'96 대한전기학회 하계학술대회 논문집 (1996. 7. 22~24)

출력 궤환에 의한 특이 비선형 시스템의 H_∞ 제어 문제

김 경 근* · 이 영 석 · 서 보 혁
* 경북대학교 전기공학과

H_∞ Control Problem of Singular Nonlinear Systems Via Output Feedback

Kyung-kun Kim · Young-Seog Lee · Bo-Hyeok Seo
Department of Electrical Engineering Kyungpook National University

Abstract — This paper shows how the H_∞ control problem of singular nonlinear systems via output feedback can be solved. The solution of the problem is shown to be related to the existence of solutions of a pair of Hamilton-Jacobi inequalities in n independent variables, which are associated with state feedback and output injection design. Our approach yields to a set of sufficient conditions under an extra assumption. This conditions are in terms of a set of Hamilton-Jacobi Inequalities parameterized by adequately small parameters.

1. 서론

선형 H_∞ 최적 제어 문제[1,2]의 확장으로 비선형 시스템에 대한 내부 안정성을 가지는 국소 외란 감쇄(local disturbance attenuation)문제에 대한 연구가 최근 몇 년간 이루어지고 있다.

그러나 지금까지의 논문들은 정규 비선형 H_∞제어 문제(Regular nonlinear H_∞ control problem)를 다루었고[3-8] 특이 비선형 H_∞제어 문제(Singular nonlinear H_∞ control problem)를 다룬 논문은 많지 않다[9,10]. 이러한 종류의 문제는 보다 일반적인 경우의 문제로서 파라미터 불확정성 (parameter uncertainty)과 배수 불확정성(multiplicative uncertainty) 같은 강인성 문제를 다룰때 흔히 일어나는 문제이다. Astolfi [9]과 Mass등 [10]는 모두 특이 비선형 상태 궤환 H_∞제어 문제를 다루고 있다. 그러나 시스템의 상태를 모두 이용할 수 없다면 이러한 것들은 적용할 수 없다.

본 논문에서는 특이 비선형 시스템에 대한 출력 궤환 H_∞제어 문제를 다룬다. 이것은 [10]을 출력궤환으로 그리고 [3-6]을 보다 일반적인 경우로 확장한 것이다. 본 논문의 목적은 전체 폐루프 시스템이 국소 점근적 안정(locally asymptotically stable)하고 L_2-이득이 γ보다 작거나 같게하는 궤환 제어기가 존재할 충분 조건을 찾는 것이다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장에서는 문제를 언급하고 몇가지 가정과 약간의 기초적인 정의와 상태궤환에 대한 기존의 결과에 대해 언급한다. 3 장에서는 출력 궤환에 의한 특이 비선형 H_∞제어 문제의 충분조건을 해밀턴-자코비 부등식의 형태로 제시한다.

2. 문제 설정

본 논문에서는 다음과 같은 특이 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x)+g_1(x)w+g_2(x)u \\ z &= h_1(x) \qquad\quad +m(x)u \\ y &= h_2(x)+k(x)w \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$은 상태 변수, $u(t)\in R^m$은 제어 입력, $w(t)\in R^q$는 외란(disturbance), $z(t)\in R^p$는 제어하고자 하는 출력, $y(t)\in R^r$은 측정 출력이다. 함수 $f, g_1, g_2, h_1, h_2, m, k$는 정해진 함수이고, R^n에서 연속 미분 가능하며 $f(0)=0$, $h_1(0)=0$, $h_2(0)=0$이다.

$\mathrm{rank}(m(x))=m_1\le m$, $\mathrm{rank}(k(x))=r_1\le r$라고 가정하면

$$\mathrm{rank}(\Pi)=\mathrm{rank}(n(x))=m_1$$
$$\mathrm{rank}(l(x))=\mathrm{rank}(\Gamma)=r_1$$
$$m(x)=n(x)\Pi,\quad k(x)=\Gamma l(x)$$

인 $(p\times m_1)$-matrix $n(x)$와 상수 $(m_1\times m)$-matrix Π, $(r_1\times q)$-matrix $l(x)$와 상수 $(r\times r_1)$-matrix Γ를 항상 찾을 수 있다.

$$\Phi\Pi^T=0,\quad \Psi^T\Gamma=0$$

인 $\Phi\in R^{(m-m_1)\times m}$, $\Psi\in R^{r\times(r-r_1)}$를 두고 다음과 같이 $\sigma(x)$, $\eta(x)$를 정의한다.

$$\sigma(x)=\Pi^T(\Pi\Pi^T)^{-1}\{n^T(x)n(x)\}(\Pi^T\Pi)^{-1}\Pi$$
$$\eta(x)=\Gamma(\Gamma^T\Gamma)^{-1}\{l(x)l^T(x)\}^{-1}(\Gamma^T\Gamma)^{-1}\Gamma^T$$

우선 비선형 시스템의 L_2-이득을 고려한다.

정의 1)[8, 11] $\gamma>0$에 대해 모든 $T\ge 0$와 $u\in L_2(0,T)$에 대해

$$\int_0^T\|z\|^2dt\le\gamma\int_0^T\|w\|^2dt+K(x)$$

를 만족하는 $K(0)=0$인 $0\le K(x)<\infty$ 가 존재한다면 시스템 (1)은 γ보다 작거나 같은 L_2-이득을 가진다. 더나아가 $0\le\gamma<\gamma_1$이면 시스템은 γ_1보다 작은 L_2-이득을 가진다. □□

소실 시스템 이론(dissipative system theory)으로부터의 기본적인 결과를 다음 정리에서 언급한다.

정리 2) [8, 11] 시스템 (1)의 L_2-이득이 γ보다 작거나 같기 위한 필요충분 조건은 다음의 적분 소실 부등식(integral dissipation inequality)

$$V(x(t_1))-V(x(t_0))\le\int_0^T(\gamma^2\|w\|-\|z\|^2)dt \tag{2}$$

에 대한 해 $V: R^n\to R$가 존재하는 것이다. □□

가정 3) [10] 다음 식을 만족하는 $0\le K(x)<\infty$가 존재한다.

$$\int_0^T \|\Phi u\|^2 dt \le N\int_0^T \|w\|^2 dt + \bar{K}(x)\ ,\quad K(0)=0 \qquad \square\square$$

L_2-이득 $\le \gamma_1 < \gamma_2$ 일 경우 정의 1)로부터 식 (4)를 만족하는 $K(0)=0$인 $0\le K(x)<\infty$가 존재할 상수 $\lambda>0$가 존재함을 안다.

$$\int_0^T \|z\|^2 dt \le (\gamma_2^2-\lambda)\int_0^T \|w\|^2 dt + K(x) \qquad (4)$$

가정3)과 식 (4)로부터

$$\int_0^T (\|z\|^2+\varepsilon\|\Phi u\|^2)dt \le (\gamma_2^2-\mu)\int_0^T \|w\|^2 dt + \overline{K}(x)$$

여기서 ε은 $0<\varepsilon<\frac{\lambda}{N}$이다.

$$\int_0^T (\|z\|^2+\varepsilon\|\Phi u\|^2)dt \le \gamma^2\int_0^T \|w\|^2 dt + \overline{K}(x)$$

이때 γ는 $\gamma_1\le\gamma<\gamma_2$의 관계가 성립한다.

다음 정리에서는 상태 궤환 H_∞제어 문제가 어떻게 다루어지는가를 간략하게 설명한다. 시스템 (1)은 다음의 가정을 만족한다고 가정한다.

가정 4) 시스템

$$\dot{x}(t)=f(x(t))+g_2(x(t))u(t)$$

에서 모든 $t\ge0$에 대해

$$h_1(x(t))+m(x(t))u(t)=0$$

인 어떠한 유계(bounded)된 궤적 $x(t)$는 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$를 만족한다.

정리 5) 비선형 시스템 (1)을 고려하고 가정4)를 만족한다고 가정한다. $\gamma>0$이라 둔다. $V(0)=0$인 해밀턴-자코비 부등식 (Hamilton Jacobi inequality)

$$\begin{aligned}&V_x(f(x)-g_2(x)\sigma(x)m^T(x)h_1(x))+h_1^T(x)(I\\&-m(x)\sigma(x)m^T(x))h_1(x)+\frac{1}{4}V_x(\frac{1}{\gamma^2}g_1(x)g_1^T(x)\\&-g_2(x)\sigma(x)g_2^T(x)-\frac{1}{\varepsilon}g_2(x)\Phi\Phi^Tg_2^T(x))V_x^T\le0\end{aligned} \qquad (5)$$

의 해 $V(x)\ge0$가 존재하는 양의 상수 $\varepsilon>0$이 존재한다면 전체 폐루프 시스템은

$$u(x)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}\Phi^T\Phi+\sigma(x))g_2^T(x)V_x^T-\sigma(x)m^T(x)h_1(x)$$

에 대해 점근적으로 안정하고 L_2-이득이 γ보다 작거나 같게 된다.

증명)

$$\begin{aligned}&V_x(f(x)+g_1(x)w+g_2(x)u)\\&\le V_xg_1(x)(w-\frac{1}{4\gamma^2}g_1^T(x)V_x^T)+V_xg_2(x)\\&\quad\cdot(u+\frac{1}{4}(\sigma(x)-\frac{1}{\varepsilon}\Phi^T\Phi)g_2^T(x)V_x^T+\sigma(x)\\&\quad\cdot m^T(x)h_1(x))-h_1^T(x)(I-m(x)\sigma(x)m^T(x))h_1(x)\\&=-\|h_1(x)+m(x)u\|^2-\varepsilon\|u\|^2_{\Phi^T\Phi}+\gamma^2\|w\|^2\\&\quad-\gamma^2\|w-w^*\|^2+\|u-u^*\|^2_{(m^T(x)m(x)+\varepsilon\Phi^T\Phi)}\\&\le-\|h_1(x)+m(x)u\|^2+\gamma^2\|w\|^2\end{aligned}$$

여기서

$$w^*=\alpha_1(x)=\frac{1}{2\gamma^2}g_1^T(x)V_x^T$$

$$\begin{aligned}u^*&=\alpha_2(x)\\&=-\frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}\Phi^T\Phi+\sigma(x))g_2^T(x)V_x^T-\sigma(x)m^T(x)h_1(x)\end{aligned}$$

$\square\square\square$

3. 주요 결과

이 장에서는 특이 비선형 시스템의 H_∞제어 문제의 충분조건을 제시한다. 다음의 정리는 내부 안정성(internal stability)을 가지는 국소 외란 감쇄 문제인 특이 비선형 H_∞제어 문제가 어떻게 풀려질 수 있는가를 보여준다. 우선 동적 제어기(dynamic controller)는 출력 주입(output injection)에 바탕을 둔 상태 추정기(state estimator)의 형태를 취하고 w 는 직접 측정할 수 없으므로 최악의 외란 w^*을 고려한다.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}&=f(\zeta)+g_1(\zeta)w^*+g_2(\zeta)u+G(\zeta)(y-h_2(\zeta)+k(\zeta)w)\\u(\zeta)&=\alpha_2(\zeta)\end{aligned} \qquad (6)$$

폐루프 시스템 (1)-(6)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}^e&=f^e(x^e)+g^e(x^e)r\\v&=h^e(x^e)=\alpha_2(\zeta)-\alpha_2(x)\end{aligned}$$

여기서

$$f^e(x,\zeta)=\begin{pmatrix}\tilde{f}(x)+g_2(x)\alpha_2(\zeta)\\ \tilde{f}(\zeta)+g_2(\zeta)\alpha_2(\zeta)+G(\zeta)(\tilde{h}_2(x)-\tilde{h}_2(\zeta))\end{pmatrix}$$

$$g^e(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\G(\zeta)k(x)\end{pmatrix},\qquad \gamma=w-\alpha_1(x)$$

$$\tilde{f}(x)=f(x)+g_1(x)\alpha_1(x),\qquad \tilde{h}_2(x)=h_2(x)+k(x)\alpha_1(x)$$

보조정리 6) 시스템 (1)을 고려하고 가정4)가 만족된다고 가정한다. 정리5)의 조건을 만족하는 해가 존재한다고 할때 다음을 가정한다.

H1) 다음의 해밀턴-자코비 부등식을 만족하는 $W(x,\zeta)\ge0$와 $G(\zeta)$가 존재한다.

$$\begin{aligned}&(W_x\ \ W_\zeta)f^e(x,\zeta)+h^{eT}(x,\zeta)(m^T(x)m(x)\\&+\varepsilon\Phi^T\Phi)h^e(x,\zeta)+\frac{1}{4\gamma^2}(W_xg_1(x)+W_\zeta G(\zeta)k(x))\\&\cdot(W_xg_1(x)+W_\zeta G(\zeta)k(x))^T\le0\end{aligned} \qquad (7)$$

H2) 시스템

$$\dot{\zeta}=\tilde{f}(\zeta)-G(\zeta)\tilde{h}_2(\zeta)$$

의 평형점 $\zeta=0$가 국소 점근적으로 안정하다.

그러면 시스템 (1)과 출력궤환 (6)에 의한 전체 폐루프 시스템은 국소 점근적으로 안정하고 γ보다 작거나 같은 L_2-이득을 가진다.

증명) 정리 2)를 적용하면

$$\begin{aligned}&(W_x\ \ W_\zeta)(f^e(x,\zeta)+g^e(x,\zeta)r)\\&\le-\gamma^2\|r-r^*\|^2-\|h^e(x,\zeta)\|^2_{(m^T(x)m(x)+\varepsilon\Phi^T\Phi)}+\gamma^2\|r\|^2\\&\le-\|h^e(x,\zeta)\|^2_{(m^T(x)m(x)+\varepsilon\Phi^T\Phi)}+\gamma^2\|r\|^2\end{aligned}$$

여기서

$$r^*=\frac{1}{2\gamma^2}g^{eT}(x^e)(W_x\ \ W_\zeta)^T$$

$\square\square\square$

위 보조정리는 충분조건 집합을 제시하고 있으나 "출력 주입 이득(output injection gain)" 함수 $G(\zeta)$가 결정되지않고 포함되어 있다. 다음 보조정리에서는 이러한 $G(\zeta)$가 어떻게 소거될 수 있는가를 보여준다. 이 과정에서 $G(\zeta)$는 적당히 작은 양의 상수 x를 도입 함으로써 $W_\zeta G(\zeta)$의 형태로 표현할 수 있다.

보조정리 7) 다음의 해밀턴-자코비 부등식

$$\begin{aligned}&W_x(\tilde{f}(x)+g_2(x)\alpha_2(\zeta)-g_1(x)k^T(x)\eta(x)(\tilde{h}_2(x)-\tilde{h}_2(\zeta)))\\&+W_\zeta(\tilde{f}(\zeta)+g_2(\zeta)\alpha_2(\zeta))\\&-\gamma^2\hat{h}_2(x,\zeta)^T(\frac{1}{x}\Psi\Psi^T+\eta(x))\hat{h}_2(x,\zeta)\\&+\frac{1}{4\gamma^2}W_xg_1(x)(I-k^T(x)\eta(x)k(x))g_1^T(x)w_x^T\le0\\&,\ \hat{h}_2(x,\zeta)=\tilde{h}_2(x)-\tilde{h}_2(\zeta)\end{aligned} \qquad (8)$$

의 해 $0\le W(x,\zeta)<\infty$가 존재하는 양의 상수 $x>0$가 존재한다면

$$W_\zeta G(\zeta) = -2\gamma^2(\widehat{h}_2^T(x,\zeta) + \frac{1}{2\gamma^2} W_x g_1(x) k^T(x))(\frac{1}{x}\Psi\Psi^T + \eta(x)) \quad (9)$$

에 대해 보조정리6)의 H1)은 만족한다.

증명) 식 (7)을 $H(x,\zeta,W_x^T)$로 나타내고 식 (8)을 $H^*(x,\zeta,W_x^T)$로 나타내면 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
&H^*(x,\zeta,W_{x^*}^T) \\
&= H(x,\zeta,W_{x^*}^T) + \frac{x}{4\gamma^2} W_\zeta^T G^T(\zeta)\Psi\Psi^T G(\zeta) W_\zeta \\
&\quad - \frac{1}{4\gamma^2}\|G^T(\zeta) W_\zeta^T + 2\gamma^2(\widehat{h}_2^T(x,\zeta) \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma^2} W_x g_1(x) k^T(x))(\eta(x) + \frac{1}{x}\Psi\Psi^T)\|^2_{(k(x)k^T(x)+x\Psi\Psi^T)} \\
&\geq H(x,\zeta,W_{x^*}^T) - \frac{1}{4\gamma^2}\|G^T(\zeta) W_\zeta^T + 2\gamma^2(\widehat{h}_2^T(x,\zeta) \\
&\quad + \frac{1}{2\gamma^2} W_x g_1(x) k^T(x))(\eta(x) + \frac{1}{x}\Psi\Psi^T)\|^2_{(k(x)k^T(x)+x\Psi\Psi^T)}
\end{aligned}$$

식 (9)를 대입하면

$$H(x,\zeta,W_{x^*}^T) \leq 0$$

를 만족한다. □□□

해밀턴-자코비 부등식 (8)은 2n개의 독립 변수를 가진다. 그러나 해밀턴-자코비 부등식 (5)와 동일한 개수의 독립 변수를 가지는 해밀턴-자코비 부등식이 주어질 수 있다. 식 (9)는 정규 비선형 H_∞제어 문제를 다룬 Ball등[3]의 결과와 유사하게 나타난다. 다음의 정리는 출력 궤환에 의한 특이 비선형 H_∞ 제어 문제의 충분조건을 제시한다.

정리 8) 시스템 (1)을 고려하고 가정 4)가 만족된다고 가정한다. 해밀턴-자코비 부등식 (5)를 만족하는 해 $V(x)\geq 0$가 존재하는 양의 상수 $\varepsilon>0$이 존재한다고 가정한다. 다음 해밀턴-자코비 부등식

$$\begin{aligned}
&Q_x(f(x) - g_1(x)k^T(x)\eta(x)\widetilde{h}_2(x)) + a_2^T(x)(m^T(x)m(x) \\
&+\varepsilon\Phi^T\Phi)a_2(x) - \gamma^2\widetilde{h}_2^T(x)(\frac{1}{\varepsilon}\Psi\Psi^T + \eta(x))\widetilde{h}_2(x) \qquad (10) \\
&+\frac{1}{4\gamma^2} Q_x g_1(x)(I - k^T(x)\eta(x)k(x))g_1^T(x)Q_x^T \leq 0
\end{aligned}$$

을 만족하는 해 $Q(x)\geq 0$가 존재하는 양의 상수 $x>0$가 존재하고 $x=0$에서 Q_{xx}가 비특이(nonsingular) 행열이라 한다면 궤환 제어기

$$\dot{\zeta} = f(\zeta) + g_1(\zeta)a_1(\zeta) + g_2(\zeta)a_2(\zeta) + G(\zeta)(y - h_2(\zeta) + k(\zeta)a_1(\zeta)$$
$$u(\zeta) = a_2(\zeta)$$

여기서

$$\begin{aligned}
G(\zeta) = 2\gamma^2 Q_{xx}^{-1} D_x\{(\widehat{h}_2^T(x,\zeta) \\
+ \frac{1}{2\gamma^2} W_x g_1(x)k^T(x))(\frac{1}{x}\Psi\Psi^T + \eta(x))\}\Big|_{x=t}
\end{aligned} \qquad (11)$$

에 의해 전체 폐루프 시스템은 점근적으로 안정하고 γ보다 작거나 같은 L_2-이득을 가진다.

증명) 식 (10)을 $S(x)$라 두었을때 $W(x,\zeta) = Q(x-\zeta)$이면 함수

$$R(x,\zeta) = H^*(x,\zeta,W_{x^*}^T) - S(x-\zeta)$$

는 $R(0,0)=0$, $R(x,x)=0$ 이고 $x\neq\zeta$에 대해 $S(x-\zeta)<0$ 이므로

$$S(x-\zeta) + R(x,\zeta) \leq 0$$

가 되므로 식 (8)을 만족한다.

점근적 안정성을 보이기 위해 우선 가정 4)와 함께 식 (8)과 (9), (10)으로부터

$$Q_x(f(x) - G(x)\widetilde{h}_2(x)) \leq 0$$

임을 알 수 있고 식 (9)로부터 식 (11)의 출력 주입 이득을 얻을 수 있다. □□□

4. 결론

본 논문에서는 특이 비선형 시스템이 점근적으로 안정하고 γ보다 작은 L_2이득을 가지는 충분조건을 변형된 해밀턴-자코비 부등식의 형태로 나타냈고 그에 따른 제어 규칙을 이끌어 냈다. 본 논문은 Mass와 van der Schaft [10]의 상태 궤환 특이 비선형 H_∞제어 문제를 출력 궤환으로 확장한 것으로 기존의 출력 궤환 정규 비선형 H_∞제어 문제[3-8]를 보다 일반적인 특이 비선형 시스템으로 확장한 것이기도 하다. 여기서는 특히 충분조건 집합에 대한 Isidori와 astolfi [4-6]의 결과를 확장했다.

5. 참고문헌

[1] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. Automatic Control, vol. 34, no.8, pp. 831-847, 1989.

[2] I. R. Petersen, B. D. O. Anderson, and E.A. Jonckheere, "A first principles solution to the nonsingular H_∞ control problem", Int. J. Robust Nonlinear Contr., vol. 1, pp. 171-185, 1991.

[3] J. Ball, J. W. Helton and M. Walker, " H_∞ control for nonlinear systems with output feedback", IEEE Trans. Automat. Contr., vol 38, pp. 546-559, 1993.

[4] A. Isidori and A. Astolfi, "Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol 37, no. 9, pp. 1283-1293, 1992

[5] A. Isidori and A. Astolfi, " H_∞ control via measurement feedback for affine nonlinear systems", Int. J. Robust and Nonlinear Control 1993

[6] A. Isidori, "A necessary condition for nonlinear H_∞ control via measurement feedback", Systems & Control Letters, vol. 23, pp. 169-177, 1994.

[7] A.J. van der Schaft, "On a state space approach to nonlinear H_∞ control", Systems & Control Letters, vol 16, pp. 1-8, 1991

[8] A.J. van der Schaft, " L_2-Gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control", IEEE Trans. Automat. Contr., vol 37, pp. 770-784, 1992.

[9] A. Astolfi, "Singular H_∞ control", in Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pp. 2543-2548, 1994.

[10] W.C.A. Mass and A.J. van der Schaft, "Singular nonlinear H_∞ optimal control by state feedback", in Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, pp. 1415-1420, 1994.

[11] P.J. Moylan, "Implications of passivity in a class of nonlinear systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 19, pp. 373-381, 1974.