

## 유한 요소법과 이차원 텐서를 이용한 회전자계의 특성 해석

\*이 창환, 김홍규, 정현교

서울대학교 공과대학 전기공학부

홍선기

호서대학교 공과대학 전기전자제어 공학부

### Analysis of the Rotational Magnetic Field using the FEM and the 2-Dimensional Permeability Tensor

\*Chang-Hwan Lee, Hong-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung  
School of Electric Engineering, Seoul Nat'l Univ.

Sun-Ki Hong  
School of Electrical Engineering, Hoseo Univ.

**Abstract** - Recently, the finite element analysis(FEM) using two dimensional magnetic permeability tensor was introduced to calculate the magnetic field considering the rotational hysteresis. We obtain the tensor matrix from the measured data using two-dimensional magnetic measuring apparatus. We calculate the induced magnetic flux density and the rotational hysteresis loss under the model with the same condition with the measuring apparatus. Therefore we show that FEM with tensor can be used to calculate the magnetic flux density and the rotational hysteresis loss in the arbitrary rotational magnetic field.

방법이 복잡한 시스템에도 응용이 가능함을 보였다. 또한 유기된 자속밀도가 작을 경우 설계로 정현적 자계에 대해 또한 정현적 자속밀도가 유기됨을 볼 수 있으나 자속밀도가 커지면 정현적 관계는 조금씩 깨지는 것을 보여 손실에서의 오차원인과 그 해결방법을 제시한다.

## 1. 서 론

FEM과 같은 수치해석방법에서는 일반적으로 자계  $\vec{H}$ 와 자속밀도  $\vec{B}$ 의 관계를 스칼라적으로 정의하여 스칼라 투자율을 사용하고 있다. 그러나 이 방법으로는 정확한 자속밀도의 계산 뿐만 아니라 손실계산에 있어도 큰 오차가 발생하므로 자계와 자속밀도의 벡터적인 관계를 나타내고자 많은 노력이 행해지고 있다. 하지만 대부분의 방법이 계산시에 많은 시간과 계산량을 요하므로 복잡한 시스템에의 응용에는 어려움을 가지고 있고 특히 이방성자성재료에의 적용은 아직도 어려움이 많다. 최근 제안된 이차원 퍼미에럴리티 텐서를 이용한 방법은 Back Data Modeling 기법의 한 방법으로 많은 데이터를 필요로 하지만 일단 데이터베이스화가 되면 그 후의 계산량과 계산시간 면에서는 상당한 이점을 가지고 있다. 자계와 자속밀도가 정상상태에 들어서면 외부 상황이 바뀌지 않는 한 그 형태가 유지되며, 만약 고조파의 영향을 무시하면 하나의  $2 \times 2$  텐서로 자계와 자속밀도의 관계는 정의될 수 있으며 이러한 텐서는 자속밀도의 최대값( $B_{max}$ )과 자속밀도의 최소 최대의 비( $\alpha$ ), 그리고 경사각(inclination angle)  $\theta$ , 즉 자화용이축과 최대자속밀도,  $B_{max}$  사이의 각도로 정의된 값들의 함수이다.[1] 각 용어에 대한 설명은 그림 2로 대신 한다. 그림 2는 측정된 결과값 중의 한 예로 기본파만 뽑아 낸 것이다. 이러한 방법이 세부적인 특성이 명확하지 않은 시스템에 응용되기 위해서는 임의의 회전자계에서의 유기된 자속밀도가 실제 측정된 값과 이차원 텐서를 이용한 유한요소해석의 결과가 일치하는 만큼 유사하며 또 그 결과 계산되는 회전자력손실도 오차한계내에 들어와야만 한다. 본 논문에서는 실험에 의해 얻은 데이터로부터 구한 텐서를 적용한 유한요소법의 결과와 실험으로 측정된 자계, 자속밀도 그리고 회전자력손실을 비교하여 제안된

## 2. 유한요소법 정식화

### (a) 이차원 투자율 텐서

회전자계가 발생하는 곳에서는 자계와 자속밀도간에 회전자력현상이 발생하여 위상차가 생긴다. 이런 상황에서의 자계와 자속밀도는 이차원 투자율 텐서로 그 관계를 표현할 수 있다. 또한 자계와 자속밀도가 정상상태, 즉 그 형태가 바뀌지 않고 기본파만 고려하면 한 주기동안의 자계와 자속밀도의 관계를 하나의 상수 이차원 투자율 텐서로 표현할 수 있다.[1][2] 즉, 자속밀도와 자계와의 관계는 식(1)과 같은 텐서형태로 표현된다.

$$\begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{XX} & \mu_{XY} \\ \mu_{YX} & \mu_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_X \\ H_Y \end{pmatrix} \quad (1)$$

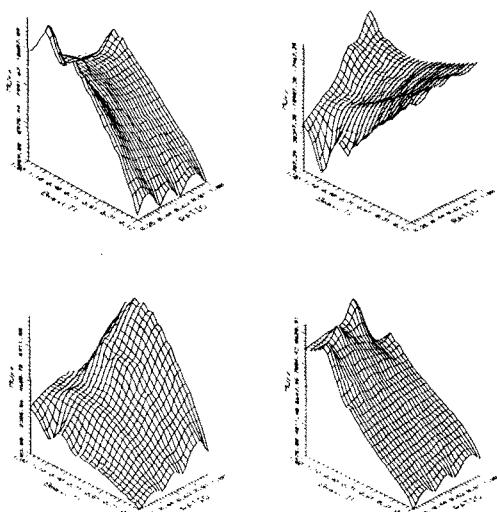
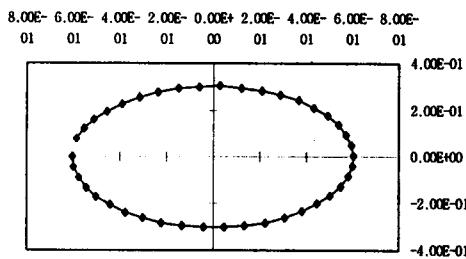
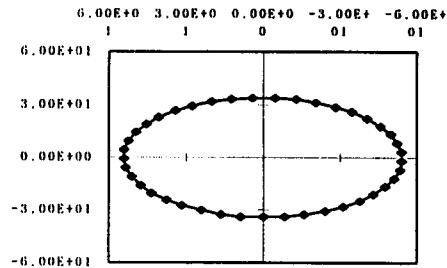


그림 1  $\theta = 0^\circ$  일 때, ratio와  $B_{max}$ 에 대한  $U_{xx}$ ,  $U_{xy}$ ,  $U_{yx}$ ,  $U_{yy}$



(a) 측정된 자속밀도 형상



(b) 측정된 자계 형상

그림2.  $\theta=0$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $B_{max}=0.6$ 일 때의 측정  $B_zH$ 의 한 예

### (b) 정식화

몇 가지 유한 요소 정식 중에서 에너지 범함수를 이용하는 것 이 있으며 그 식은 다음과 같다.

$$I = \int_Q (\int \vec{H} \cdot d\vec{B}) dQ - \int_Q \vec{j} \cdot \vec{A} dQ \quad (2)$$

여기서  $Q$ 는 해석 영역이며  $\vec{j}$ 는 자유 전류밀도이다. 그리고  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ 이다. 그러나 이와 같은 에너지 범함수는 텐서 메트리스가 대칭일 경우만 해의 유일성이 보장되므로 사용할 수가 없다.[3]

따라서 해석 영역의 한 방향 (z 축)으로 일정하며 변위전류가 무시할 만큼 작으면 맥스웰 방정식과 식1.을 사용할 수 있다.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\nabla \times \vec{A} = \vec{B}) \quad (3)$$

여기서  $\vec{j}$ 는 자유전류밀도이고  $\vec{A}$ 는 자기 벡터 포텐셜이다. 식1.을 이용하여 식(3)을 정리하면 식(4)와 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_{zz} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{zz} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) - \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu_{zz} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_{zz} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) = -j \quad (4)$$

여기서  $\nu_{zz}$ 는 투자율 텐서의 역행렬 요소이다. 이 식은 갤러킨 법을 사용하여 정식화하였다.

### (b) 회전이력 손실

전체 철손실과 회전이력손실은 다음과 같다.[2][3]

(단위는 W/kg 입)

$$P_t = \frac{1}{T\rho} \int_0^T \left( \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \right) dt = \frac{1}{T} \int_A \left( H_z \frac{dB_x}{dt} + H_x \frac{dB_y}{dt} \right) dt$$

$$P_r = \frac{1}{T\rho} \int_T \frac{d\theta}{dt} (\vec{H} \times \vec{B})_z dt \approx \frac{1}{T\rho} \sum_{i=1}^N \Delta \theta_i (\vec{H} \times \vec{B})_z \quad (5)$$

### 3. 시뮬레이션 결과 및 토의

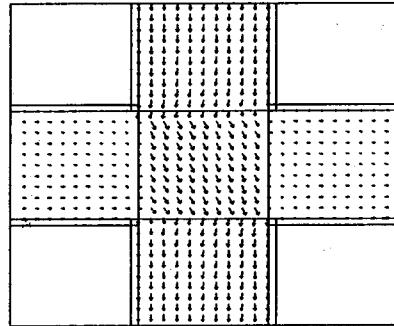


그림3. 시뮬레이션 모델링과 자계의 예

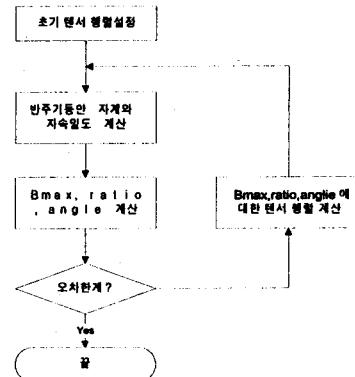
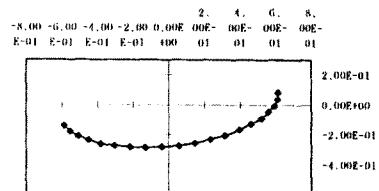


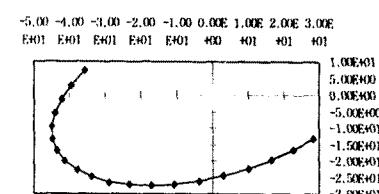
그림4. 계산 흐름도

자속 밀도와 자계의 형상과 위상 관계를 명확히 관찰할 수 있도록 반주기의 형상만을 나타내었으며 회전방향은 시계방향이다. 그림3은 적용 모델인데 이차원 자계축 정장치를 그대로 모델링한 것이며 한 주기를 42번 추출하여 계산하였는데 그 중 한 단계의 결과를 나타내었다. 몇 가지 경우에 대해 모델에 그림 1과 같이 구축된 데이터 베이스를 이용하여 그림 4의 흐름도에 따라 계산하여 수렴된 결과와 측정된 결과를 그림 5와 그림 6에 보였다. 측정된 결과는 계산결과와 일어지는 텐서를 이용하여 테이블 베이스로부터 얻은 것이나 충분치 않은 데이터로 인해 조금의 오차가 있다. 그림 5의 경우에 회전손실은 0.499 (W/kg)이며 실험에서 얻은 고조파가 고려된 회전손실은 0.52(W/kg)이다. 오차의 원인은 첫째, 비선형문제에서 수렴의 정확성에서의 오차에 의한 자계와 자속밀도 형상의 차이, 그리고 측정 파형에서 기본파만 사용한 데서 오는 손실의 차이 때문일 것이다. 유기된 자속밀도가 큰 경우는 대체로 고조파의 영향이 크기 때문에 반드시 비례관계에 있는 것은 아니나 손실의 오차가 유기된 자속밀도가 작은 경우보다 큰 경향을 보인다. 그림 7은 자속밀도가 작은 경우와 큰 경우에 실제 파형, 즉 고조파의 영향이 고려된 파형과 기본파

반 고려된 과정을 비교한 것이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 유기된 자속밀도가 크면 형상 왜곡이 심함을 볼 수 있다. 그림 7이 보여주는 것은 자속밀도의 형상이 아니라 자계의 형상을 비교한 것이다. 그 이유는 측정에서는 원하는 자속밀도에 따른 자계를 측정할 수 있기 때문이다. 같은  $\alpha$ 와  $\theta$ 에 대해 유기된 자속밀도와 손실차의 관계를 그림 8에 보였다. 비례관계는 아니지만 그 경향이 앞에서 말한 것과 같음을 알 수 있다.

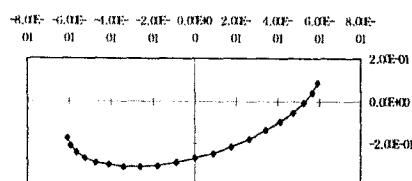


(a) FEM에 의한 자속밀도의 형상

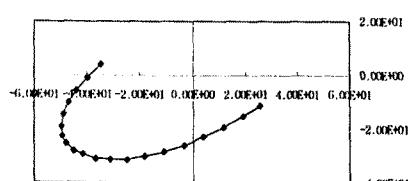


(b) FEM에 의한 자계의 형상

그림5. 계산 결과



(a) 측정된 자속밀도의 형상



(b) 측정된 자계의 형상

그림6. 측정 결과

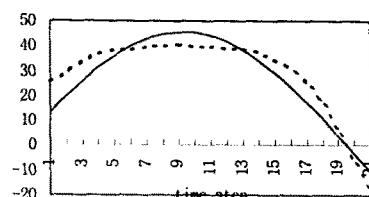


그림7. 고조파가 고려된 경우(실선)와 안된 경우(점선)의 y-성분  
자계의 과정

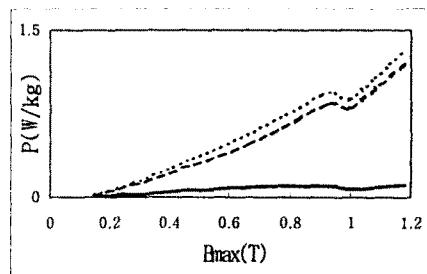


그림8.  $\alpha=0.4, \theta=0$ 일 때  $B_{\max}$ 에 따른 손실차(실선)  
가는 점선:고조파 고려된 손실, 굵은 점선:기본파만 고려된 손실

그림 5와 6에서 보는 바와 같이 임의의 회전자계가 인가될 경우 유기되는 자속밀도를 빠른 수렴성을 가지고 구할 수 있었으며 거기에 따른 손실을 자속밀도가 작은 경우 10 % 정도의 오차내에서 구할 수 있었다. 하지만 이번 실험과 이 방법의 단점은 큰 자속밀도의 경우 고조파의 영향이 크다는 것인데, 그 해결책은 결국 고조파를 고려하는 것이며 고조파를 고려하기 위해서는  $2 \times 2$  텐서가 아닌 더 큰 텐서를 이용해야 하며 그 만큼 컴퓨터에서의 메모리와 계산량이 증가하게 된다. 실제로 변압기의 경우에는 3 또는 5 고조파의 영향이 꽤 큼데 이 정도 고조파를 고려하기 위한 계산량 증가는 크지 않지만, 회전기의 경우는 주파수가 증가할 수록 스트레이스로스라고 정의하여 보정계수에 의해 경험적으로 계산되는 손실이 있다. 이러한 손실이 바로 수십 고조파의 영향으로 인한 이력손실의 증가때문이라는 사실이 실험에 의해 밝혀지고 있다. 따라서 매우 복잡한 문제이나, 계속적인 연구가 요구된다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 임의의 회전자계가 인가될 경우, 측정된 이차원 투자를 텐서 데이터 베이스를 이용한 반복 알고리즘에 의해 유기되는 자속밀도를 비선형 해석을 통해 구해 냈으므로 비가역적으로 위상차를 가지는 자계와 자속밀도와의 관계를 나타낼 수 있으며 이를 이용하여 회전기력 손실을 얻음으로 회전자계가 발생하는 복잡한 시스템에도 적용 가능함을 보였다.

#### - References -

- [1] M. Enokizono, "Constitutive Equations  $B=\mu H$  and Two-dimensional Magnetic Properties", Two dimensional Magnetic Measurement and its properties, pp3-16, 1993
- [2] H.Y. Lee, H.K. Jung, S.Y. Hahn, G.S. Park, "Finite Element Analysis of Rotational Hysteresis Loss using Two Dimensional Permeability Tensor", Journal of KMS, vol.5, Num.5, Oct., 1995
- [3] Jian Guo Zhu and Victor Stuart Ramsden, "Two Dimensional Measurement of Magnetic Field and Core Loss using a Square Specimen Tester", IEEE Trans. on Magnetics, vol.29, NO.6, November 1993