

회전자유도가 있는 입체요소의 등가절점하중 Equivalent Nodal Forces of The Solid Element with Rotational Degrees of Freedom

최 창근*
Choi, Chang-Koon

정 근영**
Chung, Keun-Young

ABSTRACT

The variable-node solid element with rotational degrees of freedom has been developed for efficient connection of transition zones and for connection of different types of elements with rotational degrees of freedom. In applying this new element to engineering problems, it is necessary to find the relations between tractions and equivalent nodal forces. In this case, the equivalent forces in solid element with rotational degrees of freedom and rotational forces are a bit different from that of conventional solid elements. Some typical examples are presented.

1. 서론

3차원 연속체를 해석함에 있어서 기하학적인 특성 때문에 유한요소의 모델링은 매우 복잡하며, 정확한 해를 얻기 위한 요소의 수도 급속히 증가한다. 이러한 특성 때문에 구조해석의 간편성과 해석의 효율을 위해 3차원 보요소, 쉘요소 등의 구조용 요소들이 개발되어 널리 사용되고 있다. 하지만 국부적으로 특이한 형상을 지니는 부분의 해석이나, 보다 엄밀한 해석을 필요로 하는 문제에 있어서 입체요소(solid element)를 이용한 해석의 필요성은 여전히 존재한다. 따라서 적은 수의 절점 및 요소를 가지고 보다 정확한 해석을 수행하기 위한 입체요소의 개발은 매우 중요하다고 할 수 있다. 이러한 목적에 따라 본 연구에서는 회전자유도(rotational degrees of freedom)를 3차원 입체요소에 도입하여 회전 자유도가 있는 다른 구조용 요소와의 연결에 있어서 유리하게 하였으며, 조악한 요소망과 조밀한 요소망 사이에 존재하는 변이지역(transition zone)의 연결에 유용하게 쓰일 수 있는 변절점(variable node) 고체요소를 개발하였다.

개발된 회전자유도를 가지는 입체요소를 실제적인 문제에 적용하기 위해서는 주어진 하중조건을 정확히 등가의 절점하중으로 바꿀 필요성이 있다. 직선변위에 해당하는 자유도만 있는 통상의 입체요소의 경우는 등가의 절점하중이 직선방향의 힘으로만 표현되지만, 회전 자유도가 있는 입체요소의 경우는 직선방향의 힘 외에도 회전자유도에 해당하는 힘이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 요소의 성능시험 및 실제 문제에서의 적용을 위해, 회전자유도가 있는 고체요소의 등가하중에 대해 연구하고, 이를 통해 개발된 요소들의 성능시험을 하였다.

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

2. 변분정식화법

본 연구에서 개발된 회전자유도를 가지는 변절점 요소의 경우, 회전자유도를 도입하기 위한 방법으로 Reissner^[1], Hughes와 Brezzi^[2]등에 의해 제안 및 보완된 변분원리(variational principle)가 사용되었다. 이 변분법은 회전장(rotation field)을 독립적으로 요소내에서 보간하며, 회전장과 반대칭 변위 구배와의 관계를 범함수(functional)에 도입하는 과정에서 반대칭 응력성분이 Lagrange multiplier로 나타난다. 본 연구에서는 이들 변분법중에서 혼합정식화법을 채택하여 사용하고자 한다. 요소를 정식화 하기위해 응력장 σ 는 대칭이 아닌 것으로 가정하며, 변위장 u 외에도 반대칭 텐서(skew-symmetric tensor)인 회전변위장 ψ 를 추가적으로 사용한다.

체력(body force) f 외에도 표면 장력(surface traction) t 가 작용하는경우의 범함수는 외력에 의한 에너지를 범함수에 포함시킴으로써 쉽게 고려된다. 혼합법에 의한 정식화법을 예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{\gamma}^*(u, \psi, skew\sigma) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega'} (symm \nabla u) \cdot C \cdot (symm \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega'} skew\sigma^T (skew \nabla u - \psi) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \int_{\Omega'} |skew\sigma|^2 d\Omega - \int_{\Omega'} u \cdot f d\Omega - \int_{\Gamma'} u \cdot t d\Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

3. 변절점요소 of 보간 및 변위장의 미분

식(1)에 나오는 변수의 값들은 요소내의 임의의 점들에 대하여 정의되어있다. 하지만 요소의 강성행렬 및 하중벡터를 구성하기 위해서는 변수들을 요소를 이루고 있는 절점에서의 값과의 상관관계로 표현할 필요성이있다. 요소의 전체 좌표계에서의 좌표 x 는 n 절점으로 이루어지는 요소의 경우 아래식에 의해 보간하게 된다.

$$x^h = \sum_{I=1}^n N_I^*(r, s, t) x_I^e = \hat{N}^e x^e \quad (2)$$

여기서 x^h 는 자연좌표계의 (r, s, t) 에 대응하는 물리적인 좌표계에서의 좌표의 보간값이고, N_I^* 는 등매개형상함수^[3]이다. x^e 는 요소의 절점 좌표 벡터이다.

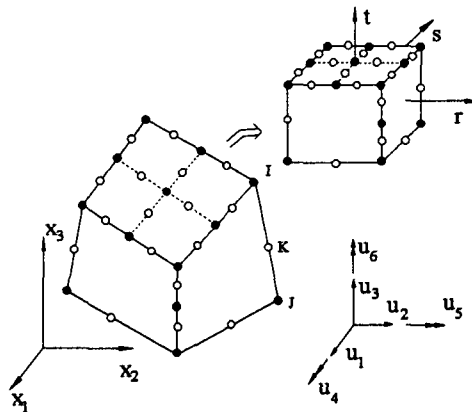


그림 1. 회전자유도를 가지는 변절점 입체요소 of 예

변위장의 보간은 그림 1과 같은 모요소(parent element)로 부터 유도된다. 이 변위장은 특수한 제층 형상함수^[3,10]와 등매개형상함수^[4]를 이용하여 보간된다.

$$\begin{pmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ u_3^h \end{pmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^n N_I^e(r, s, t) \mathbf{u}_I^e + \sum_{K=n+1}^{n+m} N_K^e(r, s, t) \Delta \mathbf{u}_K^e \quad (3)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u}_K^e$ 는 K점에서의 계층변위(hierarchical displacement), N_K^e 는 인근의 절점 I와 J를 잇는 선을 따라 포물선의 형상을 가지는 특수한 계층함수이며 점 K는 특수계층함수가 1의 값을 갖는 점의 위치이며, m 은 이들 특수 계층형상함수의 갯수이다. 이러한 계층변위들 중 절점과 절점을 잇는 선에 수직인 변위 성분들은 절점회전자유도 ψ_I^e 를 도입함으로써 제거할 수 있다.

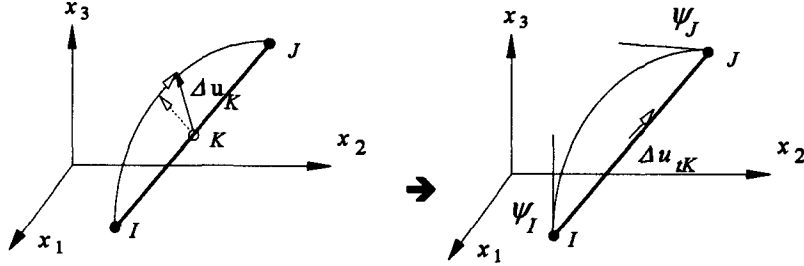


그림 2. 계층변위의 회전변위로의 변환

특수 계층변위는 변환행렬 T_U 을 도입함으로써 체계적으로 구성된다. 요소의 절점 I와 J를 잇는 선의 중앙에 있는 K점에서의 직선변위를 회전변위로 변환하는 식은 다음과 같다.

$$\Delta \mathbf{u}_K^e = T_U (\psi_I^e - \psi_J^e) + l_U \Delta \mathbf{u}_K^e \quad (4)$$

여기서

$$T_U = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & \Delta x_{3U} & -\Delta x_{2U} \\ -\Delta x_{3U} & 0 & \Delta x_{1U} \\ \Delta x_{2U} & -\Delta x_{1U} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{x}_U = \mathbf{x}_J^e - \mathbf{x}_I^e \quad (5)$$

$$l_U = \frac{1}{l_U} \Delta \mathbf{x}_U \quad (6)$$

여기서 l_U 는 절점 I와 J를 잇는 선의 길이이다. 그리고 (4)식의 우변 첫째 항은 점 K에서의 모서리 선에 수직인 변위성분을 절점회전자유도로 표현한 것이며, 둘째항은 절점 I와 J를 잇는 선의 방향으로의 비적합변위로 설명된다. 최종적으로 변위장의 보간식은 절점의 직선변위 \mathbf{u}^e 와 회전변위 ψ^e 에 의해 보간된다. 여기서 만약 선의 접선방향의 변위를 인근 절점 I와 J에서의 직선변위의 평균값으로 가정한다면 접선방향의 비적합 변위는 영이 되어 소거된다. 이러한 사실은 두 절점간의 변위장을 선형으로 가정하는 것과 일치한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^n N_I^e(r, s, t) \mathbf{u}_I^e + \sum_{K=n+1}^{n+m} N_K^e(r, s, t) T_U (\psi_I^e - \psi_J^e) \\ &= \sum_{I=1}^n \left[N_I^e I \left| \sum_K N_K^e T_U \right. \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I^e \\ \psi_I^e \end{Bmatrix} = \tilde{N}^e \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (7)$$

요소내의 임의의 점에서의 회전장은 앞서 언급한 변위장과는 독립적으로 보간되는데, 이때에는 등매개 형상함수를 이용하여 절점 회전변위로 부터 보간한다. 이 회전장과 변위장과의 관계는 범함수에서 정의되어 있다.

$$\begin{pmatrix} \psi_1^h \\ \psi_2^h \\ \psi_3^h \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}^h = \sum_{I=1}^n N_I^e(r, s, t) \boldsymbol{\psi}_I^e = \hat{N}^e \boldsymbol{\psi}^e \quad (8)$$

혼합정식화법에서 사용되는 반대칭 응력장의 보간은 변위장이나 회전장과는 독립적으로 보간되며 회전장 및 변위장과의 관계는 변분법에 의해 규정된다. 반대칭 응력장의 보간은 전체좌표계를 통하여 선형 또는 2차 함수로써 가정이 가능하다^{9,10}.

$$skew \sigma^h = S^* \sigma_0^* \quad (9)$$

행렬형태로 표현한 변형도 벡터는 점선방향의 비적합변위를 고려하지 않을 때 다음과 같이 정의된다.

$$symm \nabla u^* = \sum_{I=1}^n (B_I^* u_I^* + G_I^* \psi_I^*) = \bar{B}^* a^* \quad (10)$$

여기서 u_I^* , ψ_I^* 는 각각 I 점변위와, 점회전 변위이다. 점 I 의 형상함수에 의한 변형률-변위 관계행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$B_I^{*T} = \begin{bmatrix} N_{I,x_1}^* & & N_{I,x_2}^* & N_{I,x_3}^* \\ & N_{I,x_2}^* & & \\ & & N_{I,x_3}^* & \\ & & & N_{I,x_1}^* \end{bmatrix} \quad I=1,2,\dots,n \quad (11)$$

$$G_I^* = \sum_{edge} B_k^* T_{Lk} \quad (12)$$

위의 식에 나타난 관계행렬 G_I^* 와 R_k^* 는 통상적이지 않은 형상함수의 사용으로 인해 참값에 수렴하지 못하게할 위험성을 가진다. 따라서 부적절한 성분을 제거하기 위해 수정행렬(correction matrix)를 통해 수정된다. 이러한 수정은 잘 알려진 B-bar 방법⁵과 유사하다.

$$\bar{G}^* = G^* - \frac{1}{\Omega^*} \int_{\Omega^*} G^* d\Omega \quad (13)$$

$$\bar{R}^* = R^* - \frac{1}{\Omega^*} \int_{\Omega^*} R^* d\Omega \quad (14)$$

회전장을 표현하기 위한 반대칭 변위 경사의 경우는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} skew \nabla u^h - \psi^h &= \sum_{I=1}^n (A_I^* u_I^* + F_I^* \psi_I^*) - \sum_{I=1}^n N_I^* \psi_I^* \\ &= \sum_{I=1}^n (A_I^* u_I^* + \hat{F}_I^* \psi_I^*) \\ &= \bar{A}^* a^* \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$A_I^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -N_{I,x_3}^* & N_{I,x_2}^* \\ N_{I,x_3}^* & 0 & -N_{I,x_1}^* \\ -N_{I,x_2}^* & N_{I,x_1}^* & 0 \end{bmatrix} \quad I=1,2,\dots,n \quad (16)$$

$$F_I^* = \sum_{edge} A_k^* T_{Lk} \quad (17)$$

4. 강성행렬 및 등가하중

식 (1)에 정의된 범함수의 여러 보간을 식(7,9,10,15)을 이용해 보간하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_7^* = & \frac{1}{2} \mathbf{a}^{*T} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^{*T} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}^* d\Omega \mathbf{a}^* + \sigma_0^{*T} \int_{\Omega} \mathbf{S}^{*T} \tilde{\mathbf{A}}^* d\Omega \mathbf{a}^* - \frac{1}{2} \sigma_0^{*T} \gamma^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{S}^{*T} \mathbf{S}^* d\Omega \sigma_0^* \\ & - \mathbf{a}^{*T} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \mathbf{f}^h d\Omega - \mathbf{a}^{*T} \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \mathbf{t}^h d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

범함수 식 (18)의 변분을 취하면 다음과 같은 요소 강성행렬 및 등가하중을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{H}^* \\ \mathbf{H}^{*T} & -\mathbf{M}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^* \\ \sigma_0^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{a}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\psi}^* \\ \Delta \mathbf{u}^* \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서

$$\mathbf{K}^* = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^{*T} \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}}^* d\Omega \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^{*T} = \int_{\Omega} \mathbf{S}^{*T} \tilde{\mathbf{A}}^* d\Omega \quad (21)$$

$$\mathbf{M}^* = \gamma^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{S}^{*T} \mathbf{S}^* d\Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{q}^* = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \mathbf{f}^h d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \mathbf{t}^h d\Gamma \quad (23)$$

식 (19)에 나타난 $\Delta \mathbf{u}^*$ 는 bubble모드와 3방향의 비적합 변위형에 의한 내부 변위이다. 만약 체력 및 표면장력을 좌표를 보간하는 형상함수와 동일한 형상함수를 이용해서 보간한다면, 식 (23)에 주어진 등가 하중벡터는 다음과 같이 수정된 형태로 된다.

$$\mathbf{q}^* = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \hat{\mathbf{N}}^* d\Omega \mathbf{t}^* + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{N}}^{*T} \hat{\mathbf{N}}^* d\Gamma \mathbf{t}^* \quad (24)$$

식(19)에서 반대칭 응력 부분은 요소별로 독립적으로 보간되므로, 정적응축기법을 통하여 반대칭 응력항을 소거할수 있다. 비적합변위에 해당하는 자유도 $\Delta \mathbf{u}$ 도 정적응축기법에 의해 소거되므로, 최종적인 요소의 자유도는 절점 직선변위 \mathbf{u} 와 절점회전변위 $\boldsymbol{\psi}$ 만 남게된다.

위의 식(20)과 (21)에 있는 행렬 \mathbf{K}^* 와 \mathbf{H}^* 등은 14-절점적분 방법^[6]에 의해 계산되었으며, 이 적분방법에 의해 계산시간에 있어 이득을 얻는 한편 부적절한 영에너지 모드는 발생하지 않았다. 또한 변절점 요소에서 사용한 불연속 함수를 적분하기 위해 Gupta의 적분 개념^[7]에 의하여 14-절점 적분법을 적용하였다.

5. 수치검증

5.1 캔틸레버 보

이 문제는 변절점 입체요소가 요소 체논의 형성시에 발생하는 변이지역의 연결이나 적용적 체논화법에 효과적으로 사용되어질 수 있는가의 여부를 검증하기 위한 예제이다^[8]. 해석에 있어서 자유단의 절점하중들은 상응하는 휨모멘트와 전단력을 하중이 작용하는 면에서의 표면력으로 변환한 값을 바탕으로 계산하였다. 캔틸레버 보의 끝단 A지점의 수직변위를 보 이론 및 다른 변절점 요소의 결과와 비교하였다. 이때 고정단의 모든 회전자유도는 구속하였다.

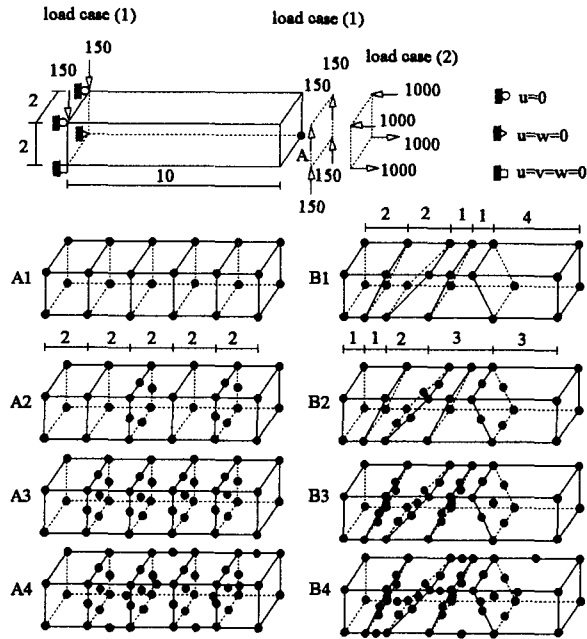


그림 3. 변절점 입체요소망

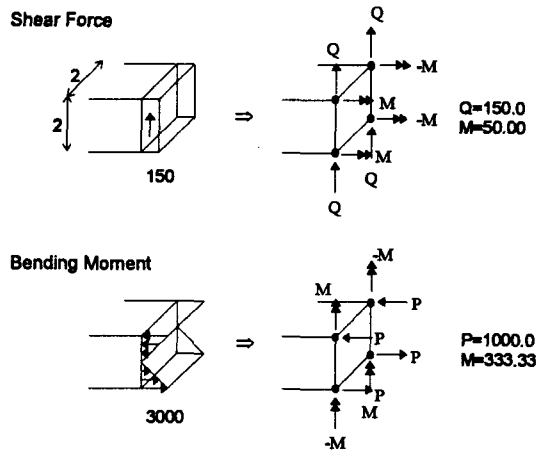


그림 4. 자유단에서의 동가의 절점하중

표1. 규칙적인 요소망의 경우에 있어서의 끝단 수직변위

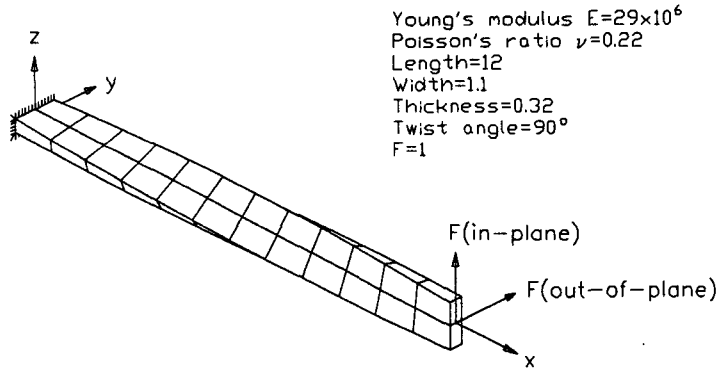
Mesh	Load Case 1				Load Case 2			
	A1	A2	A3	A4	A1	A2	A3	A4
C-V1	68.45	70.10	72.33	78.48	66.67	68.86	70.83	77.86
NC-V1	101.40	100.96	101.28	100.27	100.00	99.43	99.97	98.07
NC-V2	101.40	100.67	100.08	98.99	100.00	99.09	98.51	97.00
present	102.37	102.19	101.33	100.74	99.39	99.24	98.96	97.26
Theory	102.60	102.60	102.60	102.60	100.00	100.00	100.00	100.00

표 2. 불규칙한 요소망의 경우에 있어서의 끝단 수직변위

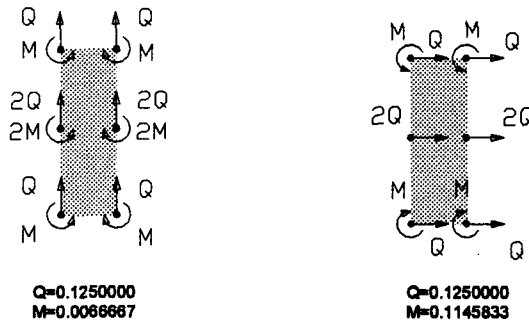
Mesh	Load Case 1				Load Case 2			
	B1	B2	B3	B4	B1	B2	B3	B4
C-V1	49.33	56.38	64.61	79.49	44.38	51.59	58.42	78.60
NC-V1	89.89	86.66	89.57	97.40	87.45	83.46	86.03	95.99
NC-V2	89.89	83.90	78.84	82.66	87.45	80.50	75.85	82.09
present	91.95	98.47	94.95	97.69	89.04	95.69	92.04	94.87
Theory	102.625	102.625	102.625	102.625	100.00	100.00	100.00	100.00

5.2 비틀어진 캔틸레버(Twisted Cantilever)보

이 문제는 직사각형 단면을 갖는 캔틸레버 보를 길이 방향에 대해 90°만큼 비틀어 놓은 것으로 요소의 와핑 찌그러짐 (warping distortion)문제에 대한 적용성을 검증하기 위한 예제이다. 이 보에 작용하는 하중은 평면내 하중과 평면외 하중으로 나누어 해석에 이용된다. 한쪽 단면은 고정된 지지조건을 갖고 다른쪽 단면은 자유단이다. 이 문제에 대한 이론치는 MacNeal과 Harder[11]에서 인용된것을 사용한다. 평면내 하중이 작용하는 경우의 이론치는 하중작용 방향의 직선변위가 0.5424×10^{-2} 이며, 평면외 하중이 작용하는 경우는 하중 작용방향의 직선변위가 0.1754×10^{-2} 이다. 표 3은 각 하중별로 이론치에 대해 정규화된 요소의 변위를 나타내고 있다. 회전자유도를 가진 입체요소는 두방향의 하중에 대해서 양호한 결과를 보여주고 있다.



(a) 비틀린 캔틸레버 보의 모델과 재료특성



(b) 평면내 하중에 대한 등가 절점하중 (c) 평면외 하중에 대한 등가절점하중

그림 5. 비틀린 캔틸레버 보 및 하중

표 3. 비틀린 캔틸레버 보의 끝단에서의 변위비교(normalized value)

하중 방향	HEXA(8) ^[14]	HEX20 ^[14]	HEX20(R) ^[14]	Present
평면내 재하	0.983	0.991	0.993	0.100
평면외 재하	0.977	0.995	0.999	0.993

6. 결론

본 연구에서는 회전자유도를 가지는 입체요소의 표면력에 의한 등가하중의 올바른 산정을 위해 변분법으로 부터 시작하여 그 유도 과정을 살펴보았다. 그리고 몇가지 예제를 통하여 등가하중을 산정하여, 실제 문제에 적용하였다. 수치실험 결과 종전의 하중 재하면의 회전 자유도를 구속하고 직선방향의 힘만 가하는 것에 비하여 개선된 해의 값을 보였다. 올바른 등가하중을 사용하지 않은 채 회전변위에 해당하는 자유도가 구속되지 않는다면, 절점하중이 작용하는 자유도의 변위가 과장되는 결과를 보인다. 따라서 신뢰성 있는해를 얻기위해 정확한 하중의 입력은 매우 중요하다고 할 수 있다.

참고 문헌

- [1] E. Reissner, "A note on variational theorems in elasticity", *Int. j. solids and Structures*, 1, 93~95 (1965)
- [2] T. J. R. Hughes and F. Brezzi, "On drilling degrees of freedom", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 105~121(1989)
- [3] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson, "Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields", *Int. j. numer methods eng.*, 31, 1393-1414(1991)
- [4] C. K. Choi and N. H. Lee, "Three dimensional solid elements for adaptive mesh gradation", *Structural Engineering and Mechanics*, 1, 61-74(1993)
- [5] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson, "A modified method of incompatible modes", *Communications in applied Numerical Methods*, 7, 187~194(1991)
- [6] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1980
- [7] A. K. Gupta, "A finite element for transition from a fine to a coarse grid", *Int. j. Numer. Meth. Eng.*, 12(1), 35~45(1978)
- [8] C. K. Choi and W. H. Lee, "Transition membrane elements with drilling freedom for local mesh refinements", *Structural Engineering and Mechanics*, 3(1), 75-89(1995)
- [9] C. K. Choi and K. Y. Chung, "Three dimensional variable node solid element with drilling degrees of freedom", *Proceedings of 6th International conference on Computing in Civil And Building Eng.*, Berlin, Germany, 12-15 July, 1, 521-528(1995)
- [10] C.K.Choi and K.Y.Chung, "3D variable node solid elements with drilling degrees of freedom", *Proceedings of COSEIK Symposium*, Spring, 8(1), 9-16 (1995)
- [11] R.H. MacNeal and R.L. Harder, "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.1,3-20 (1985)