

# 표면 임피던스 경계조건을 이용한 손실유전체 해석

\*김 병찬, 김 채영

경북대학교 전자전기 공학부

## The Analysis of Lossy Dielectric using Surface Impedance Boundary Condition

\* Byung Chan Kim, Che Young Kim

Dept. of Elec. kyungpook Nat'l Univ

### Abstract

Surface impedance boundary condition(SIBC) concepts are introduced into the finite-difference time-domain(FDTD) method. Lossy conductors are replaced by surface impedance boundary conditions reducing the solution space and producing significant computational savings. Specifically, a surface impedance boundary condition is developed to reduce a lossy dielectric half-space. Since Maxwell's equations are solved directly, the reflected and transmitted pulse amplitude demonstrate how the reflection and transmission coefficient determine reflected wave amplitude. In this paper, two implementations of reflection coefficient are presented. One implementation is a standard FDTD technique and the other is a FDTD using surface impedance boundary condition(FDTD-SIBC) that are applicable over a very large frequency bandwidth.

Particularly, an efficient way to transform the time domain results to frequency domain is presented. Thus, frequency domain results are presented in one dimension and are compared with exact results.

### I. 서론

주파수 영역에서 적용되는 표면 임피던스 경계조건(Surface Impedance Boundary Condition)을 유한 차분법 시간영역 해석(Finite-Difference Time-Domain)알고리즘에 적용한다. FDTD 기법은 시간영역 및 공간 영역에서의 해석법으로써 과도응답을 구할 수 있으며 또한 임의의 진원을 구현할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 기법을 손실 유전체에 적용할 경우 손실 유전체의 전체 구조에 대한 완전한 해석이 우선 되어야 하며 이것은 계산 용량과 계산 시간의 증대를 의미한다.

본 논문에서는 자유공간-손실유전체 구조에 대한 FDTD 알고리즘과 SIBC를 적용한 FDTD 알고리즘(FDTD-SIBC)에 대한 비교를 통해 계산 시간과 용량의 감소를 확인하였으며 그 결과는 잘 일치함을 보인다. SIBC를 FDTD 알고리즘에 적용하기 위해서 시

간 영역으로 변환하고 이 변환을 통해서 구한 결과를 주파수 영역의 복소량으로 변환할 때, 제시된 알고리즘에 알맞는 변환 방법이 사용 되었다. 제안된 방법에 의한 해의 정확도를 검증하기 위하여 해석적인 해와 비교함으로써 그 타당성을 확인할 수 있었다.

### II. 본론

일반적인 손실 유전체의 표면은 곡률을 가지며 이는 SIBC를 적용할 경우 고려해 주어야 한다. 그러나 표면에서의 최소 곡률 반경이 산란체 내부를 전파하는 파의 파장보다 훨씬 클 경우 그 표면은 진행파에 대해 평면으로 간주할 수 있다. FDTD 기법에서 흔히 사용되는 산란체를 이산화 할때 그 셀의 크기는 입력파의 1/10 미만이므로 곡률을 가진 손실 유전체의 표면도 평면으로 간주 하여 해석할 수 있다[1].

#### 1. FDTD 알고리즘

그림 1과 같은 자유공간-손실유전체 구조에 대해 계산의 간략화를 위해 1차원에서의 유한 차분방정식을 다음의 가정을 통해 유도한다. 먼저  $E$ 와  $H$ 가  $x$  방향으로 진행하는 TE파 이고  $E_y$ 와  $H_z$  성분만을 갖는다고 하면 맥스웰 방정식에서

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial x} + \sigma E_y \right) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1b)$$

와 같다.

식(1)을 Yee의 이산화 식을 이용하여  $x = i\Delta x$ ,  $t = n\Delta t$  그리고

$F^n(i) = F(i\Delta x, n\Delta t)$  라고 두고, 정리하면 다음의 식을 얻는다

[2, 3].

$$E_y^{n+1}(i) = \frac{\epsilon(i)}{\epsilon(i) + \Delta t \sigma(i)} E_y^n(i)$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x(\epsilon(i) + \Delta t + \alpha(i))} \quad (2)$$

$$\cdot \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}) \right]$$

자계에 대해서도 마찬가지로 비슷한 표현식이 얻어진다.

## 2. FDTD-SIBC 알고리즘

자유 공간-손실 유전체 경계면에 대해 파는 수직으로 입사되며 손실 유전체를 바라본 임피던스는 손실 유전체에 대한 고유 임피던스와 동일하다. 이것은 무한이 뻗어있는 전송선의 경우와 유사하며 그 때의 임피던스는[4]

$$E_y(w) = Z_c(w) H_x(w) \quad (3)$$

이다. 식 (3)에서  $Z_c(w)$  는

$$Z_c(w) = \frac{\sqrt{jw\epsilon}}{\sqrt{\sigma + jw\epsilon}} = \eta \frac{\sqrt{jwa}}{\sqrt{1 + jwa}} \quad (4)$$

이고, 여기서  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ,  $a = \sigma/\epsilon$  이다. 식 (3)에 대한 시간 영역에서의 표현식은 표면 임피던스  $Z_c(w)$  와 자장  $H_x(w)$  의 콘벌루션으로 표현된다. 이 콘벌루션식의 직접 계산은 전 시간 영역에 대한 자계의 값이 필요하며 이는 상당한 용량이 필요함을 의미한다. 보다 효율적인 계산을 위해  $Z_c$  를 1 차의 유리함수를 이용해 근사화 시킨다[5]. 근사화를 통해 정규화된 임피던스 식을 식 (3)에 적용하면 다음과 같다.

$$E_y(t) = z_c(t) * H_x(t) \quad (5)$$

$$\approx \eta_2 H_x(t)$$

$$- \eta_2 \int_0^t \sum_{j=1}^L a_j C_j e^{\sigma_j(t-\tau)} H_x(\tau) d\tau$$

여기서 L은 1차의 유리화 근사에 사용된 갯수이며  $W_j, C_j$  는 그 계수로써 표 1에 그 값이 주어져 있다. 식 (5)를 이산화 하면 아래와 같다.

$$E_x(n \Delta t) = \eta_2 H_y(n \Delta t) - \sum_{j=1}^L A_j(n \Delta t) \quad (6a)$$

여기서,

$$A_j(n \Delta t) = P_{j1} H_x(n \Delta t) \quad (6b)$$

$$+ P_{j2} H_x(n \Delta t)$$

$$+ P_{j3} A_j((n-1) \Delta t))$$

이며,

$$P_{j1} = \eta_2 \frac{C_j}{W_j} [1 + (e^{-\sigma_j \Delta t} - 1) / (\Delta t a W_j)] \quad (6c)$$

$$P_{j2} = \eta_2 \frac{C_j}{W_j} [1 / (\Delta t a W_j) - e^{-\sigma_j \Delta t} (1 + 1 / (\Delta t a W_j))] \quad (6d)$$

$$P_{j3} = e^{-\sigma_j W_j \Delta t} \quad (6e)$$

로 주어진다. 식 (6)은 필드 샘플 위치에서 계산되어지는 값들이며 따라서 공간에 대한 이산화 변수는 생략되어 있다. 식 (6c)-(6e)는 FDTD 알고리즘이 적용 되기 이전에 상수로서 결정이 되며 단 한 번만 수행된다.

$C_j$	$W_j$
1.2264e-8	4.0698e-6
2.5671e-6	1.8465e-4
1.5177e-4	3.2424e-3
4.4243e-3	3.4284e-2
6.9826e-2	0.2360
0.4247	0.8308

표 1. 유리화 근사결과

## 3. 주파수 영역으로의 변환

시간 영역에서 얻어진 이산 데이터를 주파수 영역에서의 복소량으로 혹은 그 역변환에 있어 이산화 푸리에 변환(DFT/IDFT)이 사용된다[6]. 그러나 제시된 알고리즘의 경우 시간 영역에서의 데이터는 복소수가 아닌 실수값이며 그 스펙트럼은 정상 상태에 도달하는 시간에 있어서의 샘플 데이터 갯수의 1/2개에 대해 대칭이다. 특히, FDTD기법의 경우 시간 영역에서 파형을 직접 추적할 수 있다는 잇점을 가지고 있어 계산 범위를 축소할 수 있다. 따라서 실제적인 계산은 관심 주파수 대역에 대해서만 수행이 되며 이 경우 주파수 범위는 10GHz 까지이고 그 표현식은 아래와 같다.

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F^n(i_p) e^{-j2\pi f_k t_n} \quad (7)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 256$$

$k$  는 관심 주파수 범위를 나타내는 이산화 주파수 범위이며  $f_n = \frac{n}{N \Delta t}$ ,  $t_n = k \Delta t$  그리고  $N = 4096$ 이고 샘플링 주파수  $\Delta f$  는 97.656MHz 이다.  $i_p$  는 샘플 위치를 나타낸다.

## III. 수치해석 및 결과

그림 1의 구조의 해석을 위해 영역을 800개의 셀로 나누었으며

$\Delta t = 2.5\text{ps}$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 2.0\text{ S/m}$  이며  $\Delta x$  는  $0.0015\text{m}$ 이다. 입력파로서는 주기  $T = 400\text{ ps}$ 인 다음의 가우시안 펄스를 사용하였다.

$$E_z^*(i) = \exp[\ln(0.001) \cdot (\frac{i-xb/\Delta x - cn\Delta t}{w})^2] \quad (8)$$

여기서,  $x_b$ 는 펄스 최대치의 초기 위치이며  $w$ 는 펄스의 파장을 나타낸다. 그리고  $\eta_0$ 는 자유공간의 임피던스이다. 또한 안정화를 위해  $c\Delta t = 0.5\Delta x$ 로 하였다. SIBC는 400번째 셀에서 적용이 되며 펄드 샘플 위치는 300번째 셀이다. 이 위치에서의 임피던스는 주파수 영역에서 전계와 자계의 비로 구하며 반사 계수 이 임피던스 값을 이용해서 구할 수 있다. 구한 해의 타당성 검증에 위해 다음의 해석적인 해와 비교 하였다.

$$\Gamma_{exact} = \frac{1 - \sqrt{1 - j\sigma/w\epsilon}}{1 + \sqrt{1 - j\sigma/w\epsilon}} \quad (9)$$

FDTD에서의 반사계수는 먼저 산란체를 제거한 후 구해지는 입력 펄드와 산란체가 있을 경우의 전체 펄드에서 반사 펄드를 구한 후 주파수 영역에서 입력 펄드와 반사 펄드의 비를 취하여 구할 수 있다. 두 가지 경우에서 구한 반사계수가 그림 3에 주어졌다. 고주파수에서의 약간의 오차는 FDTD-SIBC의 유리화 근사화에 기인하며 그 결과는 잘 일치함을 알 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 동일한 구조물에 대해 FDTD 알고리즘과 유리화 근사를 이용한 FDTD-SIBC 알고리즘을 각각 적용하여 그 해석 결과가 잘 일치 한다는 것을 보였으며 특히, 시간 영역에서의 결과를 주파수 영역의 복소량으로 변환하는 간단한 방법을 소개 하였다. 이 변환 방법을 통해 얻어진 결과를 해석적인 해와 비교하여 그 타당성을 검증하였다.

#### 참고 문헌

- [1] R. J. Luebbers, K. S. Kunz, "FDTD modeling of thin impedance sheets," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 40, No. 3, pp. 349-351, March 1992.
- [2] K. S. Yee "Numerical solution of initial boundary value problem involving maxwell's equation in isotropic medium," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-14, pp. 302-307, May 1966.
- [3] G. Mur, "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. EMC-23, No. 4, pp. 377-382, November 1981.

- [4] D. M. Pozar, "Microwave engineering," New York : Addison-Wesley, 1990.
- [5] J. E. Schutt-Aine "An efficient implementation of surface impedance boundary conditions for the finite-difference time-domain method," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* vol. 43, No. 7, pp. 660-666, July 1995.
- [6] W. Y. Zou, Yiyon Wu "COFDM : An overview," *IEEE Trans. Broadcasting.*, vol. 41, No. 1, pp. 1-8, March 1995.

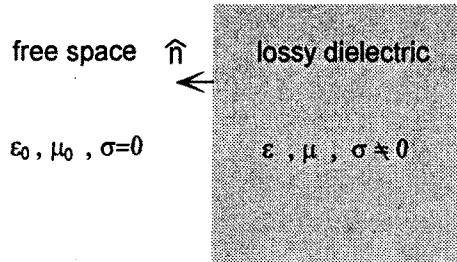


그림 1 자유공간-손실유전체 경계

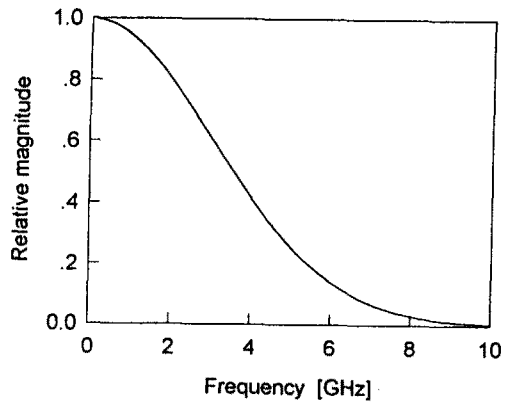


그림 2 입력 펄스의 스펙트럼

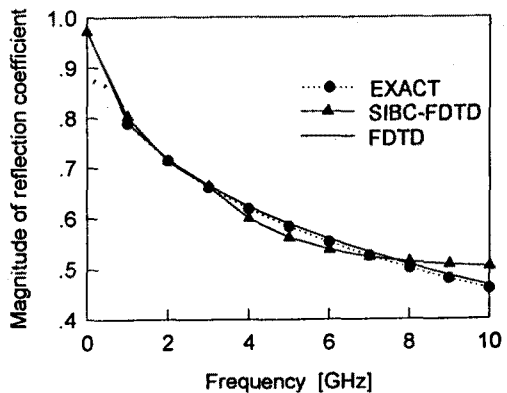


그림 3. 반사계수,  $\sigma = 2.0\text{ S/m}$