

## 바이퍼케이션 이론을 이용한 전압안정도 해석

\* 이상호\*, 조홍식\*, 손광명\*, 박종근\*, 이병하\*  
 \* 서울대학교 전기공학부, \*\* 인천대학교 전기공학과

## Bifurcations in Voltage Stability Analysis

\* Sang-Ho Lee\*, Hong-Shik Cho\*, Kwang-Myoung Sohn\*, Jong-Keun Park\*, Byoung-Ha Lee\*

\* School of Electrical Engineering, Seoul National University

\*\* Dept. of Electrical Engineering, Inchon University

**Abstract :** Hopf and saddle-node bifurcation have been recognized as some of the reasons for voltage stability problems in a variety of power system models. Local bifurcations are detected by monitoring the eigenvalues of the current operating point. Therefore, many papers have used the methods using the eigenvalues. However, this paper discusses the bifurcations without calculating the eigenvalues as the system parameters vary in the 3 node system. Instead of calculating the eigenvalues, we use directly the coefficients of characteristic equation of Jacobian matrix. Also, the coefficients are used as stability index.

## 1. 서론

전압 안정도에서 Hopf 바이퍼케이션과 saddle-node 바이퍼케이션은 가장 중요한 문제 중의 하나로 인식되어 왔다. 그러므로, 이러한 바이퍼케이션들이 언제 발생하는지, 어떠한 조건에서 먼저 발생하는지를 아는 것이 중요하다고 할 수 있다. I. Dobson, H. D. Chiang 등은 특정한 한 개의 매개 변수의 값이 변해감에 따라 계통의 상태 변수들이 음직이는 경로를 알아보았고 [1], V. Ajjarapu 와 B. Lee는 Hopf 바이퍼케이션이 발생하면 나타나는 주기적의 안정성을 분석하였으며 [2], F. Alvarado 등은 현재의 안정점에서 각 매개변수들의 여유도를 계산하여 안정성 여유도를 측정해보는 방법 등을 시도했다 [3].

본 논문에서는 각 매개변수들의 값이 변할 때, 계통의 구조적 특성을 조사하여 [4], 어떤 바이퍼케이션이 먼저 발생할 수 있는 가를 분석하고, 간단한 정적 안정도 지표를 제시하여 매개변수값의 변화에 따라 이 지표가 어떤 경향을 보이는지를 고찰하였다.

## 2. 전력 계통 모델

전력 계통에서는 상태 벡터가 모선의 위상각( $\delta$ ), 주파수( $\omega$ ), 전압( $V$ ) 등으로 이루어지며, 다음과 같은 미분 방정식의 형태를 갖게 된다.

$$\dot{x} = f(\bar{x}, Q_1) \quad (1)$$

$x$ 는 상태 벡터이며  $Q_1$ 은 부하의 무효 전력 등과 같은 매개변수이다.  $Q_1$ 이 천천히 변한다면 식(1)의 동적 특성은  $Q_1$ 이 고정된 값처럼 행동한다는 것을 가정하겠다.

## 2.1. 부하 모델

본 논문에서 사용할 부하 모델은 등적 유도 전동기와 PQ 부하가 병렬로 연결되어 있는 것이다. 유도 전동기의 등적 특성은 보통 슬립에 관한 식으로 표시되지만, 이 논문에서는 상태 벡터를 위상각, 주파수와 전압으로만 국한시켜 살펴 보기 위해 유도 전동기의 전력에 관한 식을 위상각과 전압에 대하여 표시하여 다음과 같이 모델링하였다 [1].

$$P = R + I_1 + K_{pd}\delta + K_{pr}(V + TV') \quad (2)$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + K_{qd}\delta + K_{qr}V + K_{qr}V^2 \quad (3)$$

단,  $P_0, Q_0$ 는 유도 전동기에서 일정하게 요구하는 전력이고,  $P_1, Q_1$ 은 PQ 부하이다.

## 2.2. 3 모선 계통

본 논문에서는 그림 1과 같은 3 모선 계통을 전력 계통 모델로 한다. 한 모선은 전압의 크기와 위상이 일정한 무한대 모선이고 다른 한 모선은 일정한 크기의 전압을 갖는 발전기이며 그 위상각은 다음과 같은 식을 만족한다.

$$M\ddot{\theta}_m = -d_m\omega + P_m + E_m V Y_m \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin \theta_m \quad (4)$$

여기에서  $M$ ,  $d_m$ 과  $P_m$ 은 각각 발전기의 관성, 덤팡과 기계적인 전력 상수이다.

부하의 전압을 1.0 p.u. 근방으로 유지하기 위해서 콘덴서를 병렬로 부하에 추가하고  $Q_1$ 을 계통의 매개변수로 한다. 회로를 간단히 하기 위해 콘덴서를 테브난 등가 회로로 무한대 모선쪽으로 포함시킨다. 결과적으로, 수정된 값은 다음과 같다.

$$E_0' = E_0 / (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{1/2} \quad (5)$$

$$Y_0' = Y_0 (1 + C^2 Y_0^{-2} - 2CY_0^{-1} \cos \theta_0)^{1/2} \quad (6)$$

$$\theta_0' = \theta_0 + 2 \tan^{-1} \left\{ \frac{CY_0^{-1} \sin \theta_0}{1 - CY_0^{-1} \cos \theta_0} \right\} \quad (7)$$

계통에서 부하로 공급되는 유효, 무효 전력은 다음과 같이 주어진다.

$$P = -E_0' Y_0' V \sin(\delta + \theta_0') - E_m Y_m \sin(\delta - \delta_m + \theta_m) \\ + (Y_0' \sin \theta_0' + Y_m \sin \theta_m) V^2 \quad (8)$$

$$Q = E_0' Y_0' V \cos(\delta + \theta_0') + E_m Y_m \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) \\ - (Y_0' \cos \theta_0' + Y_m \cos \theta_m) V^2 \quad (9)$$

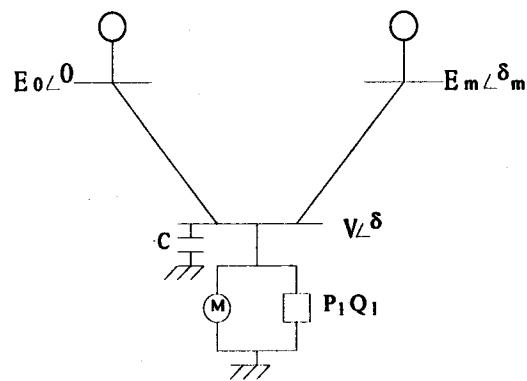


그림 1. 3 모선 계통

식(4)를 상태 변수 형태로 고치고, 식(2), (3)을 정리하면 식(1)과 같은 형태를 얻을 수 있다.

$$\dot{\delta}_m = \omega \quad (10)$$

$$M\dot{\omega} = -d_m\omega + P_m + E_m Y_m V \sin(\delta - \delta_m - \theta_m) + E_m^2 Y_m \sin \theta_m \quad (11)$$

$$K_{qw}\dot{\delta} = -K_{qr2}V^2 - K_{qr}V + E_0 Y_0 V \cos(\delta + \theta_0) + E_m Y_m V \cos(\delta - \delta_m + \theta_m) \quad (12)$$

$$TK_{qw}K_{pw}\dot{V} = K_{pw}K_{qr2}V^2 + (K_{pw}K_{qr} - K_{qw}K_{pr})V + \sqrt{K_{qw}^2 + K_{pw}^2}[-E_0 Y_0 V \cos(\delta + \theta_0 - \eta) - E_m Y_m V \cos(\delta - \delta_m + \theta_m - \eta)] + (Y_0 \cos(\theta_0 - \eta) + Y_m \cos(\theta_m - \eta))V^2 - K_{qw}(P_0 + P_1) + K_{pw}(Q_0 + Q_1) \quad (13)$$

단,  $\eta = \tan^{-1}(K_{qw} + K_{pw})$

### 3. 매개변수의 영향 분석

식(10)-(13)을 선형화하여 그 자코비안 행렬을  $J$ 라고 하면,  $J$ 의 eigenvalue 중 하나가 0이 되거나(saddle node bifurcation), 컬레상이 허수축을 지나게 되면 (Hopf bifurcation) 계통이 불안정해지게 된다. 그러므로, 이러한 현상이 언제 생기는지, 또한 어떤 bifurcation이 생기는지를 아는 것이 중요하다.

먼저, 행렬  $J$ 를 구해보면 다음과 같은꼴이 된다.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & -J_{21} & J_{24} \\ J_{31} & 0 & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & 0 & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

위 행렬의 eigenvalue를 구하는 식은 다음과 같다.

$$\det(sI - J) = 0 \quad (15)$$

$$\text{즉, } s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (16)$$

위 식에서  $a_0 = 0$ 이 되면 saddle node bifurcation이 발생한다. 또,  $s = \pm j\omega$ 이면 Hopf bifurcation이 생기는데,  $s = \pm j\omega$ 을 식(16)에 대입하여 정리하면

$$a_1^2 - a_1a_2a_3 + a_0a_3^2 = 0 \quad (17)$$

이 된다.

식(17)의 좌변을  $H$ 라고 정의하고, 이 값이 계통의 매개변수가 바뀜에 따라 어떠한 경향을 보이는지 살펴보기로 한다. 다음은 시뮬레이션에 사용된 매개변수들의 값이다.

$$K_{pw} = 0.123, K_{pr} = 0.3, K_{qw} = -0.03, K_{qr} = -1.0, K_{qr2} = 0.5$$

$$T = 5.5, P_0 = 0.3, Q_0 = 1.0, E_0 = 1.1, C = 2.5, Y_0 = 5.0, \theta_0 = -5$$

$$Y_m = 5.0, \theta_m = -5, E_m = 1.0, P_m = 0.9, d_m = 0.05, M = 0.5$$

(이 값들은 모두 단위법으로 표시된 것이고, 각도만 °로 한다.) 위 값들을 기준으로 주요 매개변수들의 변화에 따른  $H$ 와  $a_0$ 의 변화를 살펴보기로 한다.

#### 3.1. $Y_m$

$H$ 는  $Q_1$ 이 변함에 따라 거의 선형에 가까운 성질을 보이다가  $H$ 값이 작아지면 이차 핵심처럼 행동한다. 평형점 부근에서  $Y_m$ 값이 약간 변할 때  $H$ 의 변화율을 계산할 수 있다면  $H = 0$ 이 되는 점을 근사적으로 찾을 수 있다. 또,  $H$ 값 자체가 정직한 정도지표로 사용될 수도 있다.

$a_0$ 도 선형에 가까운 성질을 보이다가 0부근으로 가면 기울기가 빨라지는 이차적인 성질이 보인다.

결과를 종합해 보면,  $Y_m$ 이 큰 값일 때는 Hopf bifurcation이

먼저 발생하고  $Y_m$ 의 값이 작아지면 그남 saddle node bifurcation만 발생하게 된다.

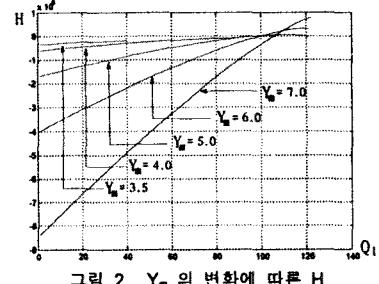


그림. 2.  $Y_m$ 의 변화에 따른  $H$

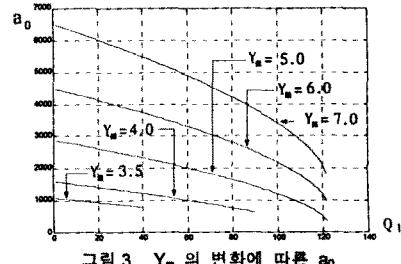


그림. 3.  $Y_m$ 의 변화에 따른  $a_0$

#### 3.2. $P_m$

$P_m$ 이 큰 값일 때는 위로 불록한 포물선 형태이다가 값이 작아짐에 따라 선형에 가까워지고, 아래로 불록한 형태로 바뀌게 되어 변화율이 훨씬 커진다.  $P_m$ 이 어느 값 이하로 되면  $H$  자체가 0 이하로 내려가거나  $a_0$ 가 먼저 0이 된다.

$P_m$ 이 작아질 때  $a_0$ 는 거의 일정한 패턴으로 바뀌지만  $H$ 는 패턴 자체가 바뀐다.

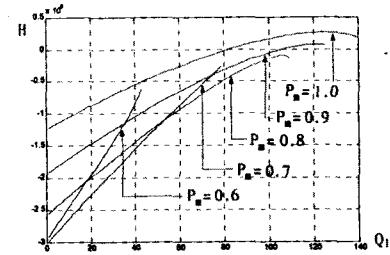


그림. 4.  $P_m$ 의 변화에 따른  $H$

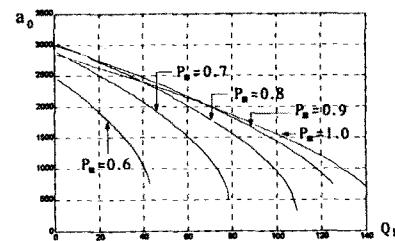


그림. 5.  $P_m$ 의 변화에 따른  $a_0$

#### 3.3. $\cos\phi$

이 경우에도 역률의 변화에 따라  $H$ 와  $a_0$ 의 패턴이 거의 유지된다. 역률이 작아지면  $H$ 가 오른쪽으로 이동하면서 전체적으로

케이션이 발생하지 않고 바로 saddle node 바이페케이션이 발생한다. 이 경우에는 임피던스의 크기를 일정하게 하고 역률만 변화시키는 경우와 달리 역률을 일정하게 하고 무효 전력을 변화시켜가는 방식으로, 역률이 작아지면 부하가 전체적으로 작아진 효과를 나타낸다.

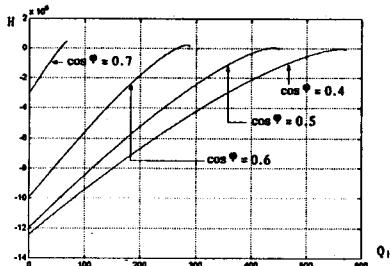


그림.6. 역률의 변화에 따른 H

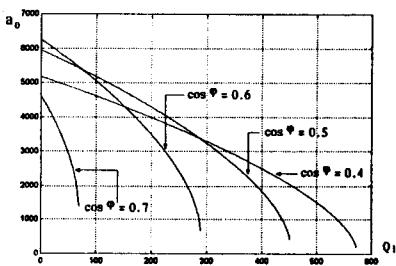


그림.7. 역률의 변화에 따른 a0

### 3.4. $\theta_m$

$\theta_m$ 의 값이 변해감에 따라 H와  $a_0$ 는 거의 평행이동하며,  $\theta_m$ 이 작아지면, 즉 선로의 저항 성분이 작아지면 Hopf 바이페케이션은 발생하지 않고, 바로 saddle node 바이페케이션이 발생하게 된다.

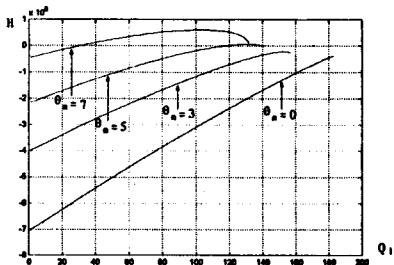


그림.8  $\theta_m$ 의 변화에 따른 H

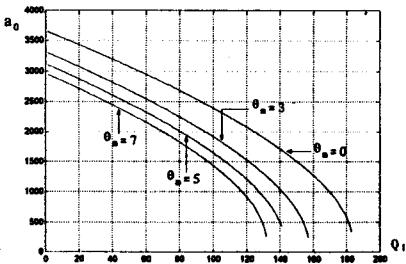


그림.9  $\theta_m$ 의 변화에 따른 a0

이상의 결과를 종합해 보면, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다:

1.  $\theta_m$ 의 값이 커지면 (발전기단의 선로가 길어져서 임피던스가 커지면) H곡선이 전체적으로 아래쪽으로 이동하여,  $H = 0$ 이 되는 점이 없어지게 되고,  $a_0$ 도 아래쪽으로 이동하게 되어 바로 saddle node 바이페케이션이 발생하게 된다.
2.  $P_m$ 값이 작아지면 (발전기의 기계적인 출력이 작아지면) saddle node 바이페케이션이 먼저 발생하게 되고, H와  $a_0$  모두 급격한 변화를 겪게 된다.
3. 역률이 작아지면 saddle node 바이페케이션만 발생하며, 역률에 따른 H와  $a_0$ 의 변화가 심한 편이다.
4.  $\theta_m$ 의 값이 변해감에 따라 H와  $a_0$ 는 거의 일정한 패턴을 유지하며, 선로의 저항 성분이 커지면 Hopf 바이페케이션이 발생하게 된다.

### 4. 결론

3 모션 계통에서 계통 방정식을 선형화하여 얻어진 특성 방정식에서 각 평형점에서의 eigenvalue를 구하지 않고 특성 방정식에서 Hopf 바이페케이션과 saddle node 바이페케이션이 발생하는 조건을 직접 유도하여 그 값 자체를 간단한 정적인 조건으로 사용할 수 있음을 보았다. 또한, 여러 가지 매개변수들의 값을 변화시켜가며 본 논문에서 제시한 지표들에 어떤 영향을 미치는지를 조사하여, 현재 계통의 동작점에서 운전 조건이 바뀌었을 때 (어떤 매개 변수의 값이 바뀌었을 때), 바이페케이션이 발생하는 조건에 미치는 영향을 보았다.

### 참고 문헌

- [1] I. Dobson, H. D. Chiang, J. S. Thorp, and L. F. Ahmed, "A Model of Voltage Collapse in Electric Power Systems", *IEEE Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, Austin, Texas, December 1988, pp. 2104-2109.
- [2] V. Ajjarapu and B. Lee, "Bifurcation Theory and Its Application to Nonlinear Dynamical Phenomena in an Electrical Power System", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.7, No.1, February 1992, pp. 424-431.
- [3] F. Alvarado, I. Dobson, and Y. Hu, "Computation of Closest Bifurcations in Power Systems", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.9, No.2, May 1994, pp. 918-928.
- [4] M. A. Pai, P. W. Sauer, B. C. Leshtreut, and R. Adapa, "Structural Stability in Power Systems - Effect of Load Models", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol.10, No.2, May 1995, pp. 609-615