

모든 속도영역의 점성유동에 적용 가능한 새로운 압력기반 유한요소법

A New Pressure-Based Finite Element Method Applicable to Viscous Flows at All Speed Ranges

심 은보*¹, 장 근식²

Eun-Bo Shim and Keun-Shik Chang

A finite element scheme using the concept of PISO method has been developed to solve the viscous flow problems in all speed range. In this study, new pressure equation is proposed such that both the hyperbolic term related with the density variations and elliptic term reflecting the incompressibility constraint are included. Present method has been applied to incompressible flow in two-dimensional driven cavity($Re=100, 400$ and $1,000$), and its computed results are compared with other's. Also, Carter plate problem($M=3$ and $Re=1,000$) is computed and the comparison is made with Carter's results. Finally, we simulate a shock-boundary layer interaction problem($M=2$ and $Re=2.96 \times 10^5$) to illustrate the shock capturing capability of the present solution algorithm.

1. 서 론

유한요소법이 유체유동의 해석에 사용되기 시작한 이래로, Navier-Stokes 방정식을 풀기 위한 많은 알고리즘이 제시되어 왔다. 대부분의 경우, 그것들은 비압축성 유동을 해석하기 위한 것이거나, 아니면 압축성 유동만을 위한 방법으로 나누어 질 수 있다. 압축성 유동을 풀기 위한 알고리즘은 밀도를 주된 변수로서 사용하며, 지배방정식을 연관된 형태로 푸는 것이 일반적 방법이다. Lohner 등[1]에 의한 Taylor-Galerkin 방법과 Huges 등[2]에 의한 SUPG 방법이 그 대표적인 것들이다. 이러한 압축성 유동 알고리즘은 보존변수들(Conservative variables)을 사용하며, 특성값(Characteristic value)에 기초한 인공점성항 및 경계조건을 이용하기 때문에 Wave의 전파를 비교적 정확하게 예측할 수 있다는 장점이 있다.

비압축성 유동을 위한 알고리즘에서는 압력을 주된 변수로 취급한다. 현재 많이 쓰이고 있는 Segregation method는 주로 유한차분법의 방법들을 응용한 것으로서 연속 방정식과 운동량 방정식을 결합하여 압력에 관한 지배 방정식을 도출한다는 것이 특징이다. 이로 인해서 속도와 압력에 관한 변수가 분리될 수 있으며, 따라서 각 방정식을 순차적으로 하나씩 해석하는 것이 가능하다. 그 대표적인 것으로는 Benim과 Zinser[3]의 SIMPLE Type의 유한요소법, Shaw[4]의 Equal Order SIMPLE Type의 유한요소법, 그리고 본 저자들[5]에 의해 개발된 PISO Type의 유한요소법등이 있다.

비압축성에 대한 알고리즘을 압축성의 영역으로 확장하려는 노력은 유한차분법에서는 많이 시도되었으나 유한요소법의 경우에는 거의 시도되지 않았다. 단지 Benim[6]은 SIMPLE Type 유한요소법을 연소문제에서 발생하는 밀도변화를 고려할 수 있도록 수정하였으나 초음속과 같은 압축성 유동을 다룰수 있는 알고리즘으로 확장하지는 못하였다.

본 연구의 목적은 하나의 알고리즘으로서 모든 속도영역의 유동문제에 적용가능한 유한요소방

1 금오공과대학교 기계공학과 (730-701, 경북 구미시 신명동 188, Tel: 0546-467-4207)

2 한국과학기술원 항공우주공학과 (305-701, 대전시 유성구 구성동 373-1, Tel: 042-869-3711)

법을 제시하는 것으로서, 본 저자들에 의해 개발된 비압축성 유동을 위한 PISO Type의 유한요소법을 확장하여 압축성 유동을 다룰 수 있도록 한다.

2. 지배방정식과 유한요소이산화

지배방정식은 비보존적 형태의 Navier-Stokes 방정식으로서, Galerkin Method를 적용하면 아래와 같은 이산화된 식들이 도출된다.

$$\int_{\Omega} H_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \right] d\Omega = 0 \quad (2-1)$$

$$\int_{\Omega} W_i \left[\rho \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} W_i \left[-\nabla p + \mu (\nabla^2 \tilde{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \tilde{u})) \right] d\Omega \quad (2-2)$$

$$\int_{\Omega} W_i \left[\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla e \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} W_i \left(-p \nabla \cdot \tilde{u} + \alpha \nabla^2 e + \Phi \right) d\Omega \quad (2-3)$$

위에서 H_i, W_i 는 가중함수이다. 그리고 각 요소내에서 속도, 압력 및 내부에너지 등의 유동변수들을 다음과 같은 공간적인 함수형태로 근사한다.

$$\tilde{u} = W_i \tilde{u}_i, \quad p = H_i p_i, \quad e = W_i e_i \quad (2-4)$$

여기에서 \tilde{u}_i, p_i, e_i 들은 변수의 절점 값이며, H_i, W_i 는 내삽함수이다.

3. 유한요소 알고리즘

본 알고리즘은 한번의 내연적인 예측단계와 두번의 외연적인 보정단계로 이루어져 있다. 예측단계에서는 이전 시간에서의 압력을 기반으로 하여 내연적인(Implicit)방법으로 속도의 예측 값인 u^*, v^* 를 운동량 방정식 (2-2)로 부터 구한다. 첫번째 보정단계에서는 u^*, v^* 를 보정하기 위해 연속방정식을 만족하는 새로운 u^{**}, v^{**} 와 p^* 를 구한다. 이를 위해 먼저 u^{**}, v^{**} 에 대한 속도보정관계식을 연속방정식에 대입하여 보정압력 p^* 를 구하고, 이로부터 보정된 속도 u^{**}, v^{**} 를 구한다. 이때 본 연구의 핵심적인 부분인 압력방정식은 다음과 같은 방식으로 유도된다. ρ^*, u^{**}, v^{**} 등이 연속방정식 (2-1)를 만족해야 하기 때문에 다음과 같은 식이 성립해야만 한다.

$$\int_{\Omega} H_i \left[\frac{\rho^* - \rho^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^* u^{**}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho^* v^{**}) \right] d\Omega = 0 \quad (3-1)$$

위식의 두번째와 세번째의 피적분항은 비선형(Non-Linear)형태이므로 아래와 같은 형태로 선형화되어야만 해석 가능하게 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho^* u^{**}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho^n u^{**}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho^* u^n) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho^n u^n) \quad (3-2)$$

여기에서 상첨자 n은 이전 시간대에서의 값을 의미한다. 식 (3-2)를 식 (3-1)에 대입한 이후, 상태 방정식을 이용하여 ρ^* 를 p^* 로 치환한다. u^{**}, v^{**} 는 속도보정관계식으로 부터 p^* 와 속도의

예측치인 u^* , v^* 의 항으로 표현되며 이를 위식에 대입한다. 그러면 압력에 관한 방정식이 유도되는데, 여기에는 비압축성 유동특성으로 부터 도출되는 Poisson형태의 Operator뿐 아니라 밀도 변화를 반영하는 Hyperbolic형태의 Operator도 포함되어 있다. Poisson형태의 Operator는 Shaw의 Equal Order SIMPLE알고리즘에서 제시된 것이지만, 본 연구에서는 압축성 유동에도 적용가능할 새로운 형태의 유한요소 압력방정식으로 확장되었다. 이 압력방정식으로부터 p^* 를 구한다음 이것을 외연적인 속도보정관계식에 대입하여 u^{**} , v^{**} 를 구한다. 이후에 이값들로 부터 내부에너지 예측값인 e^* 를 구한다. 이어서 또 한번의 추가적인 보정단계에 의해 두번째 보정치 u^{***} , v^{***} , p^{***} , e^{**} 가 첫번째 보정단계와 거의 유사하게 구해진다. 그리고 이것들이 (n+1) 시간에서의 최종적인 값이 된다.

4. 결과 및 검토

4.1. 2차원 Driven cavity 유동

유동현상의 중요한 Parameter인 Re수는 Cavity의 넓이, 그리고 유동을 유발시키는 윗판의 견인 속도를 기준으로 하며, 여기에서는 Re수가 100, 400, 1000인 경우에 대해 계산을 수행하였다. 계산을 위해 경계쪽에 밀집된 51x51개의 격자를 사용하였으며, 시간간격(Time step)은 Re수 100, 400, 1000에 대해 각각 3.0, 1.5, 0.7을 취하였다. Fig. 1는 Cavity의 수직, 수평중심선을 따른 속도분포를 Ghia등[7]의 결과와 비교한 것이다. Re수가 커짐에 따라 벽에서의 경계층이 얇아짐을 알 수 있으며, 모든 점에서 Ghia등의 결과와 매우 잘 일치하고 있다. Fig. 2(a),(b),(c)는 Re=1000에서의 Velocity Vector, Streamline, Pressure를 도시한 것이다.

4.2 Carter의 평판문제

압축성 유동의 경우에 대해 본 알고리즘의 타당성을 검토하기 위하여 Carter[8]의 평판문제를 해석하였다. Fig. 3에 나타나 있듯이 자유류의 Mach수는 3, 입구에서의 속도와 평판의 길이를 기준으로 하는 Reynolds수는 1000이며, 평판에서의 온도 T_w 는 유입온도 T_∞ 의 2.8배, Prandtl수는 0.72, 비열비(Specific heat ratio)는 1.4이다. 격자계는 57x71개로서 벽면 근처와 앞전(Leading edge)에서 밀집시킨다. 그리고 시간간격은 CFL수 5의 값을 사용하였다. Fig. 4(a),(b),(c)는 각각 밀도, 압력 그리고 Mach수의 contour를 보여주고 있다. 밀도의 contour는 앞전에서 발생한 충격파를 선명하게 보여주고 있다. Fig. 5은 출구에서의 밀도와 수평방향속도를 Carter의 결과와 정량적으로 비교한 것으로서, Shock의 위치와 경계층내에서의 값들이 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.3 입사충격파와 경계층의 상호작용에 의한 유동박리

자유류 Mach수가 2이고, Re수가 2.96×10^5 인 초음속유동의 평판위 경계층은 수평과 32.6°의 각도로 입사되는 충격파와 상호간섭을 일으켜 경계층이 박리하게 된다. Fig. 6에서 보듯이 평판이 시작되는 곳에서 약한 앞전충격파(Leading edge shock)가 발생하고, 입사된 충격파와 경계층이 만나면서 유동이 박리된다. 이로 인하여 박리영역 앞에서 압축충격파가 생기고, 그 이후에는 입사된 충격파의 반사파와 재압축파가 나타난다. 격자계는 99x99이며 벽면근처와 앞전(Leading Edge)에서 밀집시켰다. Fig. 7은 압력의 분포를 보여주는 것으로서, 앞전에서의 미약한 충격파, 압축충격파, 반사충격파 그리고 재압축파등이 선명히 나타나 있는데, 이는 본 알고리즘의 충격파 포획능력을 보여주는 것이다. Fig. 8(a),(b)는 각각 벽면에서의 압력 및 마찰계수를 Hakkinen[9]의 실험치와 비교한 것으로서 본 연구의 결과와 전반적으로 잘 일치하고 있다.

5. 결론

본 연구에서는 본 저자들에 의해 개발되어 비압축성 유동에 훌륭히 적용된 바 있는 PISO Type의 유한요소법을 모든 속도 영역의 점성유동에 적용 가능하도록 확장하였다. 압축성 유동을 풀 수 있도록 하기 위해, 비압축성 조건을 반영하는 Poisson형태의 Operator뿐 아니라 밀도의 변화를 반영하는 Hyperbolic형태의 Operator가 포함된 새로운 형태의 압력방정식이 유도 되었다. 이것을 비압축성 유동 및 압축성 유동문제에 적용하여 검증한 결과, 본 알고리즘이 모든 속도영역의 유동에 대해 정확한 수치해를 제시할 수 있음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] Tworzydło, W.W., Oden J.T., Thornton.E.A, "Adaptive Implicit/Explicit Finite Element Method for Compressible Viscous Flows," *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 95, 1992, pp.397-440.
- [2] Huges, T.J.R., Franca, L.P., and Hulbert, G.M., "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics," *Comp Meth Appl Mechods. Eng.*, Vol. 73, 1989, pp.173-189.
- [3] Benim, A.C., Zinser, W., "A Segregated Formulation of Navier-Stokes Equations with Finite Element," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 57, 1986, pp.223-237.
- [4] Shaw, C.T., "Using a Segregated Finite Element Scheme to Solve the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Int'l J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 12, 1991, pp.81-92.
- [5] Shim, E.B., Chang, K.S., "Three-Dimensional Vortex Flow past a Tilting Disc Valve Using a Segregated Finite Element Scheme," *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol. 3, No. 1, 1994, pp.205-222.
- [6] Benim, A.C., "Finite Element Solution of an Enclosed Turbulent Diffusion Flame," *Int'l J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 9, 1989, pp.289-303.
- [7] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., "High - Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and Multigrid Method," *J. Comp. Physics*, Vol. 48, 1982, pp.387-411.
- [8] Carter, J.E., "Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Supersonic Laminar Flow over a Two-Dimensional Compression Corner," *NASA Technical Report TR R-385*, July 1972.
- [9] Hakkinen, R.J., Greber, I., "The Interaction of an Oblique Shock Wave with a Laminar Boundary Layer," *NASA Memo-2-59W*, 1959.

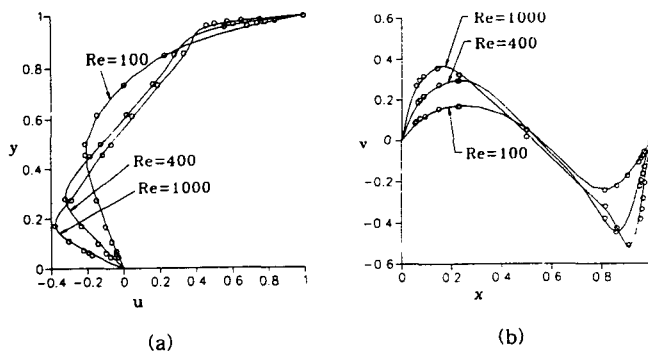


Fig. 1. Velocity profiles at various Re : o, Ghia *et al.*; —, present study
(a) on a vertical centerline (b) on a horizontal centerline

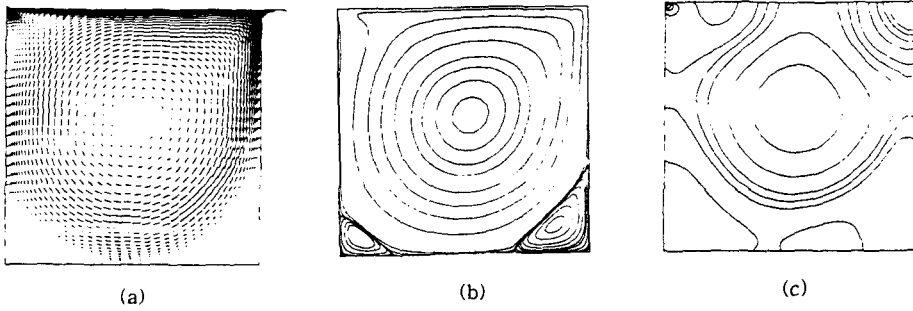


Fig. 2. Numerical results of 2d driven cavity flow for $Re=1000$
 (a) Velocity vector (b) Streamlines (c) Pressure

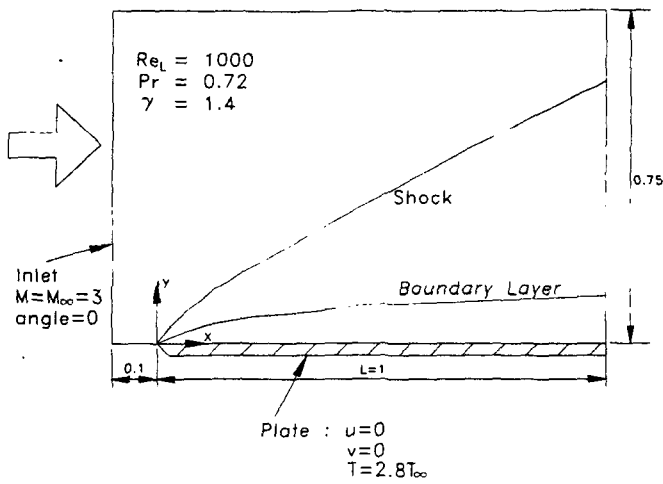


Fig. 3. Schematic diagram of Carter plate

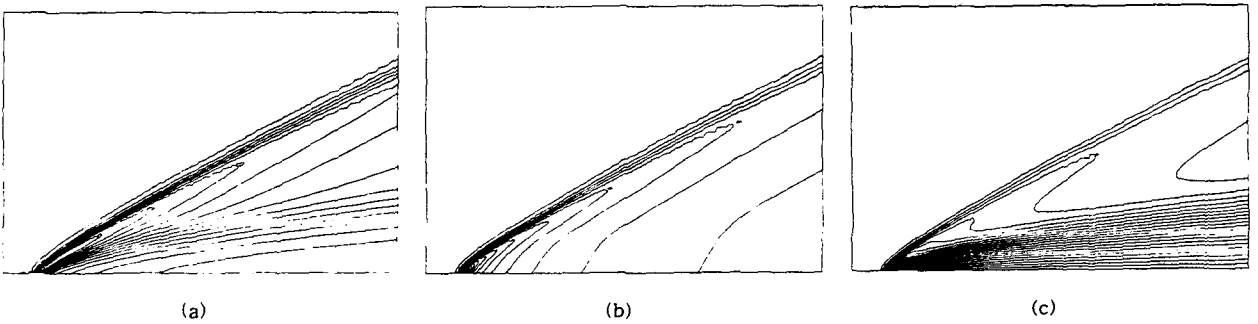


Fig. 4. Numerical results of Carter plate problem
 (a) Density contours (b) Pressure contours (c) Mach number contours

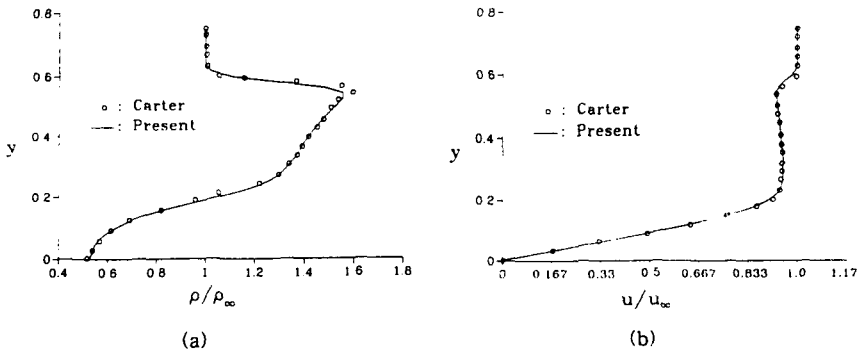


Fig. 5. Variations of flow variable along y coordinates at the exit
(a) Density (b) x-direction velocity

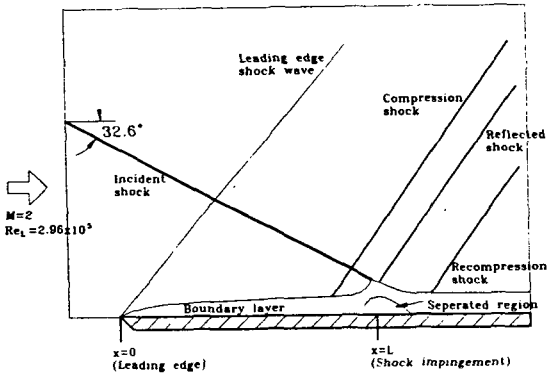


Fig. 6. Schematic diagram of shock and boundary layer interaction

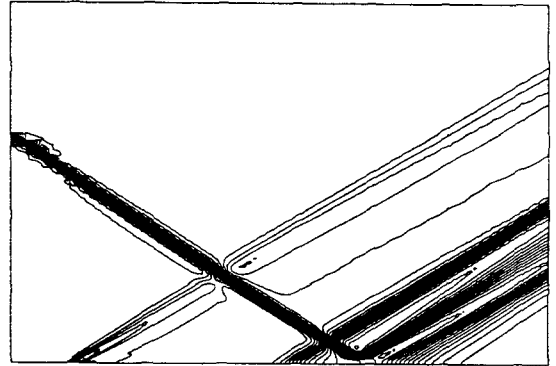


Fig. 7. Pressure contours

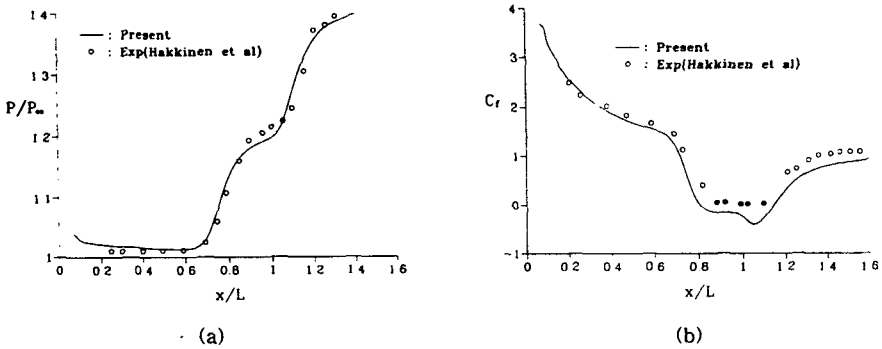


Fig. 8. Comparisons of computational results with experiment
(a) Pressure (b) Friction coefficient