

고유진동수와 모드들의 미분을 구하기 위한 대수적 방법

Algebraic Method for Evaluating Natural Frequency and Mode Shape Sensitivities

정길호* 김동옥* 이인원**
Jung, Gil-Ho Kim, Dong-Ok Lee, In-Won

ABSTRACT

This paper presents an efficient numerical method for computation of eigenpair derivatives for the real symmetric eigenvalue problem with distinct and multiple eigenvalues. The method has very simple algorithm and gives an exact solution. Furthermore, it saves computer storage and CPU time. The algorithm preserves the symmetry and band of the matrices, allowing efficient computer storage and solution techniques. Thus, the algorithm of the proposed method will be inserted easily in the commercial FEM codes. Results of the proposed method for calculating the eigenpair derivatives are compared with those of Rudisill and Chu's method and Nelson's method which is efficient one in the case of distinct natural frequencies. As an example to demonstrate the efficiency of the proposed method in the case of distinct eigenvalues, a cantilever plate is considered. The design parameter of the cantilever plate is its thickness.

For the eigenvalue problem with multiple natural frequencies, the adjacent eigenvectors are used in the algebraic equation as side conditions, they lie adjacent to the m (multiplicity of multiple natural frequency) distinct eigenvalues, which appear when design parameter varies. As an example to demonstrate the efficiency of the proposed method in the case of multiple natural frequencies, a cantilever beam is considered. Results of the proposed method for calculating the eigenpair derivatives are compared with those of Dailey's method (an amendment of Ojalvo's work) which finds the exact eigenvector derivatives. The design parameter of the cantilever beam is its height.

Data is presented showing the amount of CPU time used to compute the first ten eigenpair derivatives by each method. It is important to note that the numerical stability of the proposed method is proved.

1. 서론

시스템의 거동은 고유치 문제의 해, 즉 고유진동수와 모드들을 구함으로써 완전히 결정된다. 이러한 고유치 문제의 해는 시스템의 설계 변수가 변함에 따라 변하게 되고, 따라서 시스템의 동응답 특성도 변하게 된다. 그래서 고유쌍의 미분값들은 동응답의 민감도를 결정하는 데 대단히 유용할 뿐만 아니라, 설계 경향 연구나 실제 시스템 거동에 대한 직관을 얻는데도 대단히 유용하다.

1975년에 Rudisill과 Chu^[1]가 모드들의 미분을 구할 수 있는 대수적인 방법을 제안했다. 이 방법은 최종적으로 풀어야 하는 선형 대수 방정식의 계수 행렬이 비대칭이고, 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에

* KAIST 기계공학과 박사과정

** KAIST 토목공학과 교수

국한되어 있다. 1976년에 Nelson^[2]도 서로 다른 고유치를 갖는 일반적인 실계수 행렬에 대한 고유쌍을 계산하는 알고리즘을 제안했다. 이 방법도 한 개의 고유쌍 미분을 계산하기 위하여 그에 해당하는 한 쌍의 고유치가 필요하기 때문에 효율적이긴 하지만, 고유치가 중복근을 갖는 경우에 어려움이 있다. 일반적인 구조물은 구조물의 대칭성 때문에 많은 중복근이 존재한다. 그래서 중복근을 갖는 경우에 고유 진동수 및 모드 미분을 구하기 위하여 많은 연구가 진행되고 있다^[3-5]. Nelson의 방법을 중복근을 갖는 경우까지 확장한 Ojalvo^[3] 방법이 있고, 이 방법을 수정한 Mills-Curren^[4] 방법과 Dailey^[5] 방법이 있다. 이 방법들은 Nelson의 방법을 기본적인 알고리즘으로 사용하기 때문에 모우드의 미분값을 구할 때 대단히 복잡하다. 그렇지만 제안 방법은 선형 대수 방정식의 계수 행렬이 대칭을 유지하도록 제약 조건을 첨가한다. 대칭 행렬은 band형태나 sky-line형태로 계산할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 해석 시간을 절약할 수 있는 장점이 있다. 또한 시스템의 고유 진동수가 중복근을 갖는 경우에도, 설계 변수가 변할 때 나타나는 m (중복근의 갯수)개의 모우드에 근접한 원래 시스템의 모우드 집합을 구하면, 이 벡터들을 이용한 제약 조건을 첨가하여 모우드의 미분을 계산할 수 있다.

2장과 3장에서는 기존 방법들의 고유치 문제에 대한 민감도 해석을 간략히 살펴보았다. 4장에서는 제안 방법과 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였고, 5장에서는 예제를 통한 수치 해석을 수행하였다.

2. 기존의 민감도 해석 기법

2.1 이론적 배경

동적 해석에서 일반화된 고유치 문제는 다음과 같다.

$$K\phi_j = \lambda_j M\phi_j \quad (1)$$

여기서 K 와 M 은 각각 시스템의 강성 행렬과 질량 행렬이다. M 은 positive definite이고, K 는 positive definite 또는 semi-positive definite이다. K 와 M 은 n 차의 대칭 행렬이고 λ_j 는 시스템의 j 번째 고유 진동수의 제곱이고, ϕ_j 는 시스템의 j 번째 모우드이다. 모우드는 일반적으로 다음과 같이 정규화한다.

$$\phi_j^T M\phi_j = 1 \quad (2)$$

고유치의 미분을 구하기 위하여 설계 변수에 대하여 식(1)을 미분하면,

$$(K - \lambda_j M)\phi_j' = -(K' - \lambda_j M')\phi_j + \lambda_j' M\phi_j \quad (3)$$

식(3)의 양변 앞에 ϕ_j^T 를 곱하고 정리하면, 고유치 미분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_j' = \phi_j^T (K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (4)$$

여기서 $\lambda_j' = \partial\lambda_j / \partial p$, $K' = \partial K / \partial p$ 그리고 $M' = \partial M / \partial p$ 이고, p 는 설계 변수이다. λ_j 를 식(4)와 같이 구했으므로 식(3)의 우변항은 아는 값이다. 그러나, 행렬 $K - \lambda_j M$ 가 정칙 행렬이 아니기 때문에 직접적으로는 ϕ_j' 을 구할 수 없다. 그래서 Rudisill과 Chu는 제약 조건을 첨가해서 비대칭 정칙 행렬을 구성하여 ϕ_j' 을 계산했고, Nelson은 특이해(particular solution)과 비특이해(homogeneous solution)의 합으로 ϕ_j' 를 구하는 알고리즘을 제시했다. 이외에도 모우드의 미분을 모우드들의 조합으로 표시하여 계산하는 modal method^[6-7]와 이를 수정·보완한 많은 방법들이 있지만, 한 개의 모우드의 미분을 구하기 위하여 전부, 또는 여러개의 모우드들이 필요하기 때문에 Nelson방법에 비해서 계산량이 많은 단점이 있다^[8]. 또한 반복과정을 통한 방법^[1, 9]들이 있지만 근사해를 구하기 때문에 본 논문^[10]에서는 고려하지 않았다.

2.2 Nelson 방법

이 방법은 특이해 v 와 비특이해 $c\phi_j$ 의 합으로 모우드의 미분을 계산한다. 즉,

$$\phi'_j = v + c\phi_j \quad (5)$$

여기서 c 는 계수이다. 특이해 v 는 j 번째 모우드의 요소중에서 가장 큰 값에 해당하는 위치를 k 라고 하면, ϕ'_j 의 요소중에서 k 번째 값을 0으로 하고 계산함으로써 얻을 수 있다. 계수 c 는 식(2)을 미분한 식에 식(5)을 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c = -v M \phi_j - 0.5 \phi_j^T M' \phi_j \quad (6)$$

이 방법은 서로 다른 고유치를 갖는 고유치 문제에 대하여 수 많은 방법들중에서 지금까지 가장 효율적인 방법중의 하나이지만, 알고리즘이 다소 복잡할 뿐만 아니라 중복근을 갖는 경우에 ϕ'_j 을 구할 수 없다. Ojalvo, Mills-Curren 그리고 Dailey등이 Nelson의 방법을 확장하여 중복근을 갖는 경우에 해법을 개발하였지만, 알고리즘이 대단히 복잡하기 때문에 계산 시간이 오래 걸리는 단점이 있다. Dailey 방법을 3장에 소개했다.

2.3 Rudisill & Chu 방법

이 방법은 제약 조건을 첨가하여 비대칭 선형 대수 방정식을 푸는 방법이다. 식(1)을 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M) \phi_j = 0 \quad (7)$$

식(7)를 미분한 식(3)를 다시 쓰면,

$$(K - \lambda_j M) \phi'_j - \lambda'_j M \phi_j = -(K' - \lambda_j M') \phi_j \quad (8)$$

모우드를 길이로 정규화한 다음 미분하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T \phi_j = 1, \quad \phi_j^T \phi'_j = 0 \quad (9), (10)$$

식(8)과 식(10)를 행렬 형태로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M \phi_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi'_j \\ \lambda'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{Bmatrix} \phi_j \quad (11)$$

식(11)에서 계수 행렬을 Choleski의 행렬 분해법^[21]을 이용하여 ϕ'_j 과 λ'_j 을 구할 수 있다.

이 방법은 알고리즘이 대단히 간단하고 정확한 해를 구할 수 있는 강력한 방법임에도 불구하고, 계수 행렬이 비대칭이어서 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 많이 소요될 뿐만 아니라, 수치적 안정성의 증명이 없고, 중복근이 있는 경우에 사용할 수 없는 단점이 있기 때문에 그동안 사장되었던 방법이다. 제안 방법은 이방법의 장점을 유지하면서 앞에서 열거한 단점들을 모두 보완했다.

3. Dailey 방법

이 방법은 Ojalvo 방법을 수정·보완한 방법이다. 예를 들어, 고유치 문제의 고유 진동수가 m 번 중복되었다고 하면, 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 m 개의 고유 진동수가 서로 다른 값을 갖게 된다. 이 경우 m 개의 서로 다른 고유 진동수에 대해서 유일한 모우드들을 구할 수 있다. 그러나 모우드의 미분이 존재하기 위해서는 설계 변수가 변하기 전의 고유치가 중복근을 갖는 부공간에서 설계 변수가 변할 때 나타나는 모우드에 가장 근접한 모우드 집합을 먼저 구해야 한다. 이러한 근접한 모우드 집합을 구하기 위해서 다음과 같은 고유치 문제를 고려한다.

$$K\Psi = M\Psi \Lambda \quad (12)$$

여기서 $\Lambda = \lambda I$, $\Psi^T M \Psi = I$, 그리고 λ 는 Ψ 에 의해 span되는 고유부공간(eigen-subspace)의 고유치이다. 즉, λ 는 m 개의 중복근을 갖는다. 또한 Ψ 는 $n \times m$ 행렬이고, Λ 는 $m \times m$ 행렬이다. 근접한 모우드들은 직교변환(orthonormal transformation)에 의해 Ψ 의 함으로 표시될 수 있다.

$$Z = \Psi \Gamma \quad (13)$$

여기서, Γ 는 $m \times m$ 직교변환 행렬이다.

$$Z^T M Z = \Gamma^T \Psi^T M \Psi \Gamma = \Gamma^T \Gamma = I \quad (14)$$

모우드의 미분을 구하기 위하여 먼저 Γ 를 계산해야한다. 설계 변수가 변함에 따라 중복되었던 고유 진동수는 서로 다른 m 개의 값을 갖게 되기 때문에, $\Lambda' = \partial \Lambda / \partial p = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ 로 쓸 수 있다. Γ 를 구하기 위하여 다음과 같이 근접한 모우드 Z 로 구성된 고유치 문제를 고려하면,

$$KZ = MZ \Lambda \quad (15)$$

식(15)을 미분하고 정리하면 다음과 같다.

$$(K - \lambda M)Z' = -(K' - \lambda M')Z + MZ \Lambda' \quad (16)$$

식(16)의 양변에 Ψ^T 를 곱하고, $Z = \Psi \Gamma$ 를 대입하면,

$$[\Psi^T (K' - \lambda M') \Psi] \Gamma = D \Gamma = \Gamma \Lambda' \quad (17)$$

고유치 문제 식(17)을 풀면 Γ 를 구할 수 있다. 그러므로 식(13)를 이용하여 근접한 모우드들로 이루어진 행렬 Z 를 구할 수 있다. 이제 Z' 을 구하기 위하여 식(16)에서 $F = (\lambda M' - K')Z + MZ \Lambda'$ 라고 하면,

$$(K - \lambda M)Z' = F \quad (18)$$

식(18)의 계수행렬 $K - \lambda M$ 가 정칙행렬이 아니기 때문에 Z' 을 직접적으로는 구할 수 없다. 행렬 $K - \lambda M$ 의 랭크는 $n - m$ 이다. 만일 V 가 $(K - \lambda M)V = F$ 의 해이면 $V + ZC$ 도 해가된다. 여기서 C 는 $m \times m$ 계수 행렬이다. 식(18)에 Nelson의 알고리즘을 고려하여 V 를 구한다. 이제 행수 행렬 C 의 대각요소는 정규화 조건 $Z^T M Z = I$ 를 미분한 다음, $Z' = V + ZC$ 를 대입하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$C + C^T = -V^T M Z - Z^T M V - Z^T M' Z = Q \quad \text{또는} \quad c_{ii} = 0.5 q_{ii} \quad (19), (20)$$

C 의 비대각 요소는 $KZ = MZ \Lambda$ 를 두번 미분함으로써 구할 수 있다. 최종적인 식은 다음과 같다.

$$C \Lambda' - \Lambda' C + 0.5 \Lambda'' = Z^T (K' - \lambda M') V - Z^T (M' Z + M V) \Lambda' + 0.5 Z^T (K'' - \lambda M'') Z = R \quad (21)$$

식(21)에서 Λ'' 는 대각 행렬이고, $C \Lambda' - \Lambda' C$ 는 대각요소가 0인 행렬이기 때문에 C 와 Λ'' 를 식(21)에서 구할 수 있다. $C = [c_{ij}]$, $R = [r_{ij}]$, $\Lambda' = \partial \Lambda / \partial p = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ 그리고 $\Lambda'' = \text{diag}(\lambda''_1, \dots, \lambda''_m)$ 라고 하면, 다음과 같이 r_{ij} 를 구할 수 있다.

$$r_{ij} = \begin{cases} c_{ij} (\lambda'_j - \lambda'_i), & \text{if } j \neq i \\ 0.5 \lambda''_i, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

그러므로, $\lambda'_j \neq \lambda'_i$ 이면 $c_{ij} = r_{ij} / (\lambda'_j - \lambda'_i)$ 이고 식(20)에서 $c_{ii} = 0.5 q_{ii}$ 이다. 중복된 모우드 미분값이 존재할 때, 즉 $\lambda'_j = \lambda'_i$ ($j \neq i$) 이면, 설계 변수가 변해도 원래의 m -차원 고유부공간은 m 개의 서로다른 고유

치로 변하지 않는다. 이 경우, 모우드 의 미분이 유일하지 않기 때문에 계수 행렬 C 가 제한 조건 $c_{ij} + c_{ji} = q_{ij} = q_{ji}$ 을 만족하면, $Z' = V + ZC$ 의 어떠한 행도 모우드의 미분으로써 유효하다. 이 방법은 정확한 해를 구하고, 중복된 고유치에 해당하는 모우드들의 미분을 구하기 위해 중복된 고유쌍만이 필요하다는 장점을 가지고 있다. 그렇지만, 알고리즘이 복잡해서 계산 시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라, K'' 와 M'' 의 계산이 필요하다는 점에서 제안 방법보다 비 효율적이다.

4. 제안 방법

4.1 서로 다른 고유치를 갖는 경우

제안 방법은 식(2)의 정규화 조건을 미분한 식을 제약 조건으로 하여 대칭인 계수 행렬을 만들고, 수치적으로 안정한 선형 대수 방정식을 풀어서 모우드의 미분을 구하는 방법이다. 식(8)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(K - \lambda_j M)\phi'_j - \lambda'_j M\phi_j = -(K' - \lambda_j M')\phi_j \quad (23)$$

식(2)과 같이 모우드를 정규화한 식을 미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\phi_j^T M\phi'_j + 0.5\phi_j^T M'\phi_j = 0 \quad (24)$$

식(23)과 식(24)를 합해서 계수 행렬이 대칭인 선형 대수 방정식 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M\phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi'_j \\ \lambda'_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda_j M')\phi_j \\ 0.5\phi_j^T M'\phi_j \end{Bmatrix} \quad (25)$$

식(25)에서 계수 행렬을 LDL^T 로 행렬 분해해서 ϕ'_j 과 λ'_j 을 간단히 구할 수 있다. 계수 행렬이 대칭인 것은 중요하다. 계수 행렬을 band나 sky-line형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 중복근을 갖는 경우의 알고리즘은 4.2절에 소개하였고, 수치적 안정성은 4.3절에서 증명하였다.

4.2 중복된 고유치를 갖는 경우

Dailey 방법에서와 같이 근접한 모우드 Z 를 구했다고 가정하고, 다음과 같은 정규화 조건을 갖은 고유치 문제를 고려하자.

$$KZ = MZ\Lambda, \quad Z^T MZ = I \quad (26), (27)$$

식(26)과 (27)을 설계변수에 대하여 미분하면,

$$(K - \lambda M)Z' - MZ\Lambda' = -(K' - \lambda M')Z, \quad Z^T MZ' + 0.5Z^T M'Z = 0 \quad (28), (29)$$

서로 다른 고유치를 갖는 경우와 마찬가지로 식(28)과 식(29)을 합해서 선형 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(K' - \lambda M')Z \\ 0.5Z^T M'Z \end{Bmatrix} \quad (30)$$

여기서 계수 행렬의 차수는 $(n+m) \times (n+m)$ 이다. 계수 행렬이 대칭이므로 LDL^T (L : lower triangular matrix, D : diagonal matrix) 행렬 분해법으로 Z' 와 Λ' 를 구할 수 있다.

Dailey 방법 뿐만 아니라 제안 방법도 모우드의 미분을 구할 때, 중복된 고유치에 해당하는 고유쌍만이 필요하고, 연산과정에서 대칭인 행렬을 사용한다. 이러한 특징은 자유도가 큰 실제 대형 구조물을 해석할 때 대단히 유효하다. 또한 제안 방법은 모우드의 미분을 계산하기 위하여 강성행렬과 질량행렬의 1차 미분만이 필요한 반면에, Dailey 방법은 2차 미분까지 필요하다. 이와 같이 제안 방법은 알고리즘이 대단히 간단하고 정확한 해를 구한다.

4.3 제안 방법의 수치적 안정성^[11]

고유치가 중복근을 갖는 일반적인 경우에 대하여 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하자. 수치적 안정성은 제안 방법의 최종 결과식에서 계수 행렬의 정칙성(nonsingularity)을 증명하면 된다. 증명의 간단화를 위하여 처음 m 개의 고유값이 중복되었다고 가정하고, 다음과 같은 행렬 K^* 를 정의하자.

$$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

여기서 Z 는 근접한 모드들로 이루어진 $n \times m$ 행렬이다. 행렬 K^* 가 정칙 행렬임을 증명하기 위하여 다음과 같은 고유치 문제를 도입한다.

$$K^*U = M^*UD \quad (32)$$

여기서,

$$M^* = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n+m}], \quad D = \text{diag}(\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_{n+m}) \quad (33), (34), (35)$$

I_m 은 m 차의 단위 행렬이고, U 와 D 는 $(n+m) \times (n+m)$ 행렬이다. 식(32)의 고유치 문제의 $n+m$ 개의 모드와 고유치는 다음과 같다.

$$\text{모우드 } u: \begin{cases} \begin{Bmatrix} z_i \\ e_i \end{Bmatrix} & i=1,2,\dots,m \\ \begin{Bmatrix} z_i \\ -e_i \end{Bmatrix} & i=m+1, m+2, \dots, n \\ \begin{Bmatrix} z_k \\ 0 \end{Bmatrix} & k=m+1, m+2, \dots, n \end{cases} \quad \text{고유치 } \gamma: \begin{cases} -1, \dots, -1 \quad (m \text{개}) \\ 1, \dots, 1 \quad (m \text{개}) \\ \lambda_k - \lambda \quad (n-m \text{개}), \end{cases} \quad (36), (37)$$

여기서 e_i 는 모든 요소가 0이고, i 번째 요소만이 1인 벡터이다. λ 는 중복된 고유 진동수이다.

식(32)의 determinant 관계를 고려하면,

$$\det[K^*] = \det[M^*] \det[D] = (-1)^m \det[M] \prod_{k=m+1}^n (\lambda_k - \lambda) \neq 0 \quad (38)$$

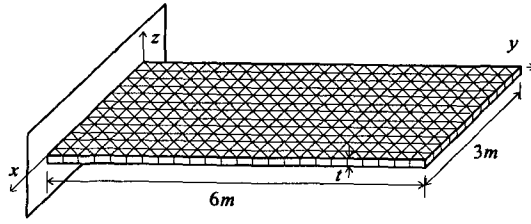
식(38)에서 $\det[M]$ 은 정의에 의해 0 (zero)이 아니므로 $\det[K^*] \neq 0$ 이다. 이상에서 제안 방법의 수치적 안정성을 증명하였다.

5. 수치 해석

제안 방법의 효율성을 증명하기 위하여 서로 다른 고유 진동수를 갖는 경우인 평판과, 중복된 고유 진동수를 갖는 경우인 외팔보를 예제로 택하여 수치 해석하였다. 해석에 사용한 컴퓨터는 계산 속도가 10 Mips이고, 0.9 MFlops인 IRIS4D20-S17이다.

5.1 평판

서로 다른 고유 진동수를 갖는 시스템의 예로 그림 1의 평판 구조물을 고려하자. 이 구조물은 576개의 삼각형 요소로 모델링하였다. 각 절점은 3자유도(z -변위, x -각변위, y -각변위)이기 때문에 한 요소는 9 자유도이다. 전체 자유도는 936이다. 탄성계수는 $10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ 이고, 밀도는 $7.85 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$ 이다. Poisson 비는 0.3이다. 설계 변수는 평판의 두께 t 이다. 고유진동수 10개를 표6에 표시하였다. 강성 행렬과 질량 행렬의 각각 t^3 과 t 에 비례한다. 그래서 이 경우 강성 행렬과 질량 행렬의 미분은 t 에 대하여 미분함으로써 간단히 구할 수 있다.



Number of nodes : 325
 Number of elements : 576
 Number of degrees of freedom : 936
 Young's modulus : $E = 10.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
 Mass density : $\rho = 5.88 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$

Figure 1 Cantilever plate with the thickness t as the design parameter

Table 6. The first ten natural frequencies of the cantilever plate.

Natural frequency (No.)	Natural frequency (Hz)	Eigenvalue
1	0.9263 E+00	0.338721 E+02
2	0.3964 E+01	0.620193 E+03
3	0.5760 E+01	0.130988 E+04
4	0.1290 E+02	0.656709 E+04
5	0.1613 E+02	0.102684 E+05
6	0.2454 E+02	0.237676 E+05
7	0.2476 E+02	0.242008 E+05
8	0.3160 E+02	0.394282 E+05
9	0.3357 E+02	0.444960 E+05
10	0.4074 E+02	0.655176 E+05

이 예제의 경우 해석 시간은 Rudisill-Chu의 방법, Nelson 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는 데 걸린 시간은 Rudisill-Chu의 방법은 648.5 sec, Nelson 방법의 경우 47.3 sec이고, 제안 방법은 46.8 sec이다. Nelson 방법은 $n-1$ 차의 선형 대수 방정식과 상수 c 를 계산하고, 제안 방법은 $n+1$ 차의 선형 대수 방정식을 계산하기 때문에 계산 시간은 비슷하다. 그러나 Rudisill-Chu의 방법은 비대칭 행렬 연산을 하기 때문에 계산 시간이 많이 걸린다. 이 결과를 표 7 과그림 2에 표시하였다.

Table 7. Central processor seconds required to calculate the first ten eigenpair derivatives.

Methods	Operations	CPU time
Nelson method	$\lambda_j = \phi_j^T (K' - \lambda_j M') \phi_j$	5.4
	G_j and f_j	6.1
	$v_j = \bar{G}_j^{-1} \bar{f}_j$	29.5
	$\phi_j' = v_j + c_j \phi_j$	6.3
	TOTAL	47.3
Rudisill -Chu method	$K_j^*_{R-C} = \begin{bmatrix} \phi_j^T & 0 \\ K - \lambda_j M & -M \phi_j \end{bmatrix}$	0.7
	$f_j^*_{R-C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(K' - \lambda_j M') \end{bmatrix} \phi_j$	6.7
	$\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = [K_j^*_{R-C}]^{-1} f_j^*_{R-C}$	391.6
	TOTAL	409.0
Proposed method	$K_j^* = \begin{bmatrix} K - \lambda_j M & -M \phi_j \\ -\phi_j^T M & 0 \end{bmatrix}$	7.3
	$f_j = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda_j M') \phi_j \\ 0.5 \phi_j^T M' \phi_j \end{bmatrix}$	8.4
	$\begin{Bmatrix} \phi_j' \\ \lambda_j' \end{Bmatrix} = [K_j^*]^{-1} f_j$	31.1
	TOTAL	46.8

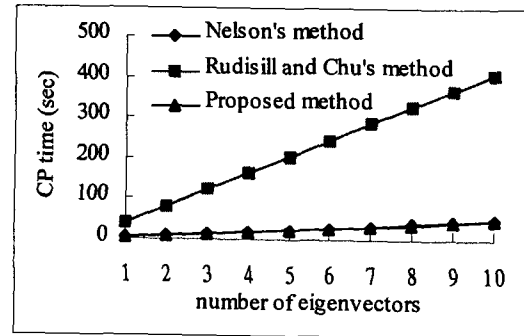
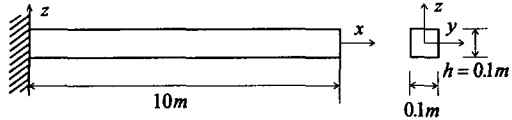


Figure 2. CP time required to calculate the eigenpair derivatives.

5.2 외팔보

중복된 고유치를 갖는 시스템의 예로 그림 3의 외팔보를 고려하자. 이 구조물은 200개의 보요소로 모델링하였다. 각 절점은 4자유도(y -변위, z -변위, y -각변위, z -각변위)이기 때문에 한 요소는 8 자유도이다. 전체 자유도는 800이다. 보의 폭과 높이는 모두 0.5 m이다. 설계 변수는 보의 높이 h 이다. 고유진동수 10개를 표 8에 표시하였다. 이 외팔보는 첫번째와 두번째, 세번째와 네번째의 순으로 중복된 고유치를 갖는다.



Number of nodes : 201
 Number of elements : 200
 Number of degrees of freedom : 800
 Young's modulus : $E = 2.10 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
 Mass density : $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

Figure 3 Cantilever beam with the height h as the design parameter

Table 8. The first ten natural frequencies of the cantilever beam.

Natural frequency (No.)	Natural frequency (Hz)	Eigenvalue
1	4.1722	0.6872184 E+03
2	4.1722	0.6872184 E+03
3	20.072	0.2683489 E+05
4	20.072	0.2683489 E+05
5	72.666	0.2084571 E+06
6	72.666	0.2084571 E+06
7	141.45	0.7898746 E+06
8	141.45	0.7898746 E+06
9	231.84	0.2121920 E+07
10	231.84	0.2121920 E+07

이 예제의 경우 해석 시간은 Dailey 방법과 비교하였다. 10개의 고유쌍 미분을 구하는 데 걸린 시간은 Dailey 방법의 경우 10.1 sec이고, 제안 방법은 7.2 sec이다. Dailey 방법에서 n 차의 선형 대수 방정식과 상수 행렬 C 를 계산하는 데, 상수 행렬을 구하기가 복잡하기 때문에 제안 방법에 비해서 계산 시간이 많이 소요된다. 제안 방법은 $n+2$ 차의 선형 대수 방정식을 계산한다. 강성 행렬과 질량 행렬의 반 띠틈폭(half bandwidth)이 시스템의 차수에 비하여 작기 때문에 계산 시간이 적게 소요되었다. 반 띠틈폭은 7이다. 이 결과를 표 9와 그림 4에 표시하였다. Dailey 방법은 K', M' 와 K'', M'' 을 필요로 하고 제안 방법은 K', M' 만을 필요로 하기 때문에 약 33%의 컴퓨터 메모리를 절약할 수 있다. 제안 방법의 해석시간을 1로 했을 때, Dailey 방법은 1.40 이다. 약 30%의 CPU 시간을 절약할 수 있다.

예제를 통하여 각각의 경우에 제안 방법의 효율성을 증명하였다. 제안 방법은 서로 다른 고유치 문제 뿐만 아니라 중복된 고유치문제에도 적용될 수 있음을 보였다.

6. 결 론

본 논문에서 고유치의 미분들을 구하는 수치적으로 안정한 수치 해석 기법을 개발하였다. 제안 방법은 최종 결론식의 계수 행렬이 대칭이고 선형 대수 방정식을 풀기 때문에 기존의 FEM 상용 코드에 무리없이 적용할 수 있다. 더구나, 대칭 행렬은 band형태나 sky-line 형태로 저장할 수 있기 때문에 컴퓨터 메모리나 계산 시간이 절약된다. 무엇보다도 중요한 것은 수치적 안정성을 증명하였고, 알고리즘이 대단히 간단하다는 것이다.

Table 9. Central processor seconds required to calculate the first ten eigenpair derivatives.

Methods	Operations	CPU time
Dailey method	Z (adjacent eigenvectors)	1.5
	\bar{G} and \bar{F}	2.3
	$V = \bar{G}^{-1} \bar{F}$	1.8
	$c_{ij} = \begin{cases} r_{ij}/(\lambda'_j - \lambda'_i) \\ 0.5 q_{ij} \end{cases}$	4.4
	$Z' = V + ZC$	0.1
	TOTAL	10.1
Proposed method	Z (adjacent eigenvectors)	1.5
	$K^* = \begin{bmatrix} K - \lambda M & -MZ \\ -Z^T M & 0 \end{bmatrix}$	1.3
	$P = \begin{bmatrix} -(K' - \lambda M')Z \\ 0.5 Z^T M' Z \end{bmatrix}$	1.8
	$\begin{bmatrix} Z' \\ \Lambda' \end{bmatrix} = K^{*-1} P$	2.6
	TOTAL	7.2

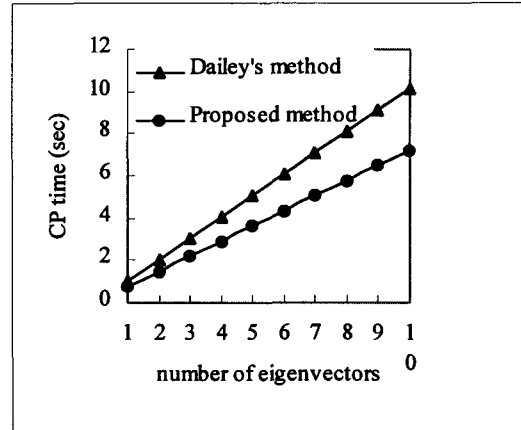


Figure 4. CP time required to calculate the eigenpair derivatives.

참 고 문 헌

1. Rudisill C. S. and Chu Y., 1975, "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors", *AIAA J.* Vol. 13, pp. 834~837.
2. Nelson R. B., 1976, "Simplified Calculations of Eigenvector Derivatives", *AIAA J.* Vol. 14, pp. 1201-1205.
3. Ojalvo I. U., 1988, "Efficient Computation of Modal Sensitivities for Systems with Repeated Frequencies", *AIAA J.* Vol. 26, pp. 361~366.
4. Mills-Curran W. C., 1988, "Calculation of Derivatives for Structures with Repeated Eigenvalues", *AIAA J.* Vol. 26, pp. 867~871.
5. Dailey R. L., 1989, "Eigenvector Derivatives with Repeated Eigenvalues". *AIAA J.* Vol. 27, pp. 486~491.
6. Fox R. L. and Kapoor M. P., 1968, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", *AIAA J.* Vol. 6, pp. 2426~2429.
7. Wang B. P., 1985, "Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivatives in Structural Dynamics", *AIAA J.* Vol. 29 pp. 1018~1020.
8. Sutter T. R., Camarda C. J., Walsh J. L. and Adelman H. M., 1988, "Comparison of Several Methods for Calculating Vibration Mode Shape Derivatives", *AIAA J.* Vol. 26, pp. 1506~1511.
9. Andrew A. L., 1978, "Convergence of an Iterative Method for Derivatives of Eigensystems", *J. of Comput. Phys.* Vol. 26, pp. 107~112.
10. Lee I. W. and Jung G. H., "Numerical Method for Sensitivity Analysis of Eigensystems with Nonrepeated and Repeated Eigenvalues", *Journal of Sound and Vibration* (to be published).
11. Lee I. W. and Robinson A. R., 1979, "Solution Techniques for Large Eigenvalue Problems in Structural Dynamics", *Structural Research Series No. 462*, University of Illinois at Urbana Champaign.