차 벡터,  $\tau(t)$ 는 조인트 토크의  $n$ 차 벡터,  $M(q)$ 는  $n \times n$  매니플레이터 관성 행렬,  $F(q, \dot{q})$ 는 코리올리(Coriolis)와 원심(centrifugal)토크의  $n$ 차 벡터,  $G(q)$ 는 출력 토크의  $n$ 차 벡터이다.

분산제어를 위해 로봇 매니플레이터 (1)을  $n$ 개의 부시스템으로 분해하면 다음과 같다[4,7].

$$m_{ii}(q)\ddot{q}_i + d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = u_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

여기서  $d_i(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \sum_{j=1}^n m_{ij}(q)\ddot{q}_j + f_i(q, \dot{q}) + g_i(q)$  이다.

다음과 같이 불확실성의 유계를 가정한다[4].

**가정 1:**  $m_{ii}^{-1}$ 은 다음과 같이 유계되어 있다.

$$a_1 \leq m_{ii}^{-1} \leq a_2 \quad (3)$$

여기서  $a_1, a_2$ 는 양수이다.

**가정 2:**  $d_i$ 는 다음과 같이 유계되어 있다.

$$|d_i| < b_1 + b_2|q_i| + b_3|\dot{q}_i|^2 \quad (4)$$

여기서  $b_1, b_2, b_3$ 는 양수이다.

### 3. 삼분 슬라이딩 모드를 가지는 가변구조 제어

#### 3.1. 삼분 슬라이딩 모드

$i$ 번째 부시스템의 추적오차 동특성은 다음식과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{ri} - m_{ii}^{-1} u_i + m_{ii}^{-1} d_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $x_n = q_{ri} - q_i$ 는 추적오차이고  $q_{ri}$ 는  $i$ 번째 부시스템의 원하는 상태제척이다.

$i$ 번째 부시스템 (2)에 사용되는 삼분 비선형 스위칭 평면은 다음과 같다.

(a) 가속구간에서는 다음과 같이 정의한다.

$$s_n = c_n x_{n0} x_2^2 + x_n^2 - x_{n0}^2 \quad (6)$$

여기서  $c_n$ 은 설계될 양의 상수이고  $x_{n0}$ 는 영이 아닌 초기위치이다.

(b) 등속구간에서는 다음과 같다[4].

$$s_2 = x_2 + v_i \quad (7)$$

여기서  $v_i$ 는 최대속도  $v_m$ 보다 작다.

(c) 감속구간에서는 터미널 스위칭 함수를 설정한다[6].

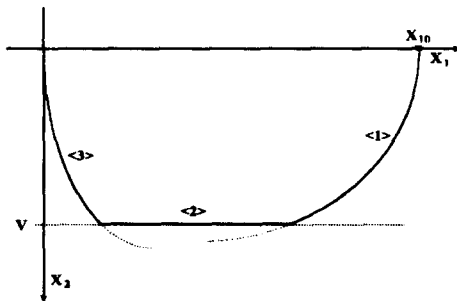
$$s_3 = c_2 x_n^\zeta + x_2 \quad (8)$$

여기서  $\zeta$ 는  $0.5 < \zeta < 1$  이고  $c_2$ 는 설계될 양의 상수이다.

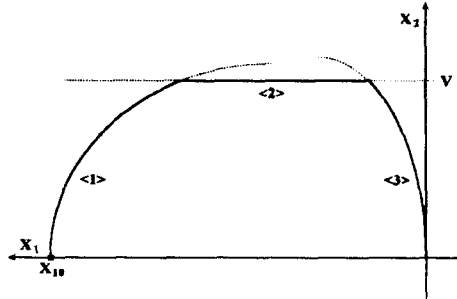
고찰 1: 식 (8)에서 스위칭 함수가 터미널 슬라이딩 모드에 있을 때  $c_2 x_n^\zeta + x_2 = 0$ 로부터 수렴시간을 구한다[6].

$$t_i = -\frac{x_n(t_0)^{1-\zeta}}{c_2(1-\zeta)} \quad (9)$$

식 (9)는 터미널 슬라이딩 모드에서 추적오차가 유한 시간에 영으로 수렴함을 알 수 있다.



(a) Sign of initial error value is plus.



(b) Sign of initial error value is minus.

그림 1. 삼분 슬라이딩 평면

Fig. 1. Three-segment sliding plane.

고찰 2: 기존의 슬라이딩 평면[4]의 경우  $-1/2 c_n$ 인 등가속인 반면 제한한 슬라이딩 평면은 가속이  $-x_n / c_n x_{n0}$ 인  $x_n$ 에 비례하는 빠른 가속을 가진다. 감속구간에서는 터미널 슬라이딩 모드를 사용하여 등속과 감속구간으로 바뀌는 과정에서 슬라이딩 모드의 등속구간과 감속구간의 동특성의 변화가 적고 수렴속도가 기존의 선형 슬라이딩 모드보다 빠르다.

#### 3.2 가변구조 제어 입력

초기오차에 따라 그림 1의 (a), (b) 두경우가 있는데 오차 동특성은 가속구간 <1>에서는 가속으로 움직이며 등속구간 <2>와 만나면  $v_i$  속도로 등속운동을 한다. 그리고 감속구간 <3>과 만나 감속운동을 한다. 그림과 같이 삼분 비선형 슬라이딩 모드에서는 도달 모드가 제거됨으로서 전 구간에서 견실성이 보장된다.

정리 : 조인트  $i$ 의 부시스템에 대한 동특성식 (5)에서 구간별 삼분 비선형 스위칭 평면을 (6)-(8)식으로 이용한다면 구간제어 법칙이 가속구간에서는

$$u_i = \frac{\text{sgn}(s_n x_2)}{c_n a_{ri} x_{n0}} [ |c_n x_{n0} a_{ri}| + a_{2i} |c_n x_{n0}| (b_{n1} + b_{2i} |a_{di}| + b_{3i} |a_{di}|^2) + |x_{n1}| ] \quad (10)$$

이고 등속구간에서는

$$u_i = -\frac{\text{sgn}(s_2)}{a_{ni}} [ |a_{ni}| + a_{2i} (b_{n1} + b_{2i} |a_{di}| + b_{3i} |a_{di}|^2) ] \quad (11)$$

이고 감속구간에서는

$$u_i = \frac{\text{sgn}(s_3)}{a_{ni}} [ c_{2i} |x_{n1}^{1-\zeta} x_{2i}| + |a_{ni}| + a_{2i} (b_{n1} + b_{2i} |a_{di}| + b_{3i} |a_{di}|^2) ] \quad (12)$$

와 같을 때 추적오차는 삼분 비선형 슬라이딩 모드에서 정확한 과도응답을 가지며 점근적으로 영으로 수렴한다.

증명: 다음과 같은 Lyapunov 함수를 선택한다.

$$v = \frac{1}{2} s_j^2, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, 3 \quad (13)$$

a) 가속구간

(13)식을 시간에 대해 미분하고 스위칭 평면 (6)과 로봇 매니퓰레이터의 동특성식 (5)를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= s_n \dot{s}_n \\ &= s_n (2c_n x_{n0} x_2 \dot{x}_2 + 2x_n \dot{x}_2) \\ &= s_n (2c_n x_{n0} x_2 (a_{ri} - m_{ii}^{-1} u_i + m_{ii}^{-1} d_i) + 2x_n \dot{x}_2) \\ &= 2s_n x_2 c_n x_{n0} a_{ri} - 2 \frac{m_{ii}^{-1}}{a_{ni}} |s_n x_2 c_n x_{n0} a_{ri}| \\ &\quad + 2 m_{ii}^{-1} s_n x_2 c_n x_{n0} d_i - 2 m_{ii}^{-1} \frac{a_{2i}}{a_{ni}} |s_n x_2 c_n x_{n0}| \\ &\quad \quad \quad (b_{n1} + b_{2i} |a_{di}| + b_{3i} |a_{di}|^2) \\ &\quad + 2s_n x_2 x_n - 2 \frac{m_{ii}^{-1}}{a_{ni}} |s_n x_2 x_n| < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

b) 등속구간

스위칭 평면 (7)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= s_2 \dot{s}_2 \\ &= s_2 (a_{ri} - m_{ii}^{-1} u_i + m_{ii}^{-1} d_i) \\ &= s_2 a_{ri} - \frac{m_{ii}^{-1}}{a_{ni}} |s_2 a_{ri}| \\ &\quad + s_2 m_{ii}^{-1} d_i - \frac{a_{2i}}{a_{ni}} m_{ii}^{-1} |s_2| (b_{n1} + b_{2i} |a_{di}| + b_{3i} |a_{di}|^2) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

c) 감속구간

스위칭 평면 (8)을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_i &= s_B \dot{s}_B \\ &= s_B (\dot{x}_2 + c_2 \zeta x_1^{\zeta-1} x_2) \\ &= s_B (\ddot{q}_n - m_{ii}^{-1} u_i + m_{ii}^{-1} \dot{d}_i + c_2 \zeta x_1^{\zeta-1} x_2) \\ &= s_B \ddot{q}_n - \frac{m_{ii}^{-1}}{a_n} |s_B \ddot{q}_n| \\ &\quad + m_{ii}^{-1} s_B \dot{d}_i - m_{ii}^{-1} |s_B| \frac{a_2}{a_n} (b_n + b_2 |a_d| + b_3 |a_d|^2) \\ &\quad + c_2 \zeta x_1^{\zeta-1} x_2 s_B - \frac{m_{ii}^{-1}}{a_n} c_2 |x_1^{\zeta-1} x_2 s_B| < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

제안된 스위칭 평면에 대한 도달조건 (14)-(16)으로부터 제어 입력 (10)-(12)는 스위칭 평면에서  $i$ 번째 부시스템을 건설 안정화시킨다. ■

### 3.3 채터링 현상을 제거하기 위한 연속제어법칙

불연속 제어입력 (10)-(12)에 의한 스위칭 평면 근처에서 발생하는 원하지 않는 채터링 현상을 제거하기 위해서  $s$ 에 대한 sgn함수를 포화(saturation)함수로 대치한다.

(a) 가속구간

$$u_i = \begin{cases} u_i = \frac{\text{sgn}(s_n x_2)}{c_n a_n x_{n0}} w_n, & |s_n| \geq \delta_n \\ u_i = \frac{s_n \text{sgn}(x_2)}{c_n a_n x_{n0} \delta_n} w_n, & |s_n| < \delta_n \end{cases} \quad (17)$$

여기서  $\delta_n > 0$ ,  $w_n = [ |c_n x_{n0} \ddot{q}_n| + |x_n| + a_2 |c_n x_{n0} (b_n + b_2 |a_d| + b_3 |a_d|^2)| ]$  이다.

(b) 등속구간

$$u_i = \begin{cases} u_i = \frac{\text{sgn}(s_2)}{a_n} w_2, & |s_2| \geq \delta_2 \\ u_i = \frac{s_2}{a_n \delta_2} w_2, & |s_2| < \delta_2 \end{cases} \quad (18)$$

여기서  $\delta_2 > 0$ ,  $w_2 = [ |a_n \ddot{q}_2 + a_2 (b_n + b_2 |a_d| + b_3 |a_d|^2)| ]$  이다.

(c) 감속구간

$$u_i = \begin{cases} u_i = \frac{\text{sgn}(s_B)}{a_n} w_B, & |s_B| \geq \delta_B \\ u_i = \frac{s_B}{a_n \delta_B} w_B, & |s_B| < \delta_B \end{cases} \quad (19)$$

여기서  $\delta_B > 0$ ,  $w_B = [ c_2 |x_1^{\zeta-1} x_2| + |a_n \ddot{q}_n| + a_2 (b_n + b_2 |a_d| + b_3 |a_d|^2) ]$  이다.

## 4. 모의실험 및 고찰

본 논문의 모의 실험에서는 2자유도를 가지는 두 축 로봇 매니퓰레이터에 제안한 알고리즘을 적용하여 그 타당성을 확인한다. 로봇 매니퓰레이터의 동특성식과 매개변수는 다음과 같다[5].

$$\begin{bmatrix} m_{11}(q_2) & m_{12}(q_2) \\ m_{12}(q_2) & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{12}(q_2) \dot{q}_1^2 + 2\beta_{12}(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ -\beta_{12}(q_2) \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(q_1, q_2) \mathbf{g} \\ \gamma_2(q_1, q_2) \mathbf{g} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

여기서

$$m_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) + J_1$$

$$m_{12} = m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2)$$

$$m_{22} = m_2 l_2^2 + J_2$$

$$\beta_{12}(q_2) = m_2 l_1 l_2 \sin(q_2)$$

$$\gamma_1 = -[ (m_1 + m_2) l_1 \cos(q_2) + m_2 l_2 \cos(q_1 + q_2) ] \mathbf{g}$$

$$\gamma_2 = -[ m_2 l_2 \cos(q_1 + q_2) ] \mathbf{g}$$

매개변수 값들은 다음과 같다.

$$l_1 = 1 \text{ m}, \quad l_2 = 0.8 \text{ m}, \quad m_1 = 0.5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1.5 \text{ kg}, \quad J_1 = J_2 = 5 \text{ kg.m.}$$

원하는 조인트 궤적은 다음과 같이 주어진다.

$$q_{n1} = 1.25 - \frac{7}{5} e^{-t} + \frac{7}{25} e^{-4t} \quad q_{n2} = 1.25 + e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-4t}$$

초기치는 다음과 같다.

$$[ q_1(0), \dot{q}_1(0) ]^T = [ 0.4, 0 ]^T \quad [ q_2(0), \dot{q}_2(0) ]^T = [ 1.8, 0 ]^T$$

식(3)과 (4)의 매개변수는 다음과 같다.

$$a_{11} = 1/15, \quad a_{12} = 1/4, \quad b_{11} = 20, \quad b_{12} = 2, \quad b_{13} = 0$$

$$a_{21} = 1/7, \quad a_{22} = 1/4, \quad b_{21} = 20, \quad b_{22} = 2, \quad b_{23} = 0$$

제안한 알고리즘을 위한 시스템의 첫 번째 부시스템과 두 번째 부시스템의 스위칭 평면은 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} s_{11} &= -0.02 x_{12}^2 + x_{11}^2 + 0.04 & s_{12} &= x_{12} - 1.14 \\ s_{13} &= 6.36 x_{11}^{0.6} + x_{12} & s_{21} &= 0.02 x_{22}^2 + x_{21}^2 - 0.04 \\ s_{22} &= x_{22} + 0.72 & s_{23} &= 6.05 x_{21}^{0.6} + x_{22} \end{aligned}$$

비교를 위한 Zhihong의 스위칭 평면은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s_{11} &= -0.1 x_{12}^2 + x_{11} + 0.2 & s_{12} &= x_{12} - 1.14 \\ s_{13} &= 20x_{11} + x_{12} & s_{21} &= 0.1 x_{22}^2 + x_{21} - 0.2 \\ s_{22} &= x_{22} + 0.72 & s_{23} &= 25x_{21} + x_{22} \end{aligned}$$

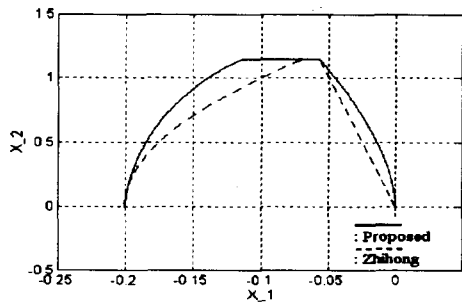
불확실성 유제의 매개변수는 다음과 같다.

$$\delta_{11} = \delta_{21} = 0.005, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = 0.05, \quad \delta_{22} = \delta_{23} = 0.05$$

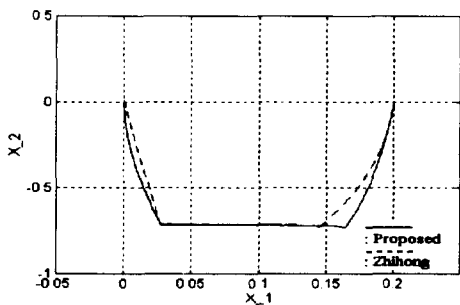
그림 2는 제안된 슬라이딩 평면과 Zhihong의 슬라이딩 평면을 이용한 경우를 비교한 위상평면이다. 그리고 그림 3의 추적오차를 비교해 보면 본 논문의 결과가 비례가속구간과 터미널 슬라이딩 감속구간의 사용으로 빠른 추적성능을 보이고 건설안정함을 확인하였다. 그리고 그림 4의 제어입력에서는 제안한 슬라이딩 평면의 작은 동특성의 변화로 제어입력의 크기가 개선되었다.

## 5. 결론

제안한 삼분 비선형 슬라이딩 제어기는 불확실성의 상위유계를 가지는 시스템에서 비례가속과 터미널 슬라이딩 모드들 사용한 감속의 사용으로 빠른 수렴속도를 가지며 등속에서 감속으로의 전환과정에서 제어입력이 급격히 변하는 문제점을 해결함으로써 제어입력이 개선되었다. 그리고 Lyapunov함수를 이용해 가속, 등속, 그리고 감속구간에서의 건설안정성을 증명하였다. 그리고 제안된 제어기의 타당성을 보이기 위해, 두 축 로봇 매니퓰레이터에 대한 모의실험을 통하여 기존의 경우보다 빠른 수렴을 나타내고 불확실성에 건설안정함을 확인할 수 있었다. 그리고 제어입력에 유계성을 사용하여 원하지 않는 떨림현상이 제거됨을 알 수 있었다.



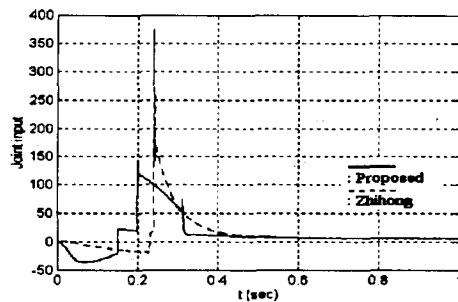
(a) Joint 1.



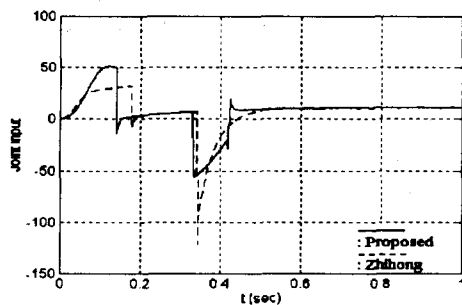
(b) Joint 2.

그림 2. 조인트의 위상평면

Fig. 2. The phase plane of joint by Zhihong and proposed scheme



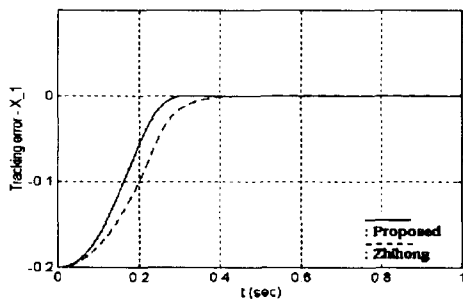
(a) Joint 1.



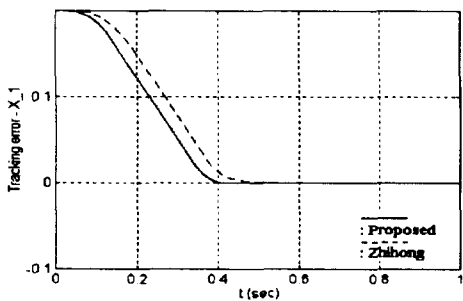
(b) Joint 2.

그림 4. 조인트의 제어입력

Fig. 4. The control input of joint by Zhihong and proposed scheme.



(a) Joint 1.



(b) Joint 2.

그림 3. 조인트의 추적오차

Fig. 3. The tracking error of joint by Zhihong and proposed scheme.

## 참고문헌

- [1] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: A survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, Vol. 40, pp. 2-22, 1993.
- [2] M. Zhihong and M. Palaniswami, "A robust tracking control for rigid robotic manipulator," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, pp. 154-159, 1994.
- [3] A. Davari and Z. Zhang, "Application of the three-segment variable structure system," *Proc. Am Control Conf.*, Vol. 1, pp. 62-63, 1991.
- [4] M. Zhihong and M. Palaniswami, "A robust decentralized three-segment nonlinear sliding mode control for rigid robotic manipulator," *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, Vol 9, pp. 443-457, 1995.
- [5] A. Davari and Z. Zhang, "Three-segment variable structure system," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, Vol. 6, pp. 249-255, 1996.
- [6] M. Zhihong and M. Palaniswami, "A robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulator," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, pp. 2464-2469, 1994.
- [7] H. Khurana, I. Ahson, and S. Lamba, "Variable structure control design for large-scale system," *IEEE Trans. Systems Man Cyber.*, No. 4, pp. 573-576, 1986.