

유한요소법을 이용한 전기기기의 누설인덕턴스 계산

김형석*, 최명준, 박일한
 숭실대학교 전기공학과

The Calculation Method of Leakage Inductances in Electrical Machines Using F.E.M.

Hyung-Seok Kim, Myoung-Jun Choi and Il-Han Park
 Dept. of Electrical Eng., Soong-sil University, Seoul 156-743, KOREA

ABSTRACT

In this paper we presented a calculation method of leakage inductance in electrical machines. For its accurate calculation the finite element method is applied to the analysis of magnetic field distribution. The self and mutual inductances are derived using the results of the magnetic field analysis and the leakage inductance is easily obtained from these inductances. As numerical examples, we treated a single phase transformer and a rotor slot model of induction motor. In the finite element analysis we used the 2D linear magnetostatic formulation with the first-order triangular element

1. 서 론

본 논문은 전기기기의 등가전기회로해석시 요구되는 누설인덕턴스의 성분을 정확히 계산하기 위하여 분포정수회로법의 일종인 유한요소법을 적용하였다[2]. 기존에 많이 사용되어온 등가자기회로법은 자로에서 자속밀도 및 자속의 방향을 일정하게 가정하므로 정확한 누설자속을 계산하기 어려운 문제점이 있다. 특히 회전기의 슬롯부와 공극에서의 자속분포는 복잡한 형태를 갖기 때문에 등가자기회로법의 적용은 쉽지 않다. 따라서 본 논문에서는 유한요소법을 통한 정확한 자장분포해석에 근거한 누설인덕턴스의 일반적인 정의와 계산법을 제시한다. 그리고 수치해석에 있어서 단상변압기와 유도기의 회전자슬롯 모델에 본 계산법을 적용하였다. 유한요소해석 모델은 2차원 선형정자장 정식화를 이용하였다.

2. 지배방정식과 유한요소정식화[4]

미지수가 자기벡터포텐셜인 2차원 선형 정자장시스템의 지배편미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \frac{\partial A}{\partial y}) + J_s = 0 \quad (2.1)$$

여기서, A : 자기 벡터포텐셜
 ν : 자기 저항률
 J_s : 전원 전류밀도

식(2.1)에 유한요소법을 적용하기 위해 요소형상함수로서

1차 삼각형상요소용 이용하여 벡터포텐셜 A 을 1차근사화 하면 다음과 같다.

$$A^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_{ie}(x, y) A_{ie} \quad (2.2)$$

여기서, $N_{ie}(x, y)$: 요소형상함수
 A_{ie} : i 번째요소의 정점의 벡터포텐셜값

식(2.1)과 같은 지배방정식을 변분원리에 의한 유한요소법의 정식화과정에서 범함수를 최소로 하는 조건을 이용하여 수치해를 구한다. 식(2.1)을 요소 e 에서의 범함수 $\chi^{(e)}$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$\chi^{(e)} = \int_{S_e} \frac{1}{2} [\nu (\frac{\partial A^{(e)}}{\partial x})^2 + \nu (\frac{\partial A^{(e)}}{\partial y})^2] dx dy - \int_{S_e} J_s A^{(e)} dx dy \quad (2.3)$$

식(2.2)를 식(2.3)을 대입하고 범함수의 극치조건으로 부터 다음식을 얻는다.

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial A_{ie}} = \int_{S_e} \sum_{j=1}^3 [\nu \frac{\partial N_{ie}}{\partial x} \frac{\partial N_{je}}{\partial x} + \nu \frac{\partial N_{ie}}{\partial y} \frac{\partial N_{je}}{\partial y}] A_{je} dx dy - \int_{S_e} J_s N_{ie} dx dy \quad (2.4)$$

식(2.4)를 해석영역에 대해 전체요소를 조립하면 다음과 같은 행렬식을 얻는다.

$$[K] [A] - [J] = 0 \quad (2.5)$$

여기서, $[K]$ 은 시스템행렬이고, $[J]$ 는 전류원 벡터이다.

3. 유한요소법에 의한 인덕턴스의 계산법

3.1 자기인덕턴스 (self inductance)

자기 회로법에서 한 코일에 대한 자기 인덕턴스는 다음과 같은 식을 이용한다.

$$L = \frac{\lambda}{I} \quad (3.1)$$

$$\lambda = N\phi \quad (3.2)$$

여기서, L : 인덕턴스, λ : 쇄교자속,
 I : 전류, N : 코일 turn 수

위 식(3.2)에서 쇄교자속은 코어를 통과하는 자속에 코일 turn수를 곱해서 표현 하였는데 이는 자기회로에서 자속은 코어 내부에서만 존재한다는 가정을 사용하였기 때문이다. 하지만 실재는 코일이 일정한 부피를 갖기 때문에 코일이 존재하는 공간에도 자속이 존재하게되고 엄밀히 식 (3.2)를 적용할 수 없다. 물론 일반적인 자기회로에서 대부분의 자속은 자성체 코어 내부에 존재하므로 식(3.2)를 사용할 수 있다. 하지만 자기회로의 공극이 커지거나 코어에서 자기회화가 생기기 시작하면 자성체 밖으로 나오는 자속밀도가 커지게 되어 식(3.2)를 적용하는데 문제가 된다. 따라서 이럴 때의 정확한 인덕턴스값은 유한요소법으로 구한 자장분포결과와 식(3.1)을 이용하여 계산할 수 있다. N turn의 도체에 전류 I 를 흘릴때 코일을 통과하는 총쇄교자속 λ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\lambda = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (3.3)$$

여기서, \vec{B} : 자속밀도, S : 코일의 자속통과면
자속밀도와 자기 벡터퍼텐셜의 관계 ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) 와 Stoke정리를 이용하면 식(3.3)은 다음과 같이 변형된다[3].

$$\lambda = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.4)$$

여기서, \vec{A} : 자기벡터퍼텐셜,
 C : N turn의 coil을 따른 선적분경로

자기시스템에 여러개의 다른 코일이 감겨있는 경우 각 코일의 자기인덕턴스는 구하고자하는 코일에만 일정전류를 흘려주고 자장분포를 계산한 후 그 코일에 대하여 식(3.4)의 선적분을 계산하고 식(3.1)과 같이 전류값으로 나누어 주면 각 코일의 자기인덕턴스를 계산할 수 있다. 그리고 식(3.4)에서 구한 쇄교자속값을 식(3.2)에서 적용하면 자속 ϕ 를 얻을 수 있는데 이 값은 각 코일 turn을 통과하는 평균자속임을 알 수 있다.

3.2 상호인덕턴스 (mutual inductance)

상호인덕턴스는 두 개의 코일이 있을 경우 한 코일 전류에 의해 발생한 자속이 다른 코일을 통과하는 정도로 표현하는 것으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L_{21} = \frac{\lambda_2}{I_1} \quad (3.5)$$

$$\lambda_2 = N_2\phi_m \quad (3.6)$$

여기서, L_{21} : 코일1,2사이의 상호인덕턴스
 λ_2 : 코일1의 전류에 의한 코일2의 쇄교자속
 I_1 : 코일1의 전류
 N_2 : coil 2의 turn 수
 ϕ_m : 코일2의 평균자속

식 (3.5)에서 λ_2 는 코일1에만 전류를 흘리고 그에 대한

자기시스템의 자장분포를 계산한 후 코일2에서 식 (3.4)를 이용하여 계산한다. 그리고 그 값을 코일1의 전류로 나누어 주면 상호인덕턴스가 얻어진다. 식(3.6)에서 ϕ_m 은 식(3.2)에서와 같이 코일2의 각 turn을 통과하는 평균자속이다.

3.3 누설인덕턴스 (leakage inductance)

자기 시스템에 두 개의 코일중 한 코일에만 전류가 흐를때 그 코일에서 발생한 자속은 일반적으로 다른 코일을 모두 통과하지 못하고 누설되는 성분이 존재한다. 이것에 의한 누설인덕턴스의 계산은 다음 과정과 같이 계산된다. 우선 코일1에 의한 쇄교자속은 코일2를 통과하는 자속 ϕ_m 과 누설자속 ϕ_n 으로 나눌 수 있다. 즉

$$\lambda_1 = \oint_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} = N_1(\phi_m + \phi_n) \quad (3.7)$$

여기서, C_1 : coil 1 을 따른 선적분경로
 N_1 : coil 1 의 코일 turn 수
 ϕ_m : coil 2를 통과하는 평균자속
 ϕ_n : coil 1 에 대한 평균누설자속

식(3.7)에서 ϕ_m 은 상호인덕턴스를 결정하는 자속이고 ϕ_n 은 누설인덕턴스를 결정하는 자속이다. 따라서 코일2의 쇄교자속은 다음과 같다.

$$\lambda_2 = \oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = N_2\phi_m \quad (3.8)$$

C_2 : 코일2를 따른 선적분경로
 N_2 : 코일2의 코일 turn 수

식(3.8)을 식(3.7)에 대입하여 평균누설자속이 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi_n = \frac{\lambda_1}{N_1} - \frac{\lambda_2}{N_2} \quad (3.9)$$

1차측 코일에서의 누설인덕턴스는 다음과 같이 표현된다.

$$L_{l1} = \frac{N_1\phi_n}{I_1} \quad (3.10)$$

식(3.9)를 (3.10)에 대입하고 자기인덕턴스 식(3.1)과 상호인덕턴스 식(3.5)를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$L_{l1} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} L_{21} \quad (3.11)$$

동일한 과정을 2차측 코일에 적용하면 2차측 누설인덕턴스는 다음과 같이 얻어진다.

$$L_{l2} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1} L_{12} \quad (3.12)$$

마지막 결과 식 (3.11)과 (3.12)로부터 알 수 있듯이 누설인덕턴스는 자기인덕턴스와 상호인덕턴스를 계산하여 얻을 수 있다.

3.4 유한요소법에 의한 쇄교자속 계산

유한요소법을 사용하여 각 절점에서 자기 벡터퍼텐셜값을 계산한 후 코일에서의 쇄교자속계산은 식(3.4)를 이용

하여 다음과 같이 계산한다.

$$\lambda = \frac{2N}{S} \sum_{i=1}^e (\Delta_i \times A_{i\omega}) \cdot (\pm l) \quad (3.13)$$

$$S = \sum_{i=1}^e \Delta_i \quad (3.14)$$

$$A_{i\omega} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 A_{ij} \quad (3.15)$$

여기서, N : 코일의 총 turn수,

S : 코일 영역의 총면적,

Δ_i : i 번째 요소의 면적,

e : 코일영역의 총요소수,

$A_{i\omega}$: i 번째 요소에서의 평균자기벡터포텐셜값,

A_{ij} : i 번째 요소의 j 번째 절점의

자기벡터포텐셜값,

\pm : 기준방향에 대한 코일 전류 방향

l : 기기의 적층길이

4. 수치적용사례

4.1 단상 변압기의 누설인덕턴스

앞의 누설인덕턴스 계산알고리즘을 공극을 갖는 단상변압기에 적용하였다. 해석 모델은 대칭성을 이용하여 전체의 반만 해석하였고, 1차측코일의 turn수는 500 이고 2차측코일의 turn 수는 100이다. 해석모델과 자속분포는 그림1과 같다.

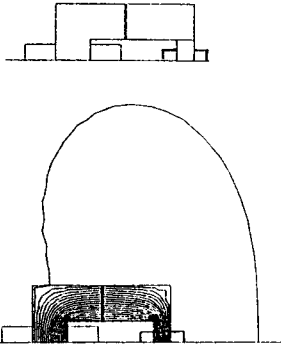


그림 1. 해석모델과 자속분포

유한요소 해석 결과 자기인덕턴스는 35.26 [mH], 상호인덕턴스는 34.14 [mH]이고, 이 결과로부터 누설인덕턴스는 1.12 [mH]로 계산되었다.

4.2 유도전동기 회전자슬롯의 누설자속 계산

유도 전동기가 정격상태에 있을 때는 슬립이 보통 5% 이내이므로 회전자 도체바의 유도전류밀도는 거의 일정하다고 볼 수 있다. 따라서 도체바에 일정한 전류밀도를 주고 그에 대한 자속해교분포를 구하였다. 본 수치해석에서는 회전자슬롯부분의 영향을 주로 보기위해 공극 윗부분의 고정자 부분을 Neumann경계로 처리하여 간략화하였

같다.

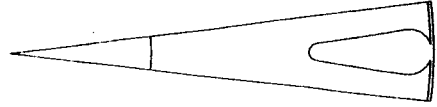


그림 2. 해석모델 1과 자장분포

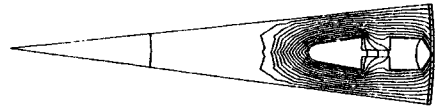
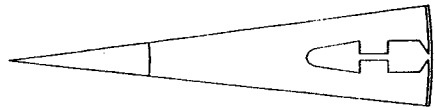


그림 3. 해석모델 2과 자장분포

해석 모델 1과 2에서 전체 발생자속에 대한 누설자속의 비율은 각각 16.89%, 35.91%로 계산되어 해석 모델 2의 얇은 슬롯 부분이 누설자속 발생을 크게 함을 알 수 있다. 여기서 전체 발생자속은 해석영역에서 포텐셜의 최대값으로 알 수 있고 누설자속은 고정자 표면에서 최대 포텐셜값을 이용해 구해진다.

5. 결론

본 논문에서는 전기기기에서 발생하는 누설자속에 대한 등가회로의 누설인덕턴스를 유한요소법을 이용하여 계산하기 위한 방법을 제시 하였고, 이를 단상변압기와 유도기기회전자의 슬롯모델에 적용하여 검출하였다. 본 논문에서 제시한 해석에는 비교적 간단한 모델이나 본 누설인덕턴스의 계산방법은 복잡한 형상을 갖는 시스템에도 쉽게 적용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- [1]. G.R. Slemon and A. Straughen, Electric Machines Addison Wesley, 1980
- [2]. M.J. Robinson, Finite element calculation of equivalent circuit parameters for Induction motor, Ph.D Dissertation, Univ. of London, 1988
- [3]. W.H. Hayt, J.R, Engineering Electromagnetics McGraw-Hill Press,
- [4]. 임달호, 전기계의 유한요소법, 동명출판사, 1987