

실시간 응용을 위한 DFT 구현에 기인한 오차 해석에 관한 연구

김재화 · 김병기 · 장태규

중앙대학교 제어계측공학과

Analysis of the errors caused by the finite-bit real-time implementation of DFT

Jae-Hwa Kim · Byung-Ki Kim · Tae-Gyu Chang

Chung-Ang University, Control & Instrumentation Engineering Department

요약

This paper proposes a real-time DFT implementation technique which is based on the finite-bit approximation of the DFT coefficients. The effect of the approximation is analytically investigated and its result is obtained in the form of an equation of noise to signal ratio. The analysis result is confirmed by comparing it with those of the computer simulation and the actual experiment for human sleep EEG data.

1. 서론

연속되는 신호로부터 특정 파형들을 검출하거나 패턴 분류 등의 목적으로 적용하는 신호처리 기법을 크게 나누면 시간영역에서 시각적인 특정현상을 검출에 기초한 시간영역해석기법과, 주파수 영역 해석기법으로 나눌 수 있다. 이중 시간영역해석기법은 구현의 간편성에 의한 장점이 있으나 관련되는 threshold들의 설정과정에 임의성이 많고 잡음에 대한 민감성이 때문에 연구가들에 의해 기피되고 있는 설정이다.

이에 비해 주파수영역 해석기법은 일정구간의 신호가 stationary하다는 가정을 바탕으로 신호의 spectral property에 대한 통계적인 특성으로 신호를 규정짓는 방법으로서 FFT등의 고속계산 알고리즘 및 디지털하드웨어의 발달과 함께 그 용이성이 매우 활발한 실정이다[1][2]. 하지만 주파수영역 해석기법은 관련되는 연산의 량이 상대적으로 많아, 실시간 신호처리 목적에 적용하고자 하는 경우는 고속연산을 위해 DSP(digital signal processing) chip을 비롯한 특수 하드웨어를 필요로 하는 것이 일반적이어서, 범용 컨트롤러 환경에서 일반적으로 문제가 되는 floating-point연산을 피할 수 있어, 실시간 해석을 위한 목적에 적용 가능토록 하여줄 수 있게 된다. 하지만 이러한 근사를 적용하였을 경우는 이로 인한 오차가 스펙트럼 추정에 미치는 성능 열화를 가져올 수 있어 이에 대한 해석을 위한 관련 설계 치들의 설정이 중요한 문제로 대두된다. 특히 이러한 오차의 영향은 SDFT와 같은 recursive 알고리즘의 경우 심하기 때문에 근사기법의 적용에 커다란 제약이 된다[5][6].

따라서 본 절에서는 오차에 의한 영향이 가장 심한 SDFT를 대상으로 근사에 의해 구현하는 방법을 기술하고, 이에 대해 근사가 미치는 영향을 구하는 과정을 기술하였다. 또한 본 논문에서 수행한 해석의 타당성을 확인하기 위한 목적으로 시뮬레이션 및 실제 채집한 수면 뇌파 (Electroencephalogram)를 대상으로 오차에 대한 성능 열화를 검토하여 보았다. 이와 같은 연구를 통하여 범용프로세서 환경 하에서 근사에 의해 구현한 주파수 해석기법의 용용 가능성 범위를 제시하고, 관련 설계변수들을 설정하기 위한 설계지침을 제공하고자 하였다.

2. 계수 근사에 의한 DFT 구현 방법

주파수해석을 통해 연속되는 신호로부터 특정 파형을 감지하기 위해 흔히 사용하는 방법의 하나로서 신호를 일정블록으로 나누어 각 블록에 대해 DFT를 수행하는 BDFT (Block Discrete-time Fourier Transform) 혹은 BFDT (Block Fast Fourier Transform)를 들 수 있으며, 이 경우 블록처리에 의해 손실되는 시간 정보가 문제되는 경우는 유한한 샘플들의 overlap을 가능케 하는 recursive 구현법인 Sliding DFT (혹은 Hopping DFT라고도 칭함)를 적용하게 된다[3][4].

특정현상을 감지하는 시점에 대한 resolution이 중요한 경우에는 overlap을 최소 단위인 한 샘플씩 시키는 것이 필요하고 이러한 SDFT (Sliding DFT)는 BDFT의 경계 문제 해결뿐만 아니라, recursive하게 구현되므로 micro controller하에서 구현할 경우 상대적으로 단순한 구조로 구성할 수 있는 장점이 있다.

이러한 앤고리ズム들의 DFT연산 과정에 사용하는 복소 계수들을 유한한 수의 bit에 의한 근사치로 표현하여 계산한다면, 범용 컨트롤러 환경에서 일반적으로 문제가 되는 floating-point연산을 피할 수 있어, 실시간 해석을 위한 목적에 적용 가능토록 하여줄 수 있게 된다. 하지만 이러한 근사를 적용하였을 경우는 이로 인한 오차가 스펙트럼 추정에 미치는 성능 열화를 가져올 수 있어 이에 대한 해석을 위한 설계 치들의 설정이 중요한 문제로 대두된다. 특히 이러한 오차의 영향은 SDFT와 같은 recursive 알고리즘의 경우 심하기 때문에 근사기법의 적용에 커다란 제약이 된다[5][6].

따라서 본 절에서는 오차에 의한 영향이 가장 심한 SDFT를 대상으로 근사에 의해 구현하는 방법을 기술하고, 이에 대해 근사가 미치는 영향을 구하는 과정을 다음 절에 기술하였다.

N-point SDFT는 다음의 (1)식과 같이 sliding index l 에서 구한 spectrum $X_k(l)$ 에 새로운 입력 샘플 $x(N)$ 과 현 블록 내의 처음 샘플 $x(0)$ 을 조합하여 다음 블록 $l+1$ 에 대한 스펙트럼 $X_k(l+1)$ 을 구할 수 있다.

$$X_k(l+1) = W^k [X_k(l) - x(0) + x(N)] \quad (1)$$

여기서 W^k 는 복소수 계수이다. 식(1)에서 현재 block의 DFT는 이전 block의 DFT에 N회의 금생과 2N회의 덧셈으로 계산됨을 알 수 있다.

식(1)의 W^k 는 복소수 평면에서 단위 원상의 점들을 나타낸

다. 계수 근사화는 W 의 실수부 허수부를 각각 bit 근사화 함으로써 이루어진다. 계수를 B -bit 근사화 할 경우 SDFT 계산의 대부분을 차지하는 곱셈을 shift 연산과 덧셈의 조합으로 나타낼 수 있어 부동 소수점(floating point) 연산보다 상대적으로 빠른 고정 소수점(fixed point) 연산이 가능해진다. B bit로 각 점들을 근사화 했을 경우, 계수의 실수부 및 허수부는 각각 2^{-B} 의 정수 배로 표현되며, 근사화 된 복소수 계수들은 복소수 평면상의 한 범위 2^{-B} 인 정 사각형들의 격자 점들로 이루어진다. 예를 들어 0.76을 2 bit으로 근사화 할 경우 아래와 같다.

$$0.76 \approx 0.5 + 0.25$$

로 근사할 경우, 0.76을 곱하는 연산은 피 연산자를 1번 shift 한 값과($\times 0.5$) 2번 shift한 값($\times 0.25$) 합으로 구현된다.

3. 계수 근사에 의한 오차 영향 해석

계수를 근사화 하고 SDFT를 수행하면 block내의 실제 spectrum과 계산된 spectrum은 차이가 생겨 누적되고 이는 sliding index l 에 대한 1차 식으로 얻어진다. 이 식을 error dynamics로 정의하고 이를 토대로 근사 bit 수에 대한 성능 열화를 구한다.

3.1 SDFT의 Error Dynamics

최초의 block($l=0$)을 실제 DFT값으로 하고 계수를 근사화 하여 식(2)에 의해 SDFT를 수행하면 근사화 된 DFT값과 실제 DFT값은 sliding이 진행됨에 따라 차이를 가지게 된다. l 번째 sliding에서의 근사화 된 DFT를 $\hat{X}_k(l)$ 로 표시하고 실제 DFT를 $X_k(l)$ 로 하면, 오차 스펙트럼 $E_k(l)$ 는 $\hat{X}_k(l) - X_k(l)$ 이고 이를 식(1)과 조합하면 식(2)가 되며,

$$E_k(l+1) = a_k W^k E_k(l) + \delta_k (X_k(l) - x_k(0) + x_k(N)) \quad (2)$$

여기서 근사화 계수 $\hat{W} = a_k W^k$ 이고, 계수의 근사화 오차 $\delta_k = \hat{W} - W^k$ 이다.

식(2)에서 보면, 다음 sliding의 스펙트럼 오차는 현재 스펙트럼 오차에 근사화 계수 \hat{W} 를 곱한 값(우변의 첫 번째 항)에, 현재 스펙트럼의 참 값에서 현재 block의 첫 번째 신호를 빼고 마지막 신호의 다음 신호를 더한 후 계수 근사화 오차 δ_k 를 곱한 값(우변의 두 번째 항)을 더해서 이루어진다. 여기서 식의 간략화를 위해 우변 두 번째 항의 update 항을 $U_k(l)$ 로 대치하면 식(3)과 같이 된다.

$$E_k(l+1) = a_k W^k E_k(l) + \delta_k U_k(l) \quad (3)$$

3.2 근사 Bit수에 따른 오차의 해석

Error dynamics는 식(3)에 $U_k(l)$ 을 입력으로 하는 복소 계수의 1차 차분 방정식임을 알 수 있다. 이 때 오차는 error dynamics의 특성과 입력 신호의 합에 의해 나타나며 이를 알 수 있다. 따라서 오차의 특성을 대표 할 수 있는 관계식을 얻기 위해서 error dynamics의 입력 항을 평균이 '0'인 white Gaussian noise로 설정하고, a_k 와 δ_k 를 확률 분포를 갖는 random variable로 처리하여 이에 따른 잡음 대 신호의 NSR 을 구하였다. 이와 같이 구한 NSR은 궁극적으로 a_k 와 δ_k 의 분포특성에 관계하는 bit수 b 에 관한 식으로 나타난다.

이에 따라 근사화 bit수에 따른 오차를 대표하는 관계식은 입력을 zero-mean Gaussian noise로 설정하고, 이 때 얻어지는 NSR로 설정된다.

식(3)에 절대값 자승을 취하고, stationary random process 일 경우 $E(|E(l)|^2)$ 과 $E(|E(l-1)|^2)$ 이 같다는 것을 염두 하여 기대값을 구하면 식(4)와 같아된다[7].

$$E(|E|^2) = \frac{2E(\text{Re } W^k \delta U E^*) + E(|\delta|^2) E(|U|^2)}{1 - E(|a|^2)} \quad (4)$$

식(4)를 bit수 b 에 대한 식으로 표현하기 위해 식(4)의 각 항들을 bit 수 b 에 대한 식으로 얻어진다.

식(4)의 $E(|U|^2)$ 을 유도하기 위해 $|U|^2$ 을 전개하여 기대값을 취하면 식(5)와 같다.

$$E(|U|^2) = E(|X|^2) \quad (5)$$

식(4)의 $E(|\delta|^2)$ 을 구하기 위해 δ 의 실수부 허수부가 각각 uniform distribution이라 가정하여 구하면 식(6)과 같다.

$$E(|\delta|^2) = \frac{2}{3} 2^{-2b} \quad (6)$$

식(4)의 $E(|a|^2)$ 을 구하기 위해 식(3)을 조합하고, a_k 의 각각 매우 작아서 실수부만 있다고 근사화하여 구하면 식(7)과 같다.

$$E(|a|^2) \approx \frac{2}{3} 2^{-2b} - \sqrt{2} * 2^{-b} + 1 \quad (7)$$

식(4)의 $E(\text{Re } W^k \delta U E^*)$ 을 유도하기 위해

$$\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)} \approx 1$$

이라 가정하면,

$$E(\hat{W}^k \delta U(l) E^*(l)) = E\left(|\delta|^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^j x_i^2(l) a^{(N-j)*}\right) \quad (8)$$

식(8)을 얻고, a_k 의 uniform distribution가정과 Parseval's theorem 등을 사용하면 식(9)를 얻는다.

$$E(\text{Re } W^k \delta U E^*) \approx$$

$$\frac{1}{N} E(|X|^2) * \left[\frac{2^b}{(N+2)\sqrt{2}} (1 - (1 - \sqrt{2} * 2^{-b})^{N+2}) + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} N) * 2^{-b} - \frac{2}{3} N * 2^{-2b} - 1 \right] \quad (9)$$

최종적으로 식(5) (6) (7) (8) (9)를 식(4)에 대입하여 신호의 power와 오차의 power 비율(NSR) 구하면 아래의 식(10)과 같이 얻어진다.

$$\frac{E(|E|^2)}{E(|X|^2)} \approx \frac{1}{\sqrt{2} * 2^{-b} - 2/3 * 2^{-2b}} \left[\frac{2^{b+1}}{N(N+2)\sqrt{2}} (1 - (1 - \sqrt{2} * 2^{-b})^{N+2}) - \frac{2}{3} 2^{-2b} + (\frac{2}{N} + \sqrt{2}) * 2^{-b} - \frac{2}{N} \right] \quad (10)$$

식(10)은 스펙트럼 상에서 오차의 variance와 신호의 variance비율을 근사화 bit 수 b 와 DFT number N 의 식으로 나타낸다. Parseval의 정리에 의해 스펙트럼상의 variance는 시간 축상의 variance의 N 배이므로 식(10)은 신호의 power와 오차의 power비율이 됨을 알 수 있다.

4. Simulation 및 검토

본 절에서는 3절에서 해석적으로 구한 오차 관계식 (10)의 타당성을 보이기 위하여, random 신호 및 실제 채취한 수면 EEG신호를 대상으로 SDFT를 적용하여 얻은 NSR 비와 비교 검토하는 과정을 기술하였다.

Random noise는 Gaussian 백색잡음으로 택하였으며, DFT point수는 256으로 하였고, 시뮬레이션에 사용한 전체 샘플은 256*2000으로 하였다. EEG신호는 20대 성인 남자의 수면시 C3-A2 채널로부터 샘플링 주파수 240Hz의 10 bit A/D converter를 이용하여 채취한 신호를 같은 길이로 택하였다.

그림 1과 그림 2는 각각 zero-mean Gaussian noise와 실제 뇌파 신호(EEG)를 대상으로 계수를 bit 근사화 시킨 후 근사 bit수를 1에서 16까지 변화시켜가며 얻은 NSR을 2000 block 동안 SDFT를 취하면서 NSR의 평균값을 취한 결과와, 관계식 (10)에 의해 구해진 NSR을 log scale로 동시에 plot한 결과이다.

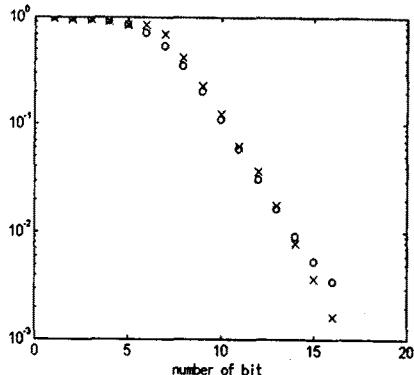


그림 1 Gaussian Random Noise의 Bit 수에 따른 NSR log scale plot
(N : 256, o : 이론값, x : 실험값)

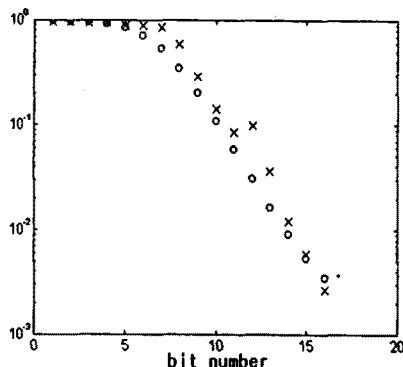


그림 2 실제 사람의 뇌파 신호의 Bit 수에 따른 NSR log scale plot
(N : 256, o : 이론값, x : 실험값)

그림 2에서 보듯이 식(10)의 NSR식은 뇌파신호와 같은 실제의 신호에 대해 매우 근사하게 일치하므로, 본 논문의 전개과정에서 적용한 가정들과, 결과 식들이 매우 타당함을 확인하였다.

5. 결론

본 논문에서는 SDFT의 계수를 bit 근사화하여 실시간 신호처리하는 개념을 제안하고, 계수의 근사에 따른 오차의 영향을 구하였다. 또한 이를 실제 사람으로부터 얻어진 뇌파 신호를 대상으로 한 비교 실험을 통해, 본 논문에서 제시한 잡음 대 신호의 관계식이 타당함을 확인할 수 있었다.

본 연구의 결과로써 얻어진 결과는, 뇌파의 파형 감지와 같은 실시간 신호 해석을 범용의 컨트롤러 환경 하에서 구현할 경우 변수 설정치 결정 등의 설계지침으로써 유용하리라 기대된다.

6. 참고문헌

- [1] 조재희, 장태규, 양원영, "국부스펙트럼에 근거한 뇌파 스펜들 파형의 실시간 감지에 관한 연구", 대한 전기학회 논문지, 제 42권, 11호 1993.
- [2] S. N. Nawab and T. F. Quateri, "Short-Time Fourier Transform," Chapter in Advanced Topics in Signal Processing, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.
- [3] L. R. Rabiner and B. Gold, THEORY AND APPLICATION OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [4] B. F. Boroujeny, "Generalized Sliding FFT and Its Application to Implementation of Block LMS Adaptive Filters," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, March 1994.
- [5] R. Storn, "Some Results in Fixed Point Error Analysis of the Bruun_FFT Algorithm", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 41, 1993.
- [6] J. M. Cioffi, "Limited-precision effects in adaptive filtering," IEEE Trans. Circuits Syst. vol. CAS-34, July 1987.
- [7] K. S. Shanmugan, RANDOM SIGNALS, John Wiley & Sons, 1988.