

모델 기준 제어를 이용한 이산치 혼돈 시스템의 제어

박광성, 주진만*, 박진배*, 최윤호**, 윤태성***

*연세대학교 전기공학과, **경기대학교 전자공학과, ***창원대학교 전기공학과

Control of Discrete-Time Chaotic Systems Using Model-Based Control

Kwang-Sung Park, Jin-Man Joo*, Jin-Bae Park*, Yoon-Ho Choi**, Tae-Sung Yoon***

* Dept. of Electrical Eng., Yonsei Univ., ** Dept. of Electronic Eng., Kyonggi Univ.,

*** Dept. of Electrical Eng., Changwon Univ.

Abstract

In this study, a new OSA controller is proposed for controlling discrete-time chaotic systems efficiently. A new OSA controller uses NARMAX models, and its feedback gain is designed on the basis of conventional linear control theory. In order to evaluate the performance of a new OSA controller, a new OSA controller is applied to Henon system which is a discrete-time chaotic system, and then the control performance of a new OSA controller are compared with that of the previous model-base controller through computer simulations.

1. 서론

비선형 결정론적 규칙에 지배되는 혼돈(chaos) 현상은 특히 초기치에 매우 민감한 성질을 가지며 외부적으로 예측 불가능하고 불규칙한 동태를 보인다. 특히 지금까지 산업계에서 예측 불가능하여 외란이나 잡음으로 간주되던 신호들이 혼돈 특성을 갖는 신호로 밝혀졌으며[1], 안정한 시스템 동작을 위해 혼돈 현상의 제거 및 억제를 위한 혼돈 제어 방법에 관한 연구들이 현재 활발히 진행되고 있다[2].

기존의 혼돈 제어 방법들은 혼돈 시스템에 대한 주기 운동이나 평형 상태로의 수렴이 연구자의 직관 및 경험적인 측면에 의해 도출되어 제어 이론의 해석과 합성등에 어려움이 있으며, 산업계에서 실제 구하기 어려운 시스템의 정확한 모델을 필요로 하기 때문에 제어 방법의 실제 적용에 많은 문제점을 가지고 있다.

1994년에 H.K. Qammar와 F. Mossayebi에 의해 제안된 모델 기준 제어(model-based control)[3]에서는 시스템의 입·출력에 대한 NARMAX(Nonlinear AutoRegressive Moving Average models with exogenous inputs) 모델[4]을 사용하여 간접 적용 제어 방식의 OSA (One-Step-Ahead) 제어를 구성하였다. 또한 모델 기준 제어에서는 비선형 모델의 파라미터 값을 전통적인 시스템 동정(identification) 방법인 순환 최소 자승법(Recursive Least Square : RLS)[5]을 통해 추정할 수 있으며 이산치 혼돈 시스템인 Henon 시스템에도 적용할 수 있다. 한편 평형 상태값과 예측 출력값사이의 예측 오차를 다음 샘플 단계의 제어 입력 신호로 사용하는 기존 OSA 제어기는 정의되는 NARMAX 모델에 따라 효율적인 제어 입력 신호를 얻을 수 없으며 느린 정정 시간과 오프셋(offset)을 발생시키는 단점을 가진다.

본 논문에서는 기존 선형 제어 이론에 기초하여 예측 오차의 비용 함수를 최소화함으로써 구해진 개관 이득값을 이용한 OSA 제어 법칙을 유도하였으며, 제안된 제어 법칙을 이산치 혼돈 시스템인 Henon 시스템에 적용하여 제안된 제어기의 효율성을 시뮬레이션을 통해 고찰해 보았다.

2. 이산치 혼돈 시스템을 위한 모델 기준 제어

2.1 이산치 혼돈 시스템

대표적인 이산치 혼돈 시스템은 Henon 맵(map)과 Lozi 시스템등이 있다. Henon에 의해 제안된 Henon 맵은 혼돈 시스템의 특성인 초기치 민감성(initial value sensitivity)과 스트레인지 어트랙터(strange attractor) 특성을 갖는다. Henon 맵의 상태 방정식은 식 (2-1)과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= a(1.0 - x_1(t)^2) + bx_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (2-1)$$

여기서 $a=1.3$ 이고 $b=0.05$ 이다.

스트레인지 어트랙터는 위상 평면상에서 혼돈 시스템의 상태 변수들의 궤적들을 추적할 때 위상 평면상의 일정 영역에서 상태 변수들의 궤적이 위치하면서 개개의 궤적이 전체 궤적을 닮지만 동일하지 않는 프랙탈(fractal)한 특성을 갖는 궤적들의 집합을 의미하며, 그림 2.1은 이산치 혼돈 시스템인 Henon 시스템의 스트레인지 어트랙터이다.

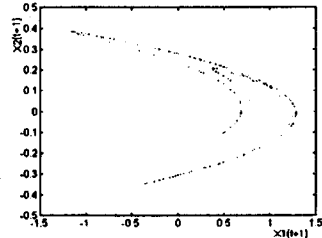


그림 2.1 Henon 시스템의 스트레인지 어트랙터

한편 혼돈 시스템의 제어 목적은 어트랙터내의 초기치에서 시작한 혼돈 시스템을 어트랙터내의 불안정한 평형점이나 제한 주기(limit cycle)로 시스템이 수렴하도록 하는 것이며 이때 초기치의 선정은 혼돈 시스템의 제어에 큰 영향을 미친다.

2.2 모델 기준 제어

간접 적응 제어 방식의 모델 기준 제어는 시스템 모델을 정의하고 전통적인 동정 방법을 통해 비선형 시스템을 동정하여 제어기를 구성할 수 있으며, 제어 대상이 되는 비선형 시스템에 포함되어 있는 복잡한 비선형성을 별도로 고려할 필요가 없는 장점이 있다.

그림 2.2은 본 논문에서 사용한 간접 적응 제어기의 블록 선도이다.

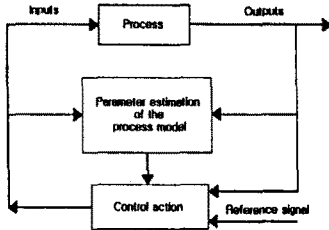


그림 2.2 간접 적응 제어기의 블록 선도

우선, 이산치 혼돈 시스템은 초기치에 매우 민감한 비선형 시스템으로서, 식 (2-2)와 같은 일반적인 비선형 시스템에 대한 모델식으로 표현할 수 있다.

$$y_{t+1} = F^{\eta}[y_t, \dots, y_{t-\eta}, u_{t-d}, \dots, u_{t-d-\eta-1}] \\ = F^{\eta}[V_t, \dots, V_t] \quad (2-2)$$

여기서 d 는 지연 상수이며, η 는 비선형도를 의미하며, 또한 n_y 는 출력 지연도이며, n_u 는 입력 지연도이고 s 는 $n_u + n_y$ 이다.

식 (2-2)의 비선형 시스템 시스템을 모델링하기 위해 S.A. Billings에 의해 제안된 NARMAX 모델은 일반화된 비선형 시스템 모델로서 본 논문에서는 식 (2-3)과 같은 NARMAX 모델을 이산치 혼돈 시스템을 위한 비선형 시스템 모델로 고려한다.

$$y_{t+1} = \sum_{i=1}^m c_i V_t + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} V_t V_j + \dots \\ + \sum_{i=1}^m \dots \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^m c_{i\dots mn} V_t \dots V_m V_n \quad (2-3)$$

표 2.1은 본 논문에서 고려한 NARMAX 모델을 선형과 자승 모델별로 나타낸 것이며, 표에서 L 및 Q는 자기 선형과 자승 모델임을 의미한다.

표 2.1 NARMAX 모델

모 델	예 측 모델식
L ₁	$y_{t+1} = c_1 y_t + c_2 + u_t$
Q ₁	$y_{t+1} = c_1 y_t + c_2 y_t^2 + c_3 + u_t$

식 (2-3)의 시스템 모델에서 각각의 파라미터들은 선형 관계가 있으며, 식 (2-4)과 같이 표현할 수 있다.

$$y_{t+1} = \phi_t^T \theta, \quad (2-4)$$

여기서 θ ,는 파라미터 $c_{i\dots mn}$ 의 벡터이며, ϕ_t 는 과거 입력 출력값들에 대한 함수들의 벡터이다. 한편 편의상 제어 입력 u_t 의 상수값은 1로 하며 차수 역시 1로 한다.

앞서 정의한 NARMAX 모델의 파라미터 값의 추정은 가장치를 갖는 순환 최소 자승법을 통해 추정하는데 우선 가장치를 갖는 예측 오차의 합을 의미하는 비용 함수를 식 (2-5)와 같이 정의하자.

$$S_{t+1} = w S_t(\theta) + (y_{t+1} - \phi_t^T \theta)^2 \quad (2-5)$$

식 (2-5)의 비용 함수를 최소화하면 식 (2-6)과 같이 순환 최소 자승법을 유도할 수 있다.

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \frac{P \phi_t (y_{t+1} - \phi_t^T \theta_t)}{w + \phi_t^T P \phi_t} \\ P_{t+1} = \frac{1}{w} \left(P_t - \frac{P \phi_t \phi_t^T P_t}{w + \phi_t^T P \phi_t} \right) \quad (2-6)$$

여기서 P 는 공분산(covariance) 행렬이며, w 는 0과 1사이의 망각(forgetting) 상수이다.

모델 기준 제어에서 시스템을 동정할 때 비선형 시스템의 실제 출력값과 모델의 예측 출력값사이의 예측 오차로 인해 공분산 행렬 P_t 의 급격한 증가로 인해 시스템이 불안정해지는 wind-up 현상이 발생하게 되는데, 본 논문에서는 이에 대한 해결 방법으로서 시스템의 예측 오차가 일정 범위내에 들면 파라미터 값을 갱신하지 않는 방법을 사용하여 불안정성을 제거하였다.

2.3 OSA 제어기의 구성

기존의 모델 기준 제어에서는 현 샘플 단계의 예측 오차를 다음 단계의 제어 입력 신호로 사용하나 불규칙한 동태를 갖는 혼돈 시스템의 특성에 대처할 수 있는 효율적인 제어 입력 법칙을 얻을 수 없다. 따라서 모델 기준 제어에서 사용한 NARMAX 모델을 이용하여 기존 선형 제어 이론을 기초로한 OSA 제어기의 제어 법칙을 유도하자.

우선 식 (2-7)과 같은 선형 방정식을 고려한다.

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) \quad (2-7)$$

여기서 각 변수의 정의는 다음과 같다.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}$$

식 (2-7)은 식 (2-8)과 같은 d 샘플링 단계의 예측 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (2-8)$$

여기서 각 변수의 정의는 다음과 같다.

$$\alpha(q^{-1}) = a_0 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n-1} q^{-(n-1)} \\ \beta(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{m+d-1} q^{-(m+d-1)}$$

그리고 시스템의 출력값 y 와 평형 상태값 y^* 사이의 예측

오차를 최소화하는 비용 함수를 식 (2-9)와 같이 고려하자.

$$J = [y(t+d) - y^*(t+d)]^2/2 \quad (2-9)$$

식 (2-9)와 같은 비용 함수를 최소화하는 제어 법칙이 OSA 제어기의 제어 법칙이며, 식 (2-10)과 같다.

$$\beta(q^{-1})u(t) = y^*(t+d) - \alpha(q^{-1})y(t) \quad (2-10)$$

본 논문에서 사용한 NARMAX 모델의 제어 입력값 $u(t)$ 의 정의에 따라 $\beta(q^{-1})$ 를 개관 이득값 K 로 바꾸고 우변으로 이항하면 식 (2-11)과 같은 모델 기준 제어에 대한 개관 이득값을 갖는 OSA 제어기의 제어 법칙을 구할 수 있다.

$$u(t) = K(y^* - \phi_t^T \theta) \quad (2-11)$$

여기서 $\phi_t^T \theta$ 는 이산치 혼돈 시스템의 예측 출력값이며 y^* 는 시스템의 평형 상태값이다.

3. 실험 및 결과 고찰

3.1 실험

본 논문에서 제어 대상으로 사용한 Henon 시스템을 식 (3-1)과 같은 시계열 방정식으로 표현하였다.

$$y_{t+1} = a(1.0 - y_{t-N+2}^2 - by_{t-N+1}) + u_t \quad (3-1)$$

여기서 $a=1.3$, $b=0.05$ 이며 $N=4$ 이다.

실험에 사용한 Henon 시스템의 리아프노프 지수(Lyapunov exponent)의 최대값은 0.0492로 혼돈 특성을 갖고 있다. 아울러 본 논문에서 사용한 순환 최소 자승법의 초기치 정의는 P_0 는 500이고 w 는 0.95이며 θ_0 는 0으로 정하였으며, 제어기는 100 샘플 단계에서 동작하며 파라미터 값을 갱신하지 않는 허용 예측 오차는 0.0001로 정하였다.

표 3.1은 모델 기준 제어에서 사용할 NARMAX 모델의 예측 오차를 식 (2-5)의 비용 함수를 이용하여 얻은 결과이며, 처음 20 샘플 시간 동안의 예측 오차를 제외한 나머지 500 샘플 시간 동안의 예측 오차를 이용하였다.

표 3.1 모델별 예측 오차의 비용 함수값

모델	예측오차	모델	예측오차
L_1	10.033	Q_1	10.394
L_2	10.522	Q_2	11.559
L_3	4.568	Q_3	0.016

표에서 L과 Q는 각기 선형과 자승 모델임을 의미하고 하첨자의 증가는 고차항이 더 포함되었음을 나타내는데, 선형 및 자승 모델에서 고차 모델로 혼돈 시스템을 모델링할수록 예측 오차가 점차 감소함을 알 수 있다.

3.2 결과 고찰

본 논문에서 제안된 제어기의 제어 성능은 기존의 모델 기준 제어기와 비교를 통해 검증하였으며 이때 필요한 제어기의 제어 조건은 표 3.2에 보였다.

표 3.2 제어기의 제어 조건

경우	모델	y^*	K
경우 1	L_1	0.25	1.05
경우 2	Q_2	0.25	1.02

그림 3.1과 그림 3.2는 표 3.2의 경우 1에 대한 제어기의 제어 성능을 보인 결과이다. 개관 이득값 K 를 갖는 제안된 OSA 제어기는 기존의 OSA 제어기보다 빠른 정정 시간을 얻은 반면 모델 L_1 에 대한 기존 OSA 제어기는 매우 느린 수렴 속도를 보이고 있다.

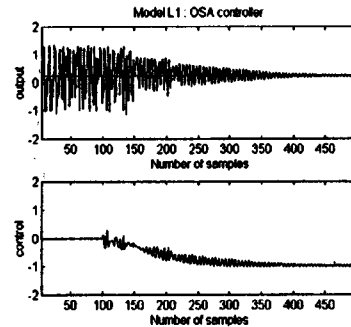


그림 3.1 경우 1에 대한 기존 OSA 제어기의 제어 결과

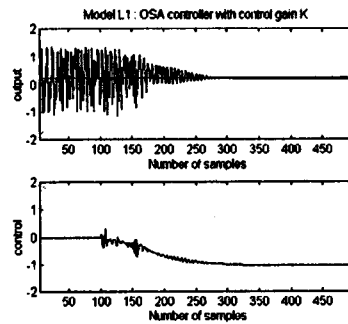


그림 3.2 경우 1에 대한 제안된 OSA 제어기의 제어 결과

한편 그림 3.3과 그림 3.4는 표 3.2의 경우 2에 대한 제어 성능을 보인 것으로 보다 고차화된 모델인 Q_2 를 이용하였을 때 전체적으로 제어 성능을 향상되었음을 알 수 있다.

특히 제안된 OSA 제어기는 표 3.2의 경우 1보다 더욱 빠른 정정 시간을 가지며 정확한 수렴값을 얻었다. 따라서 개관 이득값을 이용한 OSA 제어기는 NARMAX 모델이 갖는 혼돈 시스템에 대한 가제어성을 충분히 이용하여 제어를 수행함을 확인할 수 있으며 경험적으로 결정된 개관 이득값을 선형 제어 이론을 바탕으로 효율적으로 정의할 수 있는 제어 방법에 대한 연구가 필요하다.

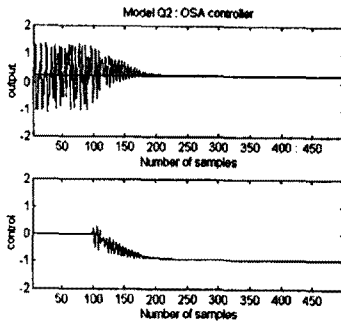


그림 3.3 경우 2에 대한 기존 OSA 제어기의 제어 결과

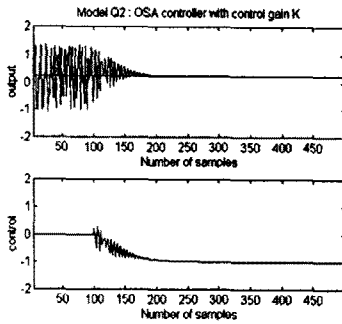


그림 3.4 경우 2에 대한 제안된 OSA 제어기의 제어 결과

4. 결 론

기존의 모델 기준 제어에서 사용한 OSA 제어기는 다양한 비선형 시스템에 적용하기 쉬운 장점을 가진 반면 불규칙한 동태를 갖는 혼돈 시스템을 안정화할 수 있는 효율적인 제어 입력 법칙을 얻기 어려웠다. 따라서 본 논문에서는 기존의 선형 제어 이론을 기반으로 예측 오차의 비용 함수의 최소화를 통해 구해진 개환 이득값을 갖는 OSA 제어를 제안하였으며, 제안된 제어를 이산치 혼돈 시스템인 Henon 시스템에 적용하여 기존의 모델 기준 제어기보다 제어 성능면에서 우수한 제어 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다. 그러나 이때 필요한 개환 이득값은 혼돈 시스템을 모델링하는 모델 기준 제어의 특징으로 인해 기존의 선형 제어 방법을 이용하여 결정하기 어렵다. 따라서 NARMAX 모델을 효율적으로 이용하여 제어를 수행할 수 있는 제어 방법에 대한 연구가 향후 필요하다.

참고 문헌

- [1] L.A. Aguirre and S.A. Billings, "Validating identified nonlinear models with chaotic systems", *Int. Jour. of Bifur. and Chaos*, vol. 4, no. 1, pp. 109-125, 1994.
- [2] H.K. Qammar, F. Mossayebi and T.T. Hartley, "Indirect adaptive control of a chaotic systems", *Chem. Eng. Comm.*, vol. 110, pp. 99-110, 1991.
- [3] H.K. Qammar, F. Mossayebi, "System identification and model-based control of a chaotic system", *Int. Jour. of Bifur. and Chaos*, vol. 4, no. 4, pp. 843-851, 1994.

- [4] I.J. Leontaritis, S.A. Billings, "Input-output parametric models for nonlinear systems : Part I & II", *Int. Jour. of Contr.*, vol. 41, no. 2, pp 303-353, 1985.
- [5] G.C. Goodwin, K.S. Sin, *Adaptive filtering prediction and control*, Prentice-Hall, pp. 120-128, 1984.