

전단 변형을 고려한 보강판의 p -Version 유한요소 해석

p -Version Finite Element Analysis of Stiffened Plates Including Transverse Shear Deformation

홍종현* 우광성** 신영식***
HONG, Chong Hyun WOO, Kwang Sung SHIN, Young Shik

ABSTRACT

A general stiffener element which includes transverse shear deformation(TSD) is formulated using the p -version of finite element method. Hierarchic C^0 -shape functions, derived from Integrals of Legendre polynomials, are used to define the assembled stiffness matrix of the stiffener and plate on the basis of 5 D.O.F. displacement fields. The stiffness matrix for the stiffener with respect to the local reference frame is transformed to the plate reference system by applying the appropriate transformation matrices in order to insure compatibility of displacements at the junction of the stiffener and plate. The transformation matrices which account for the orientation and the eccentricity effects of the stiffener with respect to the plate reference axes are used to find local behavior at the junction of the stiffener and the relative contributions of the plate and stiffener to the strength of the composite system. The results obtained by the p -version of the finite element method are compared with the results in literatures, especially those by the h -version software, MICROFEAP-II.

1. 서론

보강판은 구조적 효율성이 뛰어나므로 선박, 항공기, 자동차 산업 뿐만 아니라 토목·건축 분야에서 널리 사용되고 있는 구조부재중의 하나이다. 그러나, 보강재와 평판사이의 접속부에는 기하학적 응력특이(geometric stress singularity)가 발생되므로 구조해석의 어려움을 갖고 있다. 따라서, 임의의 기하형상과 경계조건 및 하중조건을 갖는 보강판의 일반적 이론해를 구하는 것은 불가능하기 때문에 근사해법인 수치해법이 모색되어 왔다. 첫번째 방법은 등가 직교이방성 평판(equivalent orthotropic plate)으로 모델링하는 기법으로 보강재의 휨과 축방향의 강성(rigidity)을 등가의 두께를 갖는 평판으로 환산하는 방법이다. 두번째 방법은 등가 격자해석(equivalent gridwork)으로 주로 보강재가 평판에 비해 하중분담이 큰 경우에 적용되며 플랜지의 유효폭에 따라 분할된 평판의 강성을 보강재에 더해 주면서 2차원 격자해석을 수행하는 방법이다. 세번째 방법은 보강재를 보로 가정하고 평판은 면내력만 작용하는 평면(membrane)으로 모델링하는 방법으로 이산-연속법(discrete-continuous approach)이라 한다. 여기서 제안된 방법들은 합성구조로 된 보강판에서 보강재가 보강판 전체에 미치는 상대적 영향을 파악하기가 어려울 뿐만 아니라 보강재와 평판 접속부(junction)에서 전단지체(shear lag)나 응력집중과 같은 국부적 거동(local behavior)을 고려하기에 어려움이 있다.

* 영남대학교 토목공학과 석사과정

** 영남대학교 토목공학과 조교수

*** 영남대학교 토목공학과 교수

이러한 해석 기법들의 문제점으로 인하여 실제구조물을 설계할 때에 보강판에서 판의 두께가 비경제적으로 두꺼워진다는지 또는 판과 보강재의 접합부에서 응력집중현상으로 인하여 구조물의 파괴가 일어날 수 있으므로 보강판의 문제에 보다 정확한 해석기법이 요구되고 있는 실정이다.

유한요소법은 이러한 문제점을 극복하여 보다 정확한 결과를 산출할 수 있는 효율적인 방법으로 인식되어 왔으며 많은 연구자들에 의해 다양한 형태의 보강판해석과 이를 위한 요소개발이 수행되어 왔다.

종래의 h-version 유한요소법에 근거한 유한요소해석은 보강재의 배치간격이 비교적 클 경우에는 보강재는 보요소를, 판은 쉘 또는 평판요소를 사용하고 있으나 이러한 해석방법도 변위값은 어느 정도 신뢰성을 갖지만 보와 슬래브의 접합부분에서 응력특이(stress singularity) 현상을 규명하는 데에는 한계를 보여주고 있다. 그러므로 본 연구에서는 계층적 성질을 갖는 적분형 르장드르 다항식(Legendre polynomial)을 형상함수로 사용한 p-version 유한요소법이 모색되었다. 기존의 문헌 연구를 통하여 새로이 제안되는 p-version 유한요소법은 응력특이가 발생하는 구조문제에 아주 적합한 모델로 제안되고 있다. 즉, Mehta는 모서리부분에 응력 특이가 발생하는 문제의 경우 p-version해석이 h-version해석에 비해 수렴속도측면에서 2배 가량 빠르다는 것을 입증했고, Babuska도 p-version유한요소법의 수렴속도가 빠르다는 것을 여러 논문을 통해 입증했다. 따라서, 본 연구에서는 5자유도를 갖는 보강재요소의 유도와 이를 사용하여 보강재와 평판의 접합부에서의 국부적인 거동분석을 수행하며 아울러, 전단변형효과를 고려하였을 경우 보강판에 미치는 효과를 파악하고자 한다. 보강재와 평판의 유한요소 정식화과정은 C^0 -연속조건에 근거를 두었으며 뒤틀림(warping stress)의 효과는 무시하였다. 한편, 종래의 h-version 유한요소법과의 비교를 위해 A.I.T.대의 Worsak이 개발한 MICROFEAP-II 소프트웨어를 사용하였다.

2. P-version유한요소모델

2.1 형상함수

변위의 형상함수 구성에 있어 적분형 르장드르 다항식에 근거를 둔 C^0 -계층요소가 사용되었다. 종래의 라그랑제(Lagrange type) 다항식은 비계층적 성질(non-hierarchic nature)을 갖게 되어 형상함수의 차수 p가 증가할 때마다 새로운 형태의 형상함수가 정의되어야 하는 반면, 르장드르(Legendre type) 다항식은 계층적 성질을 갖게 되므로 전단계의 형상함수에 현단계의 형상함수를 추가하는 방법으로 구성된다. 한편, 요소의 변위장을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^i &= \sum_{j=1}^{P+1} N_j(\xi) \hat{\phi}_j^i \\ &= [N^T] \{ \hat{\phi}^i \} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $[N^T]$ = 적분형 르장드르 함수에 의한 형상함수

$\{ \hat{\phi}^i \}$ = 절점변위

P = 형상함수의 차수

또한, 르장드르 다항식 $P_n(x)$ 는 Rodrigue의 식을 사용하여 일반적인 식으로 나타내면 식(2)와 같이 정의된다.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

그러나, 1차원 보의 강성도행렬을 일반적으로 식 (3)과 같이 정의된다고 가정하면 N_i, N_j 는 르장드르 다항식 $P_n(x)$ 를 적분한 형태를 취해야만 식 (3)의 적분기호안에서 보는 바와 같이 1차 미분

되어 본래의 르장드르함수가 되며 아울러, 르장드르 다항식의 고유성질인 직교성(orthogonality)을 유지할 수 있게 된다.

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \quad (3)$$

따라서, 형상함수가 1차($k=1,2$) 일 때는 절점좌표를 갖는 모서리절점(corner node)이므로 라그랑제형이나 르장드르형의 선형보간함수를 그대로 사용하고 형상함수가 2차이상일 경우는 절점좌표가 없는 절점(nodeless node)가 추가되는 주변절점(side node)에 대해서는 적분형 르장드르 함수가 사용되며 식 (4)와 같이 정의된다.

$$N_k = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{k-1}(t) dt, \quad k > 2 \quad (4)$$

2.2 강성도행렬의 유도

2.2.1 국부좌표계에서의 강성도 행렬

범함수로 정의되는 변형에너지는 식(5)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\tilde{D}]^T [\tilde{S}] [\tilde{D}] d\xi \quad (5)$$

여기서, 변형률매트릭스(strain matrix)와 탄성매트릭스(elasticity matrix)는 아래와 같이 유도된다.

$$[\tilde{D}] = [\Phi^1_{,\xi}, \Phi^2_{,\xi\xi}, \Phi^3_{,\xi}, \Phi^4_{,\xi}, \Phi^5, \Phi^5_{,\xi}]^T \quad (6)$$

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-4EI_{yz}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda GA}{L} & 0 & \lambda GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2GI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda GA & 0 & \frac{L\lambda GA}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-4EI_{yz}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식 (1)을 이용해서, 변형률 매트릭스 [\tilde{D}] 을 형상함수와 절점변위값으로 표시하면

$$[\tilde{D}] = [B] [\tilde{\phi}]^T \quad (8)$$

여기서, [$\tilde{\phi}$] = [[$\tilde{\phi}^1$], [$\tilde{\phi}^2$], [$\tilde{\phi}^3$], [$\tilde{\phi}^4$], [$\tilde{\phi}^5$]]

$$[B] = \begin{bmatrix} N^1_{,\xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^2_{,\xi\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^3_{,\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N^4_{,\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^5_{,\xi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식(6), (7)을 식(5)에 대입 후 식(10)과 같은 요소 강성도매트릭스를 구할 수 있다.

$$[\widetilde{K}_S] = \begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{11}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\widetilde{K}_{22}] & 0 & 0 & [\widetilde{K}_{25}] \\ 0 & 0 & [\widetilde{K}_{33}] & 0 & [\widetilde{K}_{35}] \\ 0 & 0 & 0 & [\widetilde{K}_{44}] & 0 \\ 0 & [\widetilde{K}_{25}] & [\widetilde{K}_{35}] & 0 & [\widetilde{K}_{55}] \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.2.2 전체좌표계에서의 강성도 매트릭스

보강재와 평판의 접속부에서의 변위의 적합조건을 만족하기 위해서 보강재의 변위장을 평판의 중립면에 대한 변위장으로 나타내 주어야 한다. 보강재와 평판의 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\delta]_{st} &= [u, v, w, \beta_x, \beta_y]_{st}^T \\ [\delta]_{pl} &= [u, v, w, \beta_x, \beta_y]_{pl}^T \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, st는 보강재를 pl은 평판을 나타내며 보강재와 평판을 국부좌표계에서 전체좌표계로 좌표변환매트릭스 [T]를 사용하여 정의하면 다음과 같다.

$$[\delta]_{st} = [T] [\delta]_{pl} \quad (12)$$

$$[T] = [T_1] [T_2] \quad (13)$$

여기서, [T₁], [T₂]는 보강재의 위치와 평판의 기준축이 이루는 각과 보강재와 평판의 중립축 거리인 편심거리에 따른 좌표변환매트릭스로 C와 S는 보강재의 방향에 따른 국소 좌표축과 평판의 기준축이 이루는 각에 대한 여현(cosine)과 정현(sine)값을 말하며, e_y, e_z = 기준 좌표축 중 심에서 보강재와 평판의 접속부까지 거리이며, \bar{e}_y , \bar{e}_z = 전단중심에서 보강재와 평판의 접속 부까지 거리를 나타낸다.

$$[T_1] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -(e_z - \bar{e}_z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (e_y - \bar{e}_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

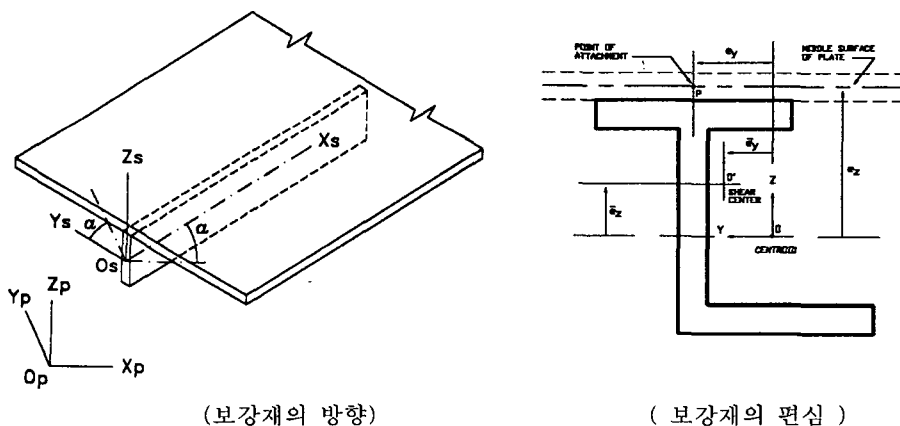


그림 1 보강재 방향(orientation)과 편심(eccentricity)에 따른 좌표 보정

보강재를 평판의 기준좌표계로 좌표변환하는 변환메트릭스는 각각의 절점변수의 좌표변환과 관계가 있다. 이 관계를 이용하면

$$[\phi]_{st} = [T][\phi]_{pl} \quad (15)$$

그러므로, 전체좌표계에 대한 보강재의 강성도메트릭스는 다음과 같다.

$$[K]_{pl} = [T]^T [K]_{st} [T] \quad (16)$$

3. 수치해석 예제

해석모델은 McBean의 보강판으로 불리는 예제로 인용된 참고문헌에서 해석된 기본 예제를 택하였는데 4변이 모두 단순지지된 평판으로 등분포하중(10psi)과 평판중앙에 집중하중(1kip)을 받는 경우이며, 판과 보강재는 같은 재료로서 탄성계수는 30×10^6 psi, 프아송비는 0.3이다. 보강재의 결합형태에 따라 대칭보강된 경우와 비대칭보강된 경우 두가지를 예로 들었고, 결과치의 검증을 위해 이론해와 기존 연구자들이 수행한 수치해석 근사해가 사용되었다. 이론해는 보강판의 지배방정식을 유도한 후 미분방정식의 해를 구하기 위해 단일 Fourier급수를 사용한 OMS (Operational Mathematics with Single series)방법과 이중 Fourier급수를 사용한 OMD (Operational Mathematics with Double series) 방법을 들 수 있다. 한편, 수치해석법은 C^1 -연속 조건을 만족시켜주기 위해 절점변위(nodal variable)에 적절한 구속을 가하는 동시에 형상함수의 차수를 자유롭게 사용할 수 있는 구속법(constraint method)을 사용한 Rossow의 연구결과와 A.I.T.대의 Worsak이 개발한 h-version 소프트웨어인 MICROFEAP-II의 해석 결과를 비교 검토해 보았다. p-version 모델은 그림 2에서 보는 바와 같이 기하형상을 표현할 수 있는 최소개수의 요소인 3개 요소로 분할한 후 수렴성조사를 한 후 수렴구간에 있는 적절한 형상함수 차수 p를 결정하여 수행되었다. 본 연구에서의 해석내용은 크게 두가지로 요약할 수 있다. 첫째는, 보강재의 전단변형 효과를 구속하고, 보강판의 해의 수렴성과 정확도를 전단변형을 고려하지 않은 이론적인 OMS와 OMD의 결과와 수치해법인 구속법과 비교하였다. 아울러 h-version 소프트웨어인 MICROFEAP-II의 결과와도 우월성이 비교 되었다. 둘째 보강재의 전단변형효과를 분석하였다.

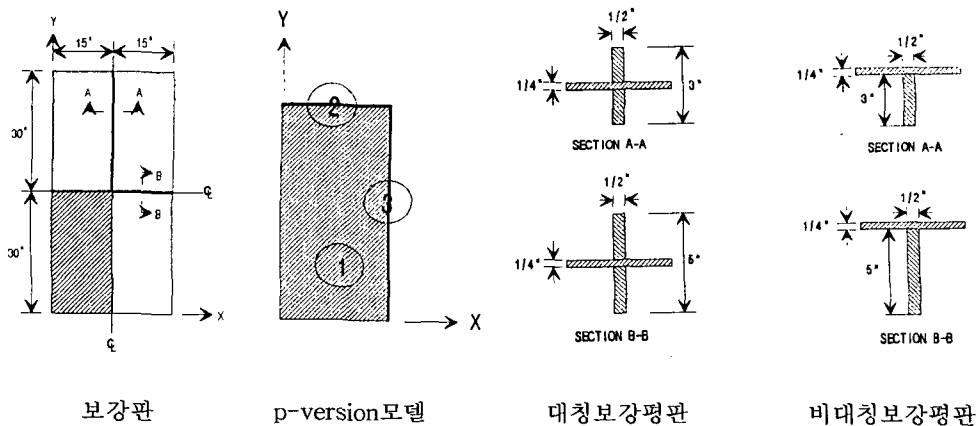


그림 2 해석 보강판의 제원

3.1 보강재의 전단변형효과를 구속했을 때

표1에서 보듯이 p-version유한요소법에 의한 결과치를 Rossow, Chang, 그리고 MICROFEAP-II의 결과치와 비교하였는데, 대칭보강인 평판의 경우 처짐과 모멘트 값이 대체로 일치하는 결과를 보여주고 있으며, 비대칭보강된 평판의 결과치는 문헌과 다소의 차이가 있는 경향을 보였다. 특히, h-version 소프트웨어 MICROFEAP-II의 결과는 집중하중(1kip)의 경우 이론해인 OMS에 의한 처짐이 1.216×10^{-3} in.인데 비해 0.815×10^{-3} in.로 큰차이를 보이고 있는 반면 구속법에 의한 처짐은 1.270×10^{-3} in.이고, p-version모델에 의한 처짐은 1.240×10^{-3} in.로 대체로 일치함을 보여주고 있다.

한편, OMS에 의한 모멘트 M_x 가 0.745×10^{-3} in-ib/in인데 비해 구속법은 0.854로 다소 차이를 보이고, h-version 해석값은 0.499로 현격한 차이를 보여주고 있다.

그러나, p-version 해석값은 0.751로 이론해와 매우 근접한 값을 보여주었다. 이경향은 등분포하중이 작용할 때도 동일하게 분석되었다.

표 1 평판의 중앙부(x=15", y=30")에서의 해석결과

구분	결과치	P-VERSION NDOF=115		H-VERSION NDOF=864		CONSTR -INT METHOD	OPERATIONAL MATHEMATICS	
		SHEAR INCLUDED	SHEAR SUPPRES SED	SHEAR INCLUDED	SHEAR SUPPRES SED		OMS	OMD
대칭보강 1kip 집중하중	w (in × 10 ⁻³)	3.722	3.464	3.478	3.463	3.464	3.464	3.463
	M _{xx} (in-ib/in)	2.146	2.142	2.106	2.076	2.143	2.099	2.069
	M _{yy} (in-ib/in)	1.164	1.124	1.101	1.092	1.127	1.102	1.083
대칭보강 0.01kip 등분포하중	w (in × 10 ⁻³)	25.62	24.09	24.12	24.04	24.08	24.07	24.08
	M _{xx} (in-ib/in)	6.580	6.503	0.660	0.891	6.963	7.274	7.597
	M _{yy} (in-ib/in)	-15.74	-16.23	-21.30	-20.2	-15.92	-13.89	-12.36
비대칭보강 1kip 집중하중	w (in × 10 ⁻³)	1.447	1.240	0.829	0.815	1.270	1.216	1.184
	M _{xx} (in-ib/in)	0.740	0.751	0.531	0.499	0.854	0.745	0.701
	M _{yy} (in-ib/in)	0.280	0.304	0.261	0.253	0.424	0.289	0.285
비대칭보강 0.01kip 등분포하중	w (in × 10 ⁻³)	10.53	9.010	6.699	6.597	8.850	8.814	8.616
	M _{xx} (in-ib/in)	2.870	2.850	-4.493	-4.288	3.869	2.968	2.975
	M _{yy} (in-ib/in)	-6.692	-6.997	-11.42	-10.13	-2.427	-5.805	-4.870

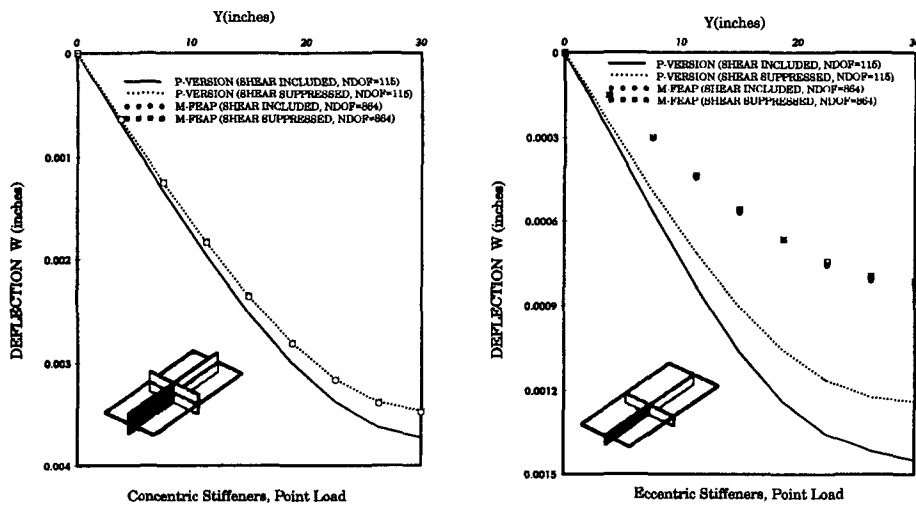


그림 3 집중하중(1kip) 작용시 전단효과를 고려한 보강판의 처짐

3.2 보강재의 전단변형효과가 고려했을 때

일반적으로 보강재의 길이를 L, 높이를 h라 할 때 형상비 L/h가 작을수록 전단변형효과가 중요한 것으로 알려져 있다. 본 연구에서도 해석대상인 보강판의 긴 보강재(longer stiffener)의 L/h=20이며 짧은 보강재(shorter stiffener)의 L/h=6이므로 전단변형효과를 고려해야 할 것으로 판단된다. 한편, OMS방법과 구속법은 전단변형을 고려하지 않은 관계로 본 연구 결과와 비교가 어렵기 때문에 MICROFEAP-II의 결과와 비교 하였다. 그림3에서는 긴보강재 방향으로의 최대처짐은 MICROFEAP-II(NDOF=864)에 의하면 3.463×10^{-3} in.이고 p-version(NDOF=115)결과는 3.464

$\times 10^{-3}$ in.로 일치된 반면 전단변형이 고려되었을 때는 각각의 결과는 3.478×10^{-3} in., 3.722×10^{-3} in.로 MICROFEAP-II는 전단변형에 의한 처짐증가가 불과 0.4%인데 비해 p-version결과는 7.4%를 보여준다. 즉, 비대칭 보강판의 MICROFEAP-II결과는 앞절에서 설명한 바와 같이 이론해와 현격한 차이를 보이므로 비교하는 것이 무의미하다고 판단되므로 p-version결과만을 분석하였다. 즉, 전단변형이 구속되었을 경우 최대처짐은 1.240×10^{-3} in.이며 전단변형이 고려된 경우는 1.447×10^{-3} in.로 16.6%의 처짐증가를 보여 비대칭 보강판의 경우가 전단변형효과가 훨씬 큼을 알 수 있다. 또한, 모멘트의 비교가 그림 4, 5에 도시되어 있는데 전단변형효과가 역시 큼을 알 수 있다.

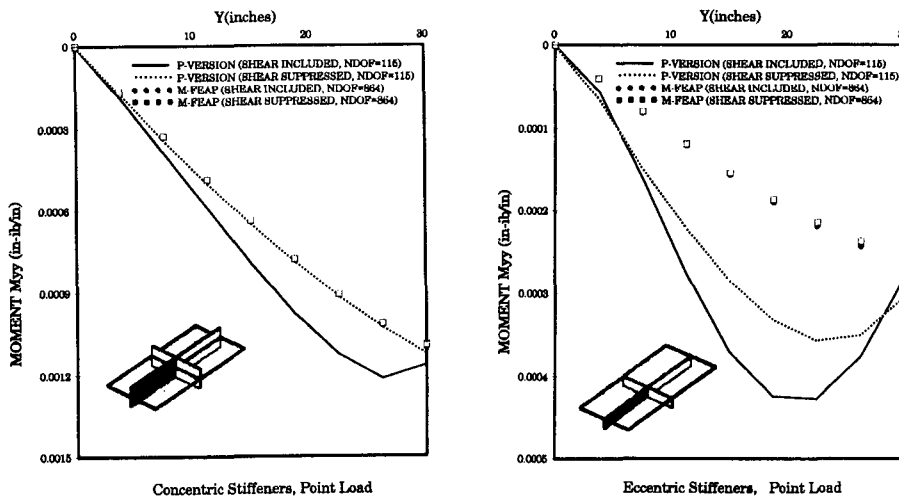


그림 4 전단변형을 고려하였을 때 모멘트 M_{yy} 의 비교

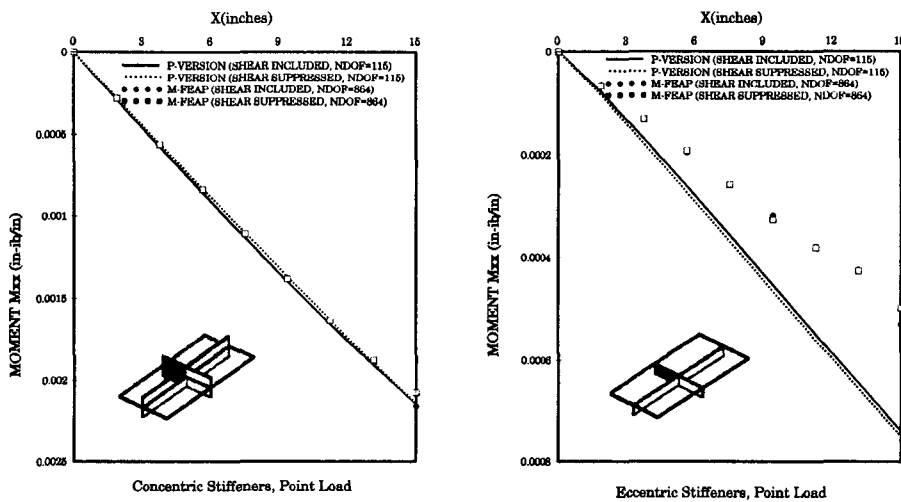


그림 5 전단변형을 고려하였을 때 모멘트 M_{xx} 의 비교

4. 결론

본 연구는 보강판의 휨모멘트와 처짐을 p-version 유한요소법으로 해의 정확성과 효율성을 입증하기 위한 목적으로 행한 연구로써 본연구에서 얻은 결론은 아래와 같다.

- (1) 전단변형이 구속된 경우 수렴성 조사를 하면 p-version 유한요소법에 의한 최대처짐은 7차형 상함수로 3개의 요소로 모델링(NDOF=115)할때 대칭 및 비대칭 보강판의 이론해인 OMS결과와 거의 일치하는 반면 MICROFEAP-II해석결과는 324개 요소로 모델링(NDOF=864)할 때 대칭보강판의 경우는 OMS결과와 대체로 일치하나 비대칭 보강판의 경우는 이론해의 최대처짐의 67% 밖에 되지 않아 현격한 차이를 보이고 있다. 그 이유는 편심거리에 대한 정확한 변환행렬에 문제점이 있는 것으로 추정된다.
- (2) 짧은 보강재에 발생하는 최대 모멘트는 긴보강재와 비교할 때 M_{xx} , M_{yy} 모두 약 2 - 3배 정도 크게 발생되었다.
- (3) L/h가 6인 짧은 보강재가 L/h가 20인 긴 보강재에 비해 모멘트 M_{xx} 와 M_{yy} 의 경우 전단변형 효과가 더 크게 나타났다. 그 이유는 L/h가 작을수록 전단변형효과가 클 것이라는 당초의 예측과 일치한 결과이다.
- (4) 대칭보강판에 비해 비대칭 보강판의 경우가 전단변형효과가 큼을 알 수 있었다. 즉, 전단변형이 고려되었을때 보강판의 최대처짐은 대칭보강판의 경우 약 7%정도 증가된 반면 비대칭 보강판의 최대처짐은 약 16%정도 증가되었다. 그이유는 평판의 중립면을 기준할 때 대칭보강판은 중립면에 상하대칭이므로 전단변형효과가 평판의 강성에 의해 억제되는 반면 중립면으로부터 하부로 보강되는 비대칭 보강판의 경우는 전단변형이 자유롭게 발생되는데 기인하는 것으로 판단된다.

5. 참고문헌

- 1) S. Y. Chang, "Analysis of eccentrically stiffened plates," *Doctoral Dissertation*, University of Missouri, 1973
- 2) M.P. Rossow, "Computer implementation of the constraint method," *Computers & Structures*, Vol. 6. pp.203-209, 1976
- 3) T.J.R. Hughes, R.L. Taylor and W. Kanoknukulchai, "A simple and efficient finite element for plate bending," *Int. J. Numer. Eng.*, 11, 1529-1543, 1977
- 4) A.K. Metha, "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics," *Doctoral Dissertation*, Washington University, St. Louis, Missouri, 1978
- 5) I. Babuska, B.A. Szabo, I.N. "The p-version of F.E.M.," *Report WU/CCM-79/1*, Washington University, May 1979
- 6) I. Babuska, M. Suri, "The Optimal Convergence Rate of the P-version of the Finite Element Method", *Technical Note BN-1045*, Laboratory for Numerical Analysis, Institute for Physical Science and Technology, Maryland University, 1985
- 7) M.S. Troitsky, *Orthotropic Bridges*, 2nd Edition, The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1987
- 8) MICROFEAP-II User's Manual, AIT, 1993
- 9) M. Mukhopadhyay, "Stiffened plates in bending," *Computers & Structures*, Vol. 50. pp.541-548, 1994