

**Flux-Corrected Transport Algorithm 을 적용한
1차원 발파압력산정에 관한 연구**
**A Calculation of 1 Dimensional Blasting Pressure
Using the Flux-Corrected Transport Algorithm**

김 문 겸*, 오 금 호**, 이 필 규***
Kim, Moon-Kyum Oh, Keum-Ho Lee, Phil-Kyu

ABSTRACT

Estimation of blasting behavior of explosives is prerequisite in the numerical analysis of blasting works. In this study, blasting pressure is estimated by the finite difference method using the Flux-Corrected Transport Algorithm. To formulate the behavior of blasting gas, the mass conservation equation, the moment conservation equation, the energy conservation equation and the ideal gas state equation are used. The simplified species conservation equation is included to simulate the behavior of reacting explosives. To verify the calculation, the Sod's shock tube problem, the strong shock problem and the reacting problem are used. Numerical results show that the shock wave can be captured by means of the FCT algorithm in the reacting and nonreacting states.

1 서론

건설분야에서 여러가지 목적으로 발파공법이 사용되므로서 여러 기술자들은 관련 구조물에 대해 발파의 영향을 고려하려는 추세이며, 대부분 발파하중을 간단히 모형화한 후에 구조물에 관한 역학적 거동을 중점적으로 연구하였다^[1]. 그러나 최근들어 암반과 콘크리트 같은 취성재료의 발파에 의한 거동을 파괴역학적으로 또는 미시적인 관점에서 보다 정확히 연구하는 경향에 비추어 볼 때 폭약이 점화되어 주변 취성재료에 가해지는 영향을 연구하는 것이 가장 기초적인 관심사이다^[2]. 발파시 폭약이 발파되어 취성재료의 파쇄가 발생하는 현상을 해석하기 위해 발파시 발생하는 충격파의 영향을 검토하여 정량화하는 것이 선행되어야 한다.

기체상태에서 충격파의 전파를 고려하기 위하여 다양한 수치해석기법이 제안되었다. 그 중 Book^[3]에 의하여 개발된 Flux-Corrected Transport Algorithm (FCT 기법)은 예측단계와 수정 단계로 나누어진 다단계기법으로서 충격파와 같은 강한 파의 전달문제를 경제적으로 해석할 수 있는 기법이다.

본 연구에서는 발파시 발생하는 충격압력을 산정하기 위하여 발파기체의 보존방정식과 상태방정식을 유한차분기법으로 수치해석하였으며 Lax-Wendroff 다단계기법으로 구해진 해를 FCT 기법에 적용함으로써 충격압력을 산정하였다. 계산의 편의를 위하여 기체의 상태변수들은 무차원량으로 적용하였다. FCT 기법을 적용하여 개발된 프로그램이 비반응상태에서 충격파를 고려함을 검증하기 위하여 일반적으로 사용되는 충격관에서의 Sod 문제^[4]와 강한 충격파가 상호작용을 하는 문제^[4]에 적용하였다. 발파시 반응대에서의 화학적 반응을 고려할 수 있도록 하기 위하여 간략화된 1단계 반응 보존방정식을 사용하였으며 반응비로서는 표준 Arrhenius 법칙을 적용하였다.

* 연세대학교 토목공학과 교수
** 연세대학교 토목공학과 박사과정
*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

2 발파의 역학적 특성 및 기본 방정식

2.1 발파의 역학적 특성

발파는 폭약의 한 부분에서 기폭제에 의해 기폭되고, 그 곳에서 급격한 분해가 일어나 고속도의 폭발이 전파되어 폭약전체가 가스화되는 것이다. 폭발에 의해 급격히 발생된 기체는 팽창되는 중에 충격파가 발생하게 되며 중심점에서 외부로 장약이 고유한 음속보다도 빠른 속도를 가지고 전파되어 간다. 이 충격파는 폭약의 화학반응을 발생시키고 이 화학반응은 또한 장약을 따라서 초음속으로 전파되는 충격파를 발생시키면서 발파과정을 일으키게 된다. 충격파에 의한 폭약의 연소는 주로 충격파면 바로 뒷부분에서 일어나는데, 그 뒷쪽 경계면을 Chapman-Jouguet 면 (C-J 면), 두 평면사이의 반응구역을 화학반응대라고 한다. C-J 면 뒷부분은 대부분 고온 (1500~4000 °C), 고압 (20~100 kBar) 의 기체로 되어 있으며, 이 기체는 급격히 팽창하여 충격파나 옹력파를 주변매체에 전달한다. 그림 1 에서는 폭약이 반응하는 과정을 나타내었다.

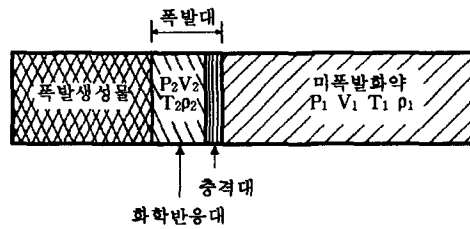


그림 1 폭약의 반응과정

그림 1 에서 나타내는 것과 같이 발파는 시간 $t=0$ 에서 발생하여 시간 t 에서 폭약의 상태는 반응영역과 비반응영역으로 나눌 수 있다. 이 두 영역은 충격파면의 얇은 영역인 화학반응대에 의해 구분된다. 이 화학반응대는 반응영역의 한 부분으로 간주되며 반응된 폭약은 고압과 고온인 기체상태의 발파기체로 변화된다. 이 영역은 발파파면 또는 충격파면으로도 불리우며 이 면에서 상태매개변수는 급격히 변화한다.

2.2 기본방정식

충격파면의 한점에서의 상태매개변수들로서 압력 $p = p(x, t)$, 밀도 $\rho = \rho(x, t)$, 입자속도 $u = u(x, t)$, 온도 $T = T(x, t)$ 등이 고려된다. 이 함수들은 폭약의 특성에 따라 많은 상수들에 의해 매개변수적으로 종속된다. 폭약이 발파하였을 때의 상태미분방정식을 유도하기 위하여 다음과 같은 질량, 모멘트, 에너지보존법칙을 사용한다.

2.2.1 질량보존의 법칙

반응된 폭약의 요소체적내에 유입되고 배출되는 질량의 차이는 폭약의 밀도의 변화로서 나타난다. 그림 2 에서는 반응이 일어나는 반응대의 한 요소를 도시하였다.

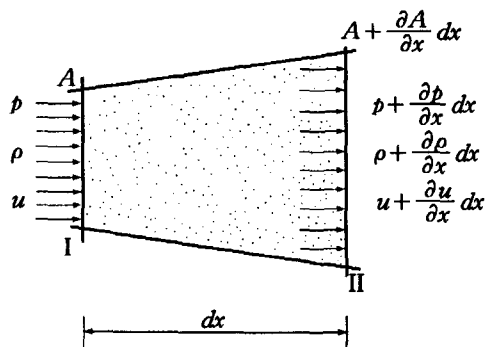


그림 2 반응하는 폭약요소의 작용변수들

그림 2 의 단면 I 와 단면 II 의 질량의 변화를 고려하면 식 (1) 이 구성된다.

$$A u d t \rho - \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) d t \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) = A dx \frac{\partial \rho}{\partial t} d t \quad (1)$$

여기서 A 는 폭약의 요소단면적, u 는 유체의 속도, ρ 는 밀도, p 는 압력이다. 식 (1) 을 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + (\nu^0 - 1) \frac{\rho u}{x} = 0 \quad (2)$$

여기서 구형폭약일 경우에는 $\nu^0 = 3$, 실린더형 장약일 경우는 $\nu^0 = 2$, 평면형 장약일 경우는 $\nu^0 = 1$ 이다. 따라서 단면의 변화가 없는 1 차원 평면형 장약일 경우 질량보존의 법칙을 오일러 방정식 형태로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

2.2.2 모멘트보존의 법칙

모멘트보존의 법칙은 한 요소에서 폭약에서의 모멘트 변화는 작용압력의 충격과 같다는 것이다. 그림 2 와 같이 평면형상의 폭약에 대하여 정해진 체적에 들어오는 유체의 모멘트와 나가는 유체의 모멘트가 일정하다는 법칙으로부터 다음식이 유도되어진다.

$$A dx \rho \frac{\partial u}{\partial t} = p A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) A \quad (4)$$

식 (4) 에 질량보존의 법칙을 대입하여 오일러방정식 형태로 변환하면 다음식과 같다.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0 \quad (5)$$

2.2.3 에너지보존의 법칙

에너지보존의 법칙은 주어진 한 입자에 내부에너지의 변화는 주변매체에 의해서 그 입자에 행하여진 일과 외부에서 가해진 에너지의 합이다 라는 것이다. 에너지 보존의 법칙을 수식적으로 표현하면 다음 식과 같다.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{dV}{dt} = Q \quad (6)$$

여기서 ε 은 내부에너지이며, p 는 압력, V 는 체적, Q 는 단위시간동안 단위질량에 대한 외부에서 가해진 에너지량을 나타낸다. 식 (6) 을 오일러 방정식 형태로 변환하면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \varepsilon_t + p u) = \rho Q \quad (7)$$

여기서 ε_t 는 총에너지를 나타내며 다음 식과 같이 내부에너지와 운동에너지 그리고 화학적 반응 에너지를 포함한다.

$$\varepsilon_t = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2 + q_0 z \quad (8)$$

여기서 q_0 는 화학반응의 방출열, z 는 반응전의 질량분배 (mass fraction) 를 나타낸다.

2.2.4 반응방정식

화학반응비는 Arrhenius 법칙으로 부터 주어지며 식 (9) 과 같이 표현된다.

$$\dot{z} = -K z T^\alpha \exp(-E/R_g T) \quad (9)$$

여기서 K 는 시간차원을 나타내는 상수이며, E 는 화학적반응의 에너지, R_g 는 기체상수, T 는 절대온도를 나타낸다. 이 반응비식은 식 (10) 과 같이 단순화된다.

$$\dot{z} = -K z H(T - T_c) \quad (10)$$

여기서 $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ 이며, T_c 는 한계온도를 나타낸다.

2.3 유한차분법에 의한 수치해석기법

매우 강한 충격파를 발생시키는 발파문제는 유한차분법으로 해석을 할 때, 갑작스러운 매개변수들의 불연속적인 변화로 인하여 수치해석치가 진동하면서 발산하는 경향이 있다. 특히, 충격파를 해석하기 위해서 오차를 줄이는 기법이 필요하며 본 연구에서는 Book 에 의해서 제안되어진 Flux-Corrected Transport 기법 (FCT 기법) 을 본 대상문제에 적용하고 일반적인 Lax-Wendroff 다단계기법과 함께 사용하여 쌍곡선형 기본방정식을 해석하였다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = G(U) \quad (9)$$

여기서

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e_t \\ \rho z \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u e_t + p u \\ \rho z u \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho z \end{pmatrix}$$

이다.

2.3.1 Lax-Wendroff 다단계 기법

Lax-Wendroff 다단계 기법은 쌍곡선형 편미분방정식을 차분화하여 해석하기 위하여 두개의 단계로 구분하여 해를 구하는 기법이다. 첫번째 기법은 예측단계 (predictor step) 로서 절점의 중앙지점에서 가상의 시간단계에 대하여 차분식으로 정리한 단계이며 이 단계에서 구해진 수치를 사용하여 두번째 수정단계 (corrector step) 의 차분방정식에 대입하므로써 해를 순차적으로 구하는 방법이다.

발파에 의한 반응상태를 해석하기 위한 기본방정식계, 식 (9), 에서 벡터항 U 를 시간증분 $\Delta t/2$ 에 대하여 Taylor 급수변환을 사용하고 절점의 중간점 $j+1/2$ 에서의 차분식으로 변환하면 하면 다음식과 같다.

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = U_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \dots \quad (10)$$

식 (10) 에서 1차 미분항 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 는 식 (9) 로부터 공간에 대한 미분항으로 나타내어질 수 있으므로 대입을 하면 다음식과 같이 된다.

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = U_{j+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{\partial F}{\partial x} + G \right) \quad (11)$$

식 (11) 을 차분식으로 변환하면 식 (12) 로 표현할 수 있으며 오른쪽 항의 공간절점 $j+1/2$ 에서의 값은 절점 j 와 $j+1$ 의 평균치이다. 이 단계를 예측단계 (predictor step) 라고 한다.

$$U_{j+1/2}^* = \frac{1}{2} [U_j^n + U_{j+1}^n] - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F_{j+1}^n - F_j^n] + \frac{\Delta t}{2} G_j^n \quad (12)$$

수정단계 (corrector step) 에서는 절점 j 와 $j+1$ 에 대하여 식 (9) 을 차분화한다. 시간단계 $n+1$ 에서의 U 에 대한 차분식으로 표현하면 다음식과 같다.

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2}^* - F_{j-1/2}^*] + \Delta t G_{j+1/2}^* \quad (13)$$

본 단계까지는 Lax-Wendroff 다단계기법에 의한 차분식을 나타내었으며 이 식으로는 충격파일 경우 불연속면에서의 떨림현상이 나타나게 된다. 따라서 본 단계까지를 두번째 가상단계 ** 로 하여 FCT 기법을 적용한다.

2.3.2 Flux-Corrected Transport 기법

FCT 기법은 다단계 차분기법 형태로서 예측단계에서는 해의 확산 (diffusion) 을 형성하고 수정 단계에서는 같은 정도의 비확산 (antidiffusion) 을 수행함으로써 계산중에 나타나는 극대 또는 극소의 특이치들을 제거하는 기법이다. Book 에 의하여 제안되어진 이 기법은 다음과 같이 6단계로 구분되며 Lax-Wendroff 기법을 통해 구해진 가상시간단계 ** 에서의 해를 사용하게 된다.

(1) 확산흐름 발생단계

$$f_{j+1/2}^d = \nu_{j+1/2}(U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (14)$$

(2) 비확산흐름 발생단계

$$f_{j+1/2}^{ad} = \mu_{j+1/2}(q_{j+1}^{**} - q_j^{**}) \quad (15)$$

(3) 해의 확산단계

$$U_j^{***} = U_j^{**} + f_{j+1/2}^d - f_{j-1/2}^d \quad (16)$$

(4) U_j^{***} 의 편차계산 단계

$$\Delta U^{***} = U_{j+1}^{***} - U_j^{***} \quad (17)$$

(5) 비확산흐름의 한계설정단계

$$S = \text{sign}(f_{j+1/2}^{ad})$$

$$f_{j+1/2}^{cad} = S \max[0, \min\{S \Delta U_{j-1/2}^{***}, |f_{j+1/2}^{ad}|, S \Delta U_{j+3/2}^{***}\}] \quad (18)$$

(6) 해의 비확산 단계

$$U_j^{n+1} = U_j^{***} - f_{j+1/2}^{cad} + f_{j-1/2}^{cad} \quad (19)$$

여기서 단계 (1) 과 (2) 의 확산계수 ν 와 비확산계수 μ 는 Book^[3] 에 의하여 다음식을 사용함이 적절하다고 추천되었다.

$$\nu = \frac{1}{6} + \frac{C^2}{3}, \quad \mu = \frac{1}{6} - \frac{C^2}{6} \quad (20)$$

2.4 수치해석

기본방정식계 식 (9) 에 대하여 진술한 Lax-Wendroff FCT 유한차분기법을 적용한 수치해석을 비반응 충격파 및 반응 충격파에 대하여 검증용 수행하였다. 검증방법으로는 유체역학에서 사용되는 Sod 의 충격관 문제와 강한 충격파의 전파문제를 다루었다.

2.4.1 Sod 의 충격관 문제

Sod 의 충격튜브문제는 주로 충격파에 대한 프로그램의 검증용으로 주로 사용되어지는 방법이다. 초기에 튜브사이에 얇은 막을 형성하여 튜브를 2 개의 공간으로 분리한 후 각각의 공간에서 서로 다른 압력을 가한다. 압력차이가 커질 경우 얇은 막이 파괴되어 유체는 급속도로 전파되게 된다. 이 과정을 검토하여 불연속면에서의 수치해석결과의 매끈한 정도와 정확도를 판단한다.

본 검증에서는 201개의 요소에 대하여 식 (21) 과 같이 초기조건을 가하였을 경우 0.001 의 시간간격으로 200 회 계산하였다. 그림 3 에서는 시간 $t=0.2$ 에서 계산된 결과를 보여준다.

$$\begin{aligned} \rho_1 = 1.0, \quad \rho_1 = 1.0, \quad u_1 = 0.0 \quad x < 0.5 \\ \rho_1 = 0.1, \quad \rho_1 = 0.125, \quad u_1 = 0.0 \quad x > 0.5 \end{aligned} \quad (21)$$

그림 3.a 와 그림 3.b 를 비교해보면 압력형상에서는 불연속면이 없는 부분인데도 불구하고 밀도의 형상은 불연속면이 발생하였음을 알 수 있다.

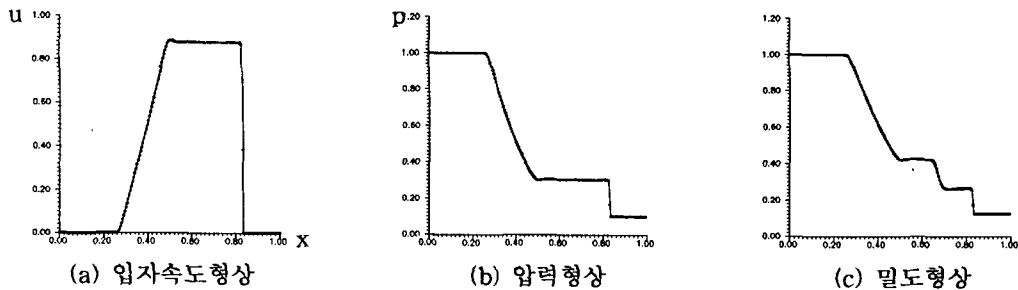


그림 3 Sod 의 충격튜브 문제 (시간 $t=0.2$, 요소수 $N=201$ 일 경우)

2.4.2 강한 충격파 문제

강한 충격파가 발생하여 매우 가파른 불연속면이 형성되는 경우에 수치해석이 그 불연속면을 표현할 수 있는 지에 대하여 검증하였다. 본 방법은 Woodward와 Collella^[4]에 의해 수행되었던 방법이며 불연속파가 맞부딪혔을 경우에 대한 불연속면의 변화를 나타내었다. 전체요소수는 801개로 하였고 시간증분 $\Delta t = 0.00001$ 로 하였다. 초기상태는 식 (22)과 같이 설정하였다.

$$\begin{aligned} p &= 1000, & x < 0.1 \\ p &= 0.01, & 0.1 < x < 0.9 \\ p &= 100, & 0.9 < x < 1.0 \end{aligned} \quad (22)$$

그림 4 ~ 그림 6에서는 각각 시간 $t = 0.007, 0.009, 0.011$ 에 대한 상태매개변수의 변화를 나타낸 것이다.

2.4.3 반응상태의 충격압력 문제

발파시 충격파에 의하여 온도가 한계온도 T_c 를 넘게 되면 반응대에서 반응이 발생되어 총에너지항에 반응 방출열이 추가된다는 가정으로 반응상태에서의 압력변화를 해석하였다. 본 예제에서는 무차원화된 한계온도를 1.3으로 하였으며, 기체상수 γ 는 1.4, 반응비 상수 K 는 2.0으로 가정하였다. 그리고 반응열은 1.0으로 가정하였다. 본 해석을 위하여 공간절점 $N = 401$ 개로 하였으며 시간간격 Δt 를 0.0001로 하였다. 반응기체의 상태변수에 대한 초기조건은 정지상태에서 식 (23)와 같은 압력을 가하였다.

$$\begin{aligned} p &= 2.0, & x < 0.3 \\ p &= 0.1, & 0.3 < x < 1.0 \end{aligned} \quad (23)$$

그림 7 ~ 그림 9에서는 각각 시간 $t = 0.025, 0.050, 0.075$ 에 대하여 상태매개변수의 변화를 나타내었다.

2.5 결 론

본 논문에서는 발파시 폭약의 반응을 정량화하기 위한 기초단계로서 반응기체의 보존방정식과 상태방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 수치해석법으로는 충격파의 전파문제를 다룰수 있는 유한차분기법인 Lax-Wendroff FCT 기법을 적용하여 충격압력을 산정하였다. 이러한 반응식의 검증을 위하여 충격관에서의 Sod 문제와 강한 충격파가 상호작용하는 문제를 통해 비반응상태의 문제를 다루었으며, 반응에너지를 포함시킨 반응상태의 충격압력 문제를 또한 다루었다. 먼저 반응시의 문제인 Sod의 충격관 문제를 통하여 충격파에 의해 나타나는 밀도의 불연속면의 발생을 나타낼 수 있었고, 강한 충격파 문제를 통해서는 발파하중과 같은 압력차이가 매우 큰 충격파가 상호작용하였을 때 파의 상호거동을 나타낼 수 있음을 확인하였다. 반응상태의 충격압력 문제의 경우에도 각 시간에 따른 상태매개변수의 변화를 파악할 수 있었다. 이러한 충격파 전파문제의 해석을 통하여 반응상태에서 폭약이 반응할 때 발생하는 발파압력을 산정할 수 있다는 가능성을 인지할 수 있었다.

참고문헌

1. Hisatake, M., Sakurai, S., Ito, T., and Kobayashi, Y., "Analysis Contribution to Tunnel Behavior Caused by Blasting," *Proceedings International Conference on Rock Mechanics*, 5th Melbourne, 1983, pp.E191-E193.
2. Persson, P.-A., Holmberg, R., and Lee, J., *Rock Blasting and Explosives Engineering*, CRC Press Inc., 1994.
3. Book, D. L., Boris, J. P., and Zalesak, S. T., "Flux-Corrected Transport," *Finite-Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Calculations*, edited by D.L. Book, Springer-Verlag New York Inc., 1981, pp.29-55.
4. Woodward, P. and Colella, P., "The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Journal of Computational Physics*, 54, 1984, pp.115-173.
5. Henrych, J., *The Dynamics of Explosion and Its Use*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1979.
6. Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Volume II, Springer-Verlag Inc., 1988.
7. Williams, F. A., *Combustion Theory : The Fundamental Theory of Chemically Reacting Flow Systems*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1985.

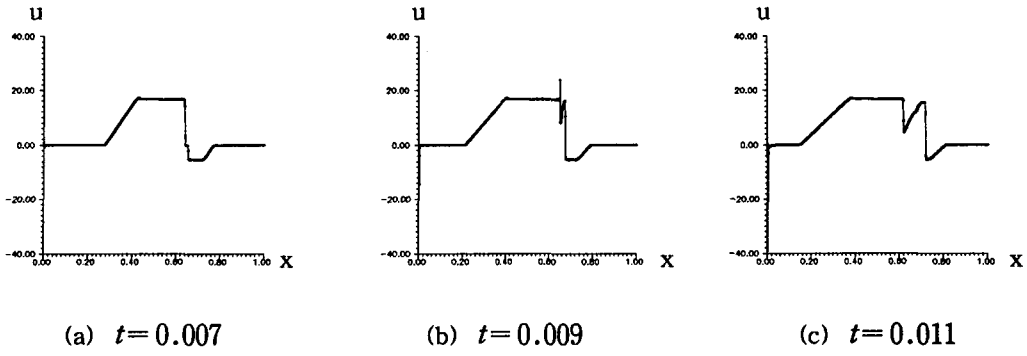


그림 4 강한 충격파 문제에서의 입자속도형상 (요소수 $N=801$)

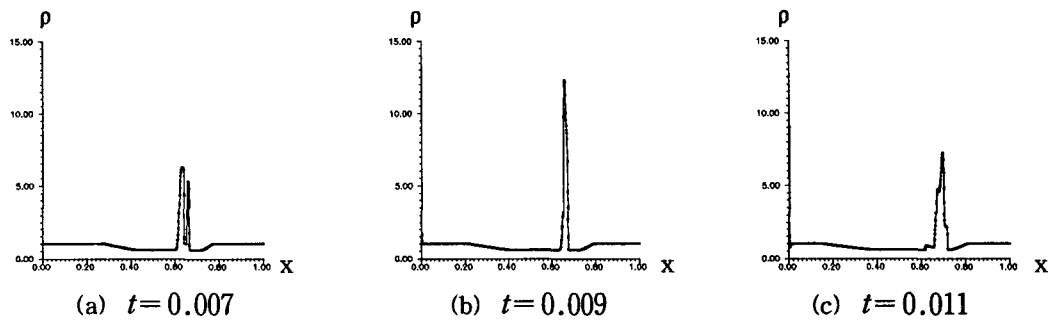


그림 5 강한 충격파 문제에서의 밀도형상 ($N=801$)

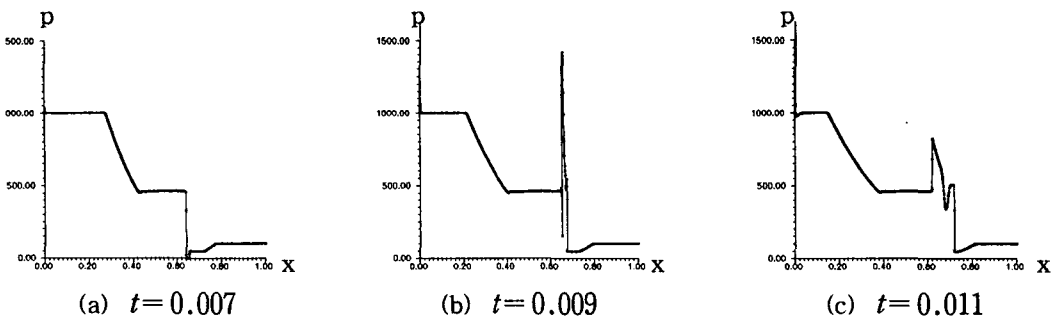
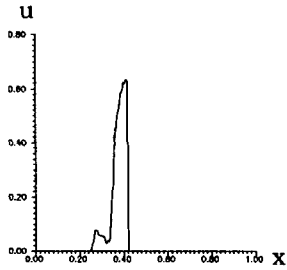
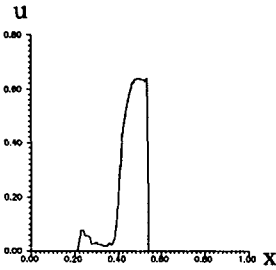


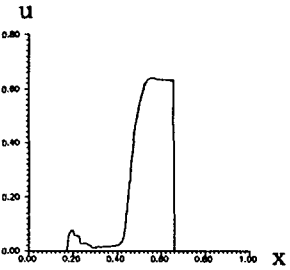
그림 6 강한 충격파 문제에서의 압력형상 ($N=801$)



(a) $t = 0.025$

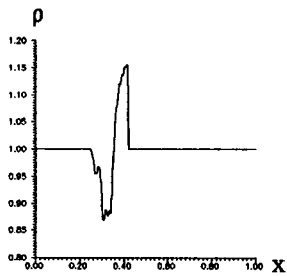


(b) $t = 0.050$

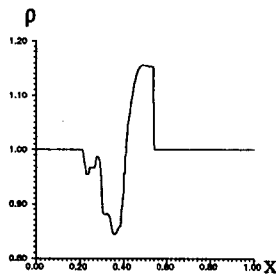


(c) $t = 0.075$

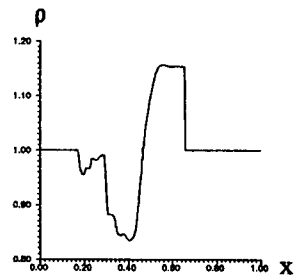
그림 7 반응 충격파 문제에서의 입자속도형상 (요소수 $N=401$)



(a) $t = 0.025$

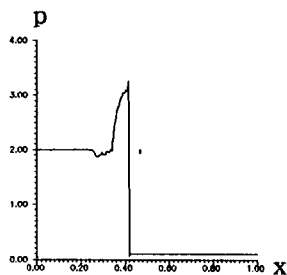


(b) $t = 0.050$

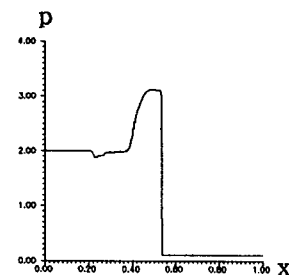


(c) $t = 0.075$

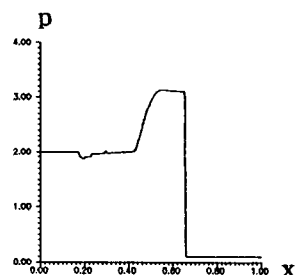
그림 8 반응 충격파 문제에서의 밀도형상 ($N=401$)



(a) $t = 0.025$



(b) $t = 0.050$



(c) $t = 0.075$

그림 9 반응 충격파 문제에서의 압력형상 ($N=401$)