

수정된 King-post mechanism 을 이용한  
교량 구조물의 최적능동제어

**Optimal Active Control of Bridges  
using Modified King-post Mechanism**

김 준형\*      정 길호\*\*      이 인원\*\*\*  
Kim, Joon-Hyoung    Jung, Gil-Ho    Lee, In-Won

---

**ABSTRACT**

This paper develops a new control system to reduce the vibration of bridges using King-post mechanism. The optimal active control theory is used in the control system. The positions of post and roller in the King-post mechanism are important factors, since the vibration of bridges is very sensitive to their variations. To demonstrate the efficiency of the proposed control mechanism, a simply supported beam under moving load is considered.

---

**1. 서론**

근래에 구조해석기술의 발달과 고강도 및 경량 구조재료의 개발에 힘입어 고층빌딩과 장대교량 등의 대형구조물의 건설이 늘어나고 있다. 그러나 구조물이 대형화되고 전체 형상이 길어짐에 따라 구조물은 더 유연해지고 따라서 구조물의 기본 진동수는 작아지게 되어 태풍, 지진, 파랑 등 동적하중에 의한 진동 현상으로 인한 구조물의 안전 문제가 새로이 부각되고 있다. 또 구조물의 안전 뿐만 아니라 사용성(serviceability)이라는 측면에서도 구조물의 대형화는 여러가지 불리한 점을 가진다.

이렇듯 상재하지 않고 예측할 수 없는 동적하중에 대하여 구조물을 설계하는 것은 비효율적이고 비경제적이다. 이러한 문제를 해결하기 위해 최근 각광받고 있는 것이 구조물의 진동제어(vibrational control)이다.

---

\* KAIST 토목공학과 석사과정

\*\* KAIST 기계공학과 박사과정

\*\*\* KAIST 토목공학과 교수

기계적, 구조적 system 의 안전성과 보존성을 향상시키는 가능한 방법으로 최근 구조적 능동제어에 적지 않은 관심이 생겨났다. 구조물의 능동제어란 구조물에 가해지는 동적하중과 이로 인한 구조물의 response 를 측정하여 구조물의 안전과 사용성을 위하여 구조물의 거동이 줄어들도록 인위적인 힘을 가함으로써, 다양한 종류의 하중조건에서도 효율적으로 구조물의 거동을 제어하도록 하는 방식이다.

이렇게 구조물을 control 하는 방식은 전자공학이나 기계공학 등에서 많이 발전되어 온 control algorithm 을 구조적인 mechanism 에 적용하자는 것이다. 이전에는 건물에 actuator 와 tendon 을 이용하여 control 하는 것이 실제 구조물에 적용된 사례도 있다.

본 논문에서 다루고자 하는 control mechanism 인 King-post mechanism 도 앞의 사례와 마찬가지로 actuator 와 tendon 을 이용하지만 이 system 을 건물이 아닌 교량에 적용하자는 것이다. 그리고 더욱 효과적이고 경제적이며 실제로 구현 가능한 system, 즉 Modified King-post mechanism 을 고안 하여 적용하였다.

2 장에서는 이 control mechanism 에 적용하는 control algorithm 에 대하여 설명하였고, 3 장에서는 King-post mechanism 의 모양과 수학적인 modelling, 4 장에서는 Modified King-post mechanism 의 모양과 수학적인 modelling 을 살펴 본다. 5 장에서는 수치해석을 수행하였다.

## 2. Classical Linear Optimal Control

control theory 중에서 가장 기본이 되고 기초적인 algorithm 인 classical linear optimal control theory 에 대하여 살펴보고, 그 이론을 continuous system 에 응용할 수 있도록 modal domain 에 적용하였다.

### 2.1. 이론적 배경

구조물을 이상화시켜 모델링하여  $n$  개의 자유도를 가지도록 했다면 그 수학적인 표현은 식(1)과 같다.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = Du(t) + Ef(t) \quad (1)$$

여기서  $x(t)$  는  $n$ -차원의 변위 벡터이고,  $f(t)$  는 작용하는 하중이나 외력을 나타내는  $r$ -차원의 하중 벡터이다. 또  $M, C, K$  는 각각  $(n \times n)$  인 질량, 감쇠, 강성 행렬이고,  $D$  는 제어력의 위치를 정의하는  $(n \times m)$  인 위치 행렬,  $E$  는 외력의 위치를 정의하는  $(n \times r)$  인 위치 행렬이다. 상태 변수(state variable)를 도입하여 식(1)을 변환하면 식(2)와 같은 상태방정식(state-space equation)이 된다.

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) + Hf(t), \quad z(0) = z_0 \quad (2)$$

여기서  $z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$  는  $2n$ -차원의 상태 벡터,  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$  는  $(2n \times 2n)$  인 시스템 행렬,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix}$  는  $(2n \times m)$  인 제어력의 위치 행렬,  $H = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E \end{bmatrix}$  는  $(2n \times r)$  인 외력의 위치 행렬이다.

고전적 선형 최적 제어 이론에서 제어벡터  $u(t)$  는 식(2)에 따라서 성능지수 또는 가격 함수라 정의된 식(3)을 최소화 시키는 값으로 선택한다.

$$J = J_1[z(t_0), z(t_f), t_0, t_f] + \int_0^{t_f} J_2(z, \dot{z}, u, \dot{u}, t) dt \quad (3)$$

위의 식(3)에서 첫번째 항  $J_1$  은 초기값과 마지막값으로 정의 되고,  $J_2$  는 그 중간 과정의 값으로 정의된다. 그래서 식(3)을 최소화 되도록 하면 초기치와 그 중간과정 뿐만 아니라 마지막 값도 최소화 되도록 제어 벡터를 결정할 수 있다.

식(3)에서  $t_0 = 0$  라 하고  $t_f$  를 외력이 작용하는 시간보다 훨씬 길게 잡으면 식(3)의 첫 번째 항인  $J_1$  은 0(zere)가 된다. 그리고  $J_2$  는 상태변수와 제어벡터의 2 차식(quadratic)으로 정의하면 식(4)와 같아진다.

$$J = \int_0^{t_f} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (4)$$

여기서  $Q$  는  $(2n \times 2n)$ 의 positive semi-definite,  $R$  는  $(m \times m)$ 의 positive definite 인 weighting matrices 이다.  $Q, R$  행렬 속의 각각의 요소는 제어하는 목적에 따라 그 크기를 선택한다.  $Q$  행렬의 요소에 큰 값을 할당하면 response 는 많이 줄일 수 있으나 제어력을 많이 쓰는 노력을 해야 하고, 반대로  $R$  행렬의 요소에 큰 값을 할당하면 제어력을 작게 잡을 수 있으므로 경제성을 고려하여 적절한 값을 할당해야 한다.

이제 식(4)와 같이 정의된 최적제어 문제를 풀기 위하여 Lagrange multiplier  $\lambda(t)$  를 사용하여 식(5)와 같이 Lagrangian  $L$  을 정의한다.

$$L = \int_0^{t_f} \left\{ z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)[Az(t) + Bu(t) + Hf(t) - \dot{z}(t)] \right\} dt \quad (5)$$

식(5)와 같이 정의된 Lagrangian 을 상태변수와 제어벡터에 대하여 1 차의 variation 을 취하면 식(6)과 같이 된다.

$$\delta L = -\lambda^T(t_f)\delta z(t_f) + \lambda^T(0)\delta z(0) + \int_0^{t_f} \left[ \left( \dot{\lambda}^T \delta z + \frac{\partial H}{\partial z} \delta z + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) \right] dt \quad (6)$$

여기서  $H = z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)[Az(t) + Bu(t) + Hf(t) - \dot{z}(t)]$  는 식(5)의 integrand 로 정의된 Hamiltonian 이다.

최적제어에서 필요한 조건식을 구하기 위하여 식(6)과 같이 구해진 variation 을 0(zero) 로 놓으면 다음과 같이 식(7), 식(8) 그리고 경계조건식인 식(9)를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (7)$$

$$\dot{\lambda}^T + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\lambda^T(t_f) = 0 \quad (9)$$

이렇게 구해진 식(7), 식(8), 식(9)는 최적제어를 위한 필요조건이다. 이 식들을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\lambda^T = -A^T \lambda - 2Qz, \quad \lambda(t_f) = 0 \quad (10)$$

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \lambda \quad (11)$$

그래서 식(2), 식(10), 식(11)로 부터 최적해인  $z(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\lambda(t)$  를 구한다. 이러한 방정식은  $t=0$  일 때의  $z(t)$  값과  $t=t_f$  일 때의  $\lambda(t)$  값이 정의되어 있으므로 a two-point boundary value problem 이라 부른다.

이때 이 control system 을 closed-loop control 이라 하면 제어벡터를 상태벡터로 부터 구한다고 가정하게 되고, 식(12)와 같이 놓을 수 있다.

$$\lambda(t) = P(t)z(t) \quad (12)$$

여기서 미지의 행렬  $P(t)$  를 Ricatti matrix 라 부르는데, 이  $P(t)$  를 결정하기 위해 외력  $f(t)$  를 0,  $P(t)$  를 시간에 대하여 변하지 않는 행렬  $P$  라고 가정하고 식(12)에 식(2), 식(10), 식(11)를 대입하면 식(13)과 같은 Ricatti equation 을 구해낼 수 있다.

$$PA - \frac{1}{2} PBR^{-1}B^T P + A^T P + 2Q = 0 \quad (13)$$

식(13)을 풀어서 행렬  $P$  를 구하여 식(12)를 식(11)에 대입하여 선형최적제어법칙 (linear optimal control law)라 부르는 식(14)를 구한다.

$$u(t) = Gz(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T Pz(t) \quad (14)$$

여기서  $G = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T P$  는 control gain matrix 이다.

식(14)를 식(2)에 대입하면 식(15)를 구한다.

$$\dot{z}(t) = (A + BG)z(t) + Hf(t), \quad z(0) = z_0 \quad (15)$$

식(15)를 simulation 하면 모든 response 를 구해낼 수 있다.

## 2.2. Independent Modal-Space Control

앞 절에서 살펴본 linear optimal control theory 를 continuous system 에 적용해 보자.

먼저 continuous system 을 수학적으로 modelling 하면 식(16)과 같이 표현된다.

$$\ddot{w}(x,t) + M_1(x,D)\dot{w}(x,t) + M_2(x,D)w(x,t) = f(x,t) + q(x,t) \quad (16)$$

여기서  $w(x,t)$  는 어떤 시각  $t$  일 때  $x$  점에서의 displacement,  $f(x,t)$  는 외력,  $q(x,t)$  는 제어력을 나타내고,  $M_i(x,D)$  는 differential operator 로 구조물의 물성치와 geometry 에 따라 달라진다. 또  $D = \frac{\partial}{\partial x}$  를 나타낸다.

operator  $M_1$  과  $M_2$  의  $k$  번째 eigenfunction 을  $w_k(x)$  라 하면 이 eigenfunction  $w_k(x)$  는 orthogonal function 이므로 displacement  $w(x,t)$ , 외력  $f(x,t)$ , 제어력  $q(x,t)$  는 다음 식들로 표현된다.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)z_k(t) \quad (17)$$

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)F_k(t) \quad (18)$$

$$q(x,t) = \sum_{i=1}^p q_i(t)\delta(x-x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^p w_k(x_i)q_i(t) \right\} w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)Q_k(t) \quad (19)$$

여기서  $z_k(t)$ ,  $F_k(t)$ ,  $Q_k(t)$  는 temporal part로서 각 eigenfunction 의 계수가 된다. 또  $p$  는 actuator 의 갯수이다.

그리고 각각의 differential operator  $M_i(x,D)$  에 대하여 eigenvalue problem 을 풀어서 eigenvalue 를 구하면 식(20)과 같다.

$$M_1(x,D)w_k(x) = \lambda_k w_k(x), \quad M_2(x,D)w_k(x) = \nu_k w_k(x) \quad (20)$$

식(17) - 식(20)을 이용하여 각 mode 에 대하여 식(16)을 정리하면 식(21)과 같이 표현된다.

$$\ddot{z}_k + \lambda_k \dot{z}_k + \nu_k z_k = F_k + Q_k \quad \text{for } k\text{th-mode} \quad (21)$$

식(21)은 앞 절에서와 마찬가지로 state-space form 으로 표현하면 각 mode 에 대하여 식(22)와 같이 나타내어 진다.

$$\dot{\eta}_k(t) = A_k \eta_k(t) + Bu(t) + Hf_k(t) \quad (22)$$

그리고 또 다시 앞 절에서와 마찬가지로 performance index 를 정의하면 식(23)과 같다.

$$J_k = \int_0^T [\eta_k^T(t)Q_k \eta_k(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (23)$$

식(23)으로 주어진 cost function 을 최소화하도록 각 mode 에 대하여 Ricatti equation 을 풀어 gain matrix 를 구성한다. 이렇게 구성된 gain matrix 를 이용하여 각 mode 에 대한 temporal part 를 줄이도록 control 한다.

### 3. King-post mechanism

이전까지 발전되어온 mechanism 인 King-post mechanism 은 아래의 그림.1 과 같다.

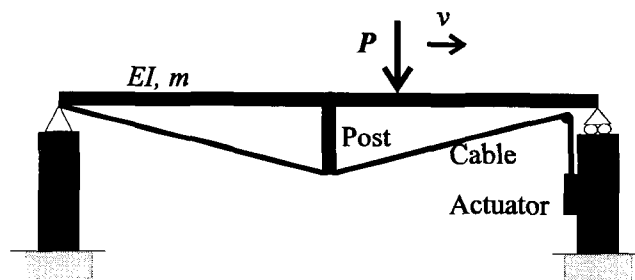


Figure.1 King-post Mechanism

이 system 의 수학적인 modelling 은 아래의 식(24)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - 2\gamma \sqrt{\frac{EI}{m}} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \\ = -\frac{P}{m} \delta(x-vt) + \frac{2k_c \cos\alpha}{m} u(t) \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 2.2 절의 식(16)과 비교해 보면  $M_1 = -2\gamma \sqrt{\frac{EI}{m}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $M_2 = \frac{EI}{m} \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ 가 되고 이 differential operator 의 eigenfunction 을 다음과 같이 식(25)로 가정한다.

$$w_k = \sin(k\pi x/L) \quad (25)$$

이렇게 되면 modal domain 상에서 각 mode 에 대한 식은 식(26)으로 표현된다.

$$\ddot{z}_k + 2\gamma \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \dot{z}_k + \frac{EI}{m} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 z_k = -\frac{2P}{mL} \sin\left(\frac{k\pi}{L} vt\right) + \frac{4k_c \cos\alpha}{mL} u(t) \quad (26)$$

식(26)도 state-space form 으로 바뀌면 식(22)과 같다. 그래서 식(23)과 같이 performance index 를 구성하여 optimal control 하면 된다.

#### 4. Proposed control mechanism ( Modified King-post Mechanism )

3 장에서 소개되어진 King-post mechanism 을 더욱 효율적이고 경제적이며 실제 구현 가능한 system 으로 수정보완한 것이 아래 그림.2 와 같은 Modified King-post Mechanism 이다. span 의 길이가 길어지면 그림.1 과 같은 구조로 system 을 구성하기가 어렵기 때문에 이러한 점을 보완하였고, 또 post 와 roller 의 위치를 적절히 결정하면 King-post mechanism 보다 더욱 효율적이다.

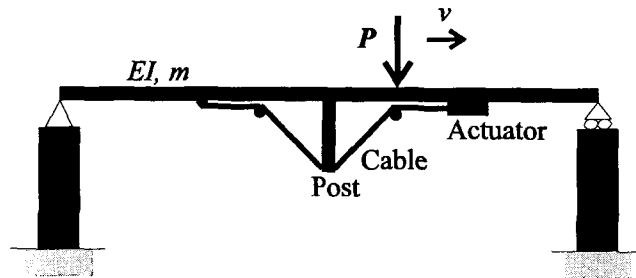


Figure 2. Modified King-post Mechanism

이 system 의 수학적인 modelling 은 아래의 식(27)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - 2\gamma \sqrt{\frac{EI}{m}} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{EI}{m} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} \\ = -\frac{P}{m} \delta(x-vt) + \frac{2k_c \cos\alpha}{m} u(t) \left[ \delta(x-\alpha L) - \delta(x-\beta L) - \delta(x-(1-\beta)L) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $\alpha$  는 post 의 위치를 나타내는 변수(parameter)로  $\alpha L$  이 post 의 위치이고,  $\beta$  는

roller 의 위치를 나타내는 변수이다.

앞 장과 마찬가지로 eigenfunction 을 식(25)와 같이 가정하면 식(27)의  $k$  th mode 에 대한 modal equation 은 식(28)과 같다.

$$\ddot{z}_k + 2\gamma \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \dot{z}_k + \frac{EI}{m} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 z_k = -\frac{2P}{mL} \sin\left(\frac{k\pi}{L} vt\right) + \frac{4k_c \cos\alpha}{mL} u(t) \left\{ \sin(k\pi\alpha) - \sin(k\pi\beta) - \sin(k\pi(1-\beta)) \right\} \quad (28)$$

식(28)도 state-space form 으로 바뀌면 식(22)과 같이 되고 식(23)과 같이 performance index 를 구성하여 optimal control 하면 된다.

### 5. 수치 해석

앞 장에서 제안된 system 의 효율성을 검증하기 위해 simply supported single span bridge 에 대하여 Matlab 상에서 수치해석을 수행하였다.

이 예제에서 사용된 물성치를 살펴보면 밀도는  $\rho = 7851 \text{ kg/m}^3$ , 탄성계수는  $E = 2.04 \times 10^9 \text{ Pa}$ , 감쇠계수는  $\gamma = 1.24\%$  이다. 구조물의 크기를 살펴보면 길이는  $L = 19.9 \text{ m}$ , 단면적은  $A = 0.0442 \text{ m}^2$ , 관성 moment 는  $I = 25.063 \times 10^{-3} \text{ m}^4$  이고 tendon 의 강성은  $k_c = 372 \text{ kPa}$  이다. 또 사용된 하중은 이동하중으로 크기는  $P = 1000 \text{ N}$ , 속도는  $v = 120 \text{ km/h} = 33.333 \text{ m/s}$  이다.

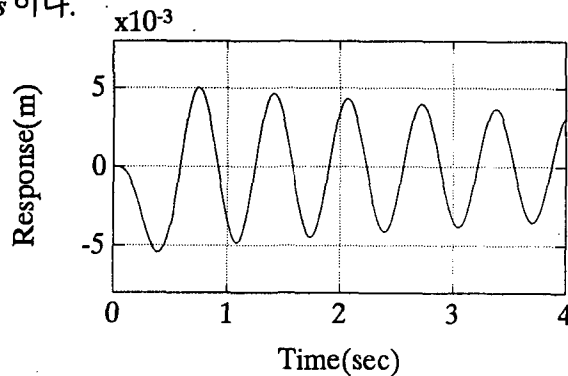


Figure.3 Uncontrolled Response

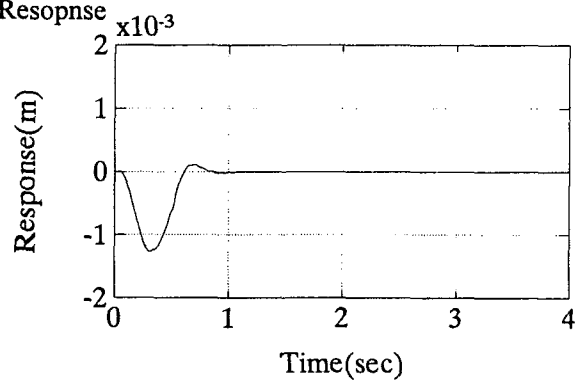
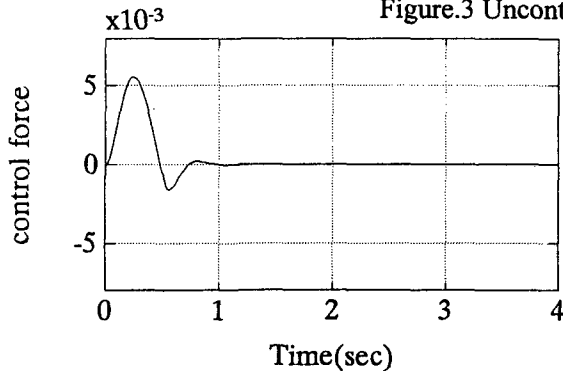


Figure.4 Controlled Response (King-post system)

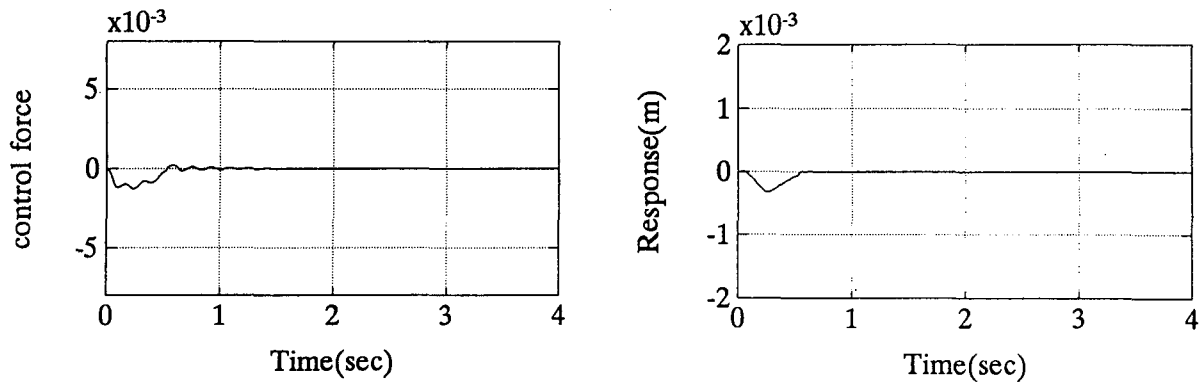


Figure.5 Controlled Response (Modified King-post system)

## 6. 결론

본 논문에서는 진동제어를 위한 새로운 system 을 제안하였다. 수치해석에서도 알 수 있듯이 아주 효과적이다. 또 King-post system 보다 크기가 작기 때문에 실제로 구현하기에도 용이하다.

## 7. 참고 문헌

1. T. Soong, 1990, **Active Structural Control : Theory and Practice**, *Longman Scientific & Technical*
2. Meirovitch, 1990, **Dynamic and Control of Structures**, *John Wiley & Sons, Inc.*
3. J. Z. Cha, J. M. Pitarresi and T. T. Soong, 1987, **Optimal Design Procedures for Active Structures**, *Journal of Structural Engineering*, 114(12), 2710-2723
4. S. Esfandiari, I. S. Sadek, and J. M. Sloss, 1993, **Optimal Open-Closed Loop Control of Mechanical Systems with Structural Damping**, *Journal of Sound and Vibration*, 163(1), 47-56
5. Abdel-Mooty and J. Roorda, **Optimal Configuration of Active-Control Mechanism**, *Journal of Engineering Mechanics*, 120(3), 535-555
6. 김 상범, 1993, 대형 구조물의 최적 진동 제어, *한국과학기술원 석사학위논문*