

# 일정체적을 갖는 단순지지 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중

## Free Vibrations and Buckling Loads of Simple Beam-Columns with Constant Volumes

이 병 구\* 오 상 진\*\* 모 정 만\*\* 이 용\*\*  
Lee, Byoung Koo Oh, Sang Jin Mo, Jeong Man Lee, Yong

### ABSTRACT

The differential equations governing both the free vibrations and buckling loads of the beam-columns with constant volumes are derived and solved numerically. The axial load effects are included in the differential equations. The Runge-Kutta method and Regula-Falsi method are used to compute the eigenvalues corresponding to the natural frequencies and buckling loads. In numerical examples, the simple end constraint is considered.

#### 1. 서 론

일정체적을 갖는 구조물 중에서 하중에 대한 가장 큰 저항능력을 보유하는 구조물을 찾는 과제는 구조공학자들의 주요한 관심사 중의 하나이다<sup>1)</sup>. 이러한 연구들은 많은 문헌들<sup>2~10)</sup>에서 찾아볼 수 있으며 문헌 [2~4]에서는 가장 큰 제1고유진동수를 갖는 부재형상에 관한 연구, 문헌 [5~10]에서는 좌굴하중이 최대인 부재형상에 관한 연구가 이루어졌다.

본 논문은 일정체적을 갖는 변단면 보-기둥에 대한 고유진동수 및 좌굴하중을 산출하는데 연구 목적이 있다. 보-기둥의 재료는 선형탄성체로 가정하였으며 자유진동은 조화진동으로 가정하였다. 단면은 반경이 포물선으로 변화하는 원형단면을 채택하였으며, 실제 수치해석에서 단부조건은 단순지지로 국한하였다.

#### 2. 수학적 모형

그림 1은 지간 길이가  $l$ 이고, 부재축의 임의점  $x$ 에서 단면적 및 단면이차모멘트가 각각  $A$ ,  $I$ 인 단순지지 변단면 보-기둥을 나타내고 있으며, 양단에 압축하중을 "+"로 하는 축하중  $P$ 가 작용하고 있다.

보-기둥이 면내에서 자유진동하게 되면 그림에 나타낸 바와 같이 부재축상 임의점은 동적변위  $w(x,t)$ 를 갖게 된다. 보-기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 동적변위  $w(x,t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$w(x,t) = w(x) \sin(\omega t) \quad (1)$$

윗 식에서  $x$ 는 부재의 축방향 좌표이고,  $\omega$ 는 고유각진동수,  $t$ 는 시간이다. 또한  $w(x)$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며 이후  $w$ 로 표시한다.

축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음과 같다<sup>11)</sup>.

\* 원광대학교 토목환경공학과 교수

\*\* 원광대학교 대학원

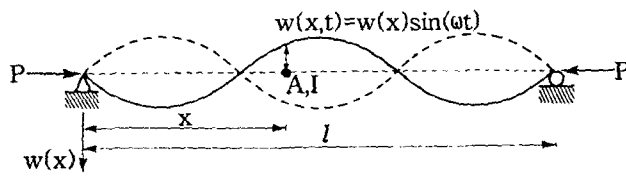


그림 1. 축하중을 받는 보-기둥의 진동형

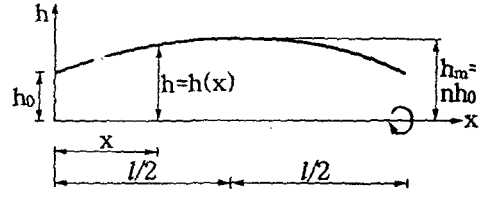


그림 2. 변단면 보-기둥의 반경변화

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

윗 식에서 E는 탄성계수,  $\rho$ 는 단위체적당 질량이며, A, I는 각각 변단면의 단면적 및 단면이차 모멘트로서 x만의 함수이므로 (2)식은 다음 식과 같이 전개된다.

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} + \left( E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

(1)식으로 부터  $\partial^2 w(x,t)/\partial t^2$ ,  $\partial^2 w(x,t)/\partial x^2$ ,  $\partial^3 w(x,t)/\partial x^3$ ,  $\partial^4 w(x,t)/\partial x^4$ 을 구하여 (3)식에 대입하고 정리하면 다음 식과 같은 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} + \left( E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \rho A \omega^2 w = 0 \quad (4)$$

보-기둥의 양단은 단순지지되어 있으므로 양단( $x=0$  또는  $l$ )에서 변위  $w$  및 휨모멘트  $M=EIw''$ 이 "0"이므로 경계조건식은 다음과 같이 유도된다.

$$w=0, \quad x=0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (5)$$

$$w''=0, \quad x=0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (6)$$

(4)식의 미분방정식을 체적이 V인 변단면 보-기둥에 적용시키기 위하여 부재의 단면은 원형단면으로, 원형단면의 반경은 포물선변화로 가정한다.

그림 2는 부재축의 임의점 x에서 원형단면의 반경변화  $h(x)$ 를 나타낸 것으로 x축을 회전하여 생긴 중심 변단면이 본 연구의 대상 보-기둥이 된다.

이 그림에서  $h_0$ 는 양단의 반경,  $h_m$ 은 부재 중앙에서 반경이며, 변단면 보-기둥의 기하학적 형상을 정의해 주기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$n = h_m/h_0 > 0 \quad (7)$$

따라서  $(0, h_0)$ ,  $(l/2, nh_0)$ ,  $(l, h_0)$ 의 세점을 지나는 포물선 방정식  $h(x)$ 는 다음과 같이 표시되며, 이후  $h(x)$ 는  $h$ 로 표시한다.

$$h = a_1 x^2 + a_2 x + h_0 \quad (8.1)$$

여기서,  $a_1 = -4(n-1)h_0/l^2 \quad (8.2)$

$$a_2 = 4(n-1)h_0/l \quad (8.3)$$

보-기둥의 체적은 다음과 같이 산출할 수 있다.

$$V = \pi \int h^2 dx = \pi h_0^2 l (8n^2 + 4n + 3)/15$$

$$= \beta \pi h_0^2 l \quad (9.1)$$

$$\text{여기서, } \beta = (8n^2 + 4n + 3)/15 \quad (9.2)$$

(9.2)식에서  $\beta$ 는 보-기둥의 전체 체적  $V$ 와 가운데 부분의  $h_0$ 를 반경으로 하는 원통체적  $\pi h_0^2 l$ 과의 비로 정의됨을 알 수 있다.

부채축의 임의점  $x$ 에서 단면적 및 단면이차모멘트  $A, I$ 를 구하면 다음 식들과 같다.

$$A = \pi h^2 = A_0 [-4(n-1)x^2/l^2 + 4(n-1)x/l + 1]^2 \quad (10.1)$$

$$\text{여기서, } A_0 = \pi h_0^2 \quad (10.2)$$

$$I = \pi h^4/4 = I_0 [-4(n-1)x^2/l^2 + 4(n-1)x/l + 1]^4 \quad (11.1)$$

$$\text{여기서, } I_0 = \pi h_0^4/4 \quad (11.2)$$

(10.2)식 및 (11.2)식에서  $A_0, I_0$ 는 각각 보-기둥 양단에서의 단면적 및 단면이차모멘트이다.

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (12)$$

$$\eta = w/l \quad (13)$$

$$p = \frac{P l^2}{EI_e} \quad (14)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_e / EI_e}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (15)$$

윗 식들에서  $\xi, \eta$ 는  $x, w$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이며,  $p$ 는 무차원 하중,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수이며  $i$ 는 모드번호이다. (14), (15)식에서  $A_e, I_e$ 는 각각 전체 체적  $V$ 를 길이가  $l$ 인 등단면 원형단면으로 하는 경우의 단면적 및 단면이차모멘트로서 다음 식들과 같이 표시된다.

$$A_e = V/l \quad (16)$$

$$I_e = \frac{1}{\pi} \left( \frac{V}{2l} \right)^2 \quad (17)$$

(10.1)식, (11.1)식 및 (11.1)식으로 부터 구한  $dI/dx, d^2I/dx^2$ 을 (4)식의 미분방정식에 대입하고 (12)~(15)식의 무차원 변수들을 사용하면 다음 식과 같은 단면의 반경이 포물선으로 변화하는 원형단면을 갖는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = \frac{8k(2\xi-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \left[ \frac{\beta^2 p}{(-k\xi^2+k\xi+1)^4} + \frac{8k(7k\xi^2-7k\xi+1.5k-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{\beta C_i^2}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \eta \quad (18.1)$$

$$\text{여기서, } k = 2(n-1) \quad (18.2)$$

(5), (6)식의 경계조건식은 다음과 같이 무차원화 한다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{에서} \quad (19)$$

$$\eta' = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{에서} \quad (20)$$

축압축하중이 증가하여 좌굴하중에 도달하면 고유진동수는 "0"이 되므로 (18.1)식에  $C_i=0$ ,  $p=b_i$ 를 대입하면 좌굴하중을 지배하는 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = \frac{8k(2\xi-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \left[ \frac{\beta^2 b_i}{(-k\xi^2+k\xi+1)^4} + \frac{8k(7k\xi^2-7k\xi+1.5k-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \quad (21)$$

(21)식에서  $b_i$ 는 다음 식과 같이 정의되는 무차원 좌굴하중이다.

$$b_i = \frac{B_i l^2}{EI_c}, \quad i=1, 2, 3, 4, \dots \quad (22)$$

(22)식에서  $B_i$ 는 좌굴하중이고  $i$ 는 모드번호이다.

### 3. 수치해석 방법

이상에서 유도한 미분방정식들을 수치해석하여 주어진 보-기둥의 제원에 대한 무차원 고유진동수  $C_i$  및 진동형  $\eta=\eta_i(\xi)$ 와 무차원 좌굴하중  $b_i$ 를 산출할 수 있는 FORTRAN 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 먼저 자유진동 문제에 대한 수치해석 알고리즘을 간단히 설명하면 다음과 같으며, 이러한 수치해석 알고리즘은 아치의 자유진동에 관한 문헌<sup>12,13)</sup>들에서 그 유용성이 확인된 바 있다.

- 1) 변단면의 기하학적 형상인  $n$ 값과 무차원 하중  $p$ 값을 입력하고  $\beta$ 값을 계산한다.
- 2) 미분방정식 (18.1)식에 불확정량인 고유치(eigenvalue)  $C_i$ 값을 가정하여 대입한다. 최초의 가정값은 "0"이다.
- 3) 경계조건 (19), (20)식을  $\xi=0$ 에서의 초기조건으로 하여 미분방정식 (18.1)식을  $\xi=0$ 에서  $\xi=1$ 까지 수치적분한다. 본 연구에서 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였다.
- 4) 수치적분의 결과로부터  $\xi=1$ 에서 (19), (20)식의 경계조건 만족여부를 나타내주는 행렬값  $D$ 를 계산한다. 만일  $D=0$ 이면 앞에서 가정한  $C_i$ 값은 자유진동의 고유치이며,  $D \neq 0$ 이면  $C_i$ 값을 앞에서 가정한 값보다 증가시켜 미분방정식에 대입한다.
- 5) 3), 4)단계를 반복수행하여  $D$ 값의 부호를 관찰하고 만일  $D$ 값의 부호가 바뀌면 참  $C_i$ 값은 마지막 두 가정값 사이에 존재한다.
- 6) Regula-Falsi method를 이용하여 참  $C_i$ 값에 근접한  $C_i$ 값을 계산한다.
- 7) Regula-Falsi method를 반복시행하여 수치해가 수렴조건을 만족하면 고유치  $C_i$ 값과 진동형  $\eta_i(\xi)$ 를 출력한다.

좌굴하중에 대한 미분방정식 (21)식의 수치해석방법도 위에서와 동일한 방법으로 수치해석하였다. 다만 좌굴하중 문제에서는 무차원 하중값  $p$ 값을 입력시키지 않으며, 미분방정식 (21)식에서 고유치는 무차원 좌굴하중  $b_i$ 가 된다.

### 4. 수치해석 예 및 고찰

수치해석 결과를 산출하기 전에 수치적분을 위한 단계길이(step size)  $\Delta\xi$ 를 산정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 그림 3은  $n=1.2$ ,  $p=5$ 일 때  $C_i$ 와 시간길이의 분할개수 ( $1/\Delta\xi$ )사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서  $1/\Delta\xi$ 이 20이상이면  $C_i$ 값은 충분한 정도(유효숫자 3자리)로 수렴하는 것을 알 수 있다. 즉 Runge-Kutta method를 이용하여 수치적분하는 경우  $\Delta\xi=0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 마찬가지로 좌굴문제에서도  $\Delta\xi=0.05$ 이면  $b_i$ 값은 역시 유효숫자 3자리의

정도로 수렴하였다. 그러나 본 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $\Delta\xi=0.02$  즉 시간길이의 분할갯수를 50으로 하여 수치해석하였다.

본 연구에서의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 문헌의 결과를 표 1에 비교하였다. 이 표에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구결과는 문헌값과 우수하게 접근하여 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

표 1. 수치해석결과의 검증

○자유진동문제*						○좌굴하중문제**			
제원	비교문헌	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	n	비교문헌	문헌값	본연구
n=1.2 p=0.	본연구	10.17	39.60	88.89	157.8	1	문헌[14]	b <sub>1</sub> =9.87	b <sub>1</sub> =9.87
	SAP90	10.17	39.60	88.90	157.8				
n=1.5 p=0.	본연구	10.38	39.14	88.22	156.6	2.32	문헌 [9]	B <sub>1</sub> =550lbs	B <sub>1</sub> =553lbs
	SAP90	10.38	39.15	88.22	156.7				

\* 축하중이 재하되어 있는 경우는 선형변단면의 경우에 \*\*  $V=9\pi/16 \text{ in}^3$ ,  $l=15.44 \text{ in}$ ,  $E=10 \times 10^6 \text{ psi}$  문헌값과 잘 일치하였다.

그림 4는 p=0인 경우 C<sub>i</sub>와 n사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 n값이 증가함에 따라 C<sub>i</sub> 값은 증가하다가 극치를 나타낸 후에 감소하고 있음을 알 수 있다. 모드별 C<sub>i</sub>값의 극치는 □표로 표시하였으며, 제1모드인 경우는 n=1.98에서 C<sub>1</sub>=10.41로 가장 큰 값을 보이고 있다. 이는 일정 체적을 갖는 변단면 보-기둥에서 가장 큰 제1고유진동수를 갖는 최적형상은 n=1.98일 때임을 의미한다. 또한 고차모드로 갈수록 더 작은 n값에서 최적형상이 이루어지는 것을 알 수 있다.

그림 5는 p=5(압축)와 p=-5(인장)인 경우에 C<sub>i</sub>와 n사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서도 ○표로 표시한 값은 극치를 나타낸 것으로 그림 4에 나타낸 n값과 동일한 값에서 극치를 나타내고

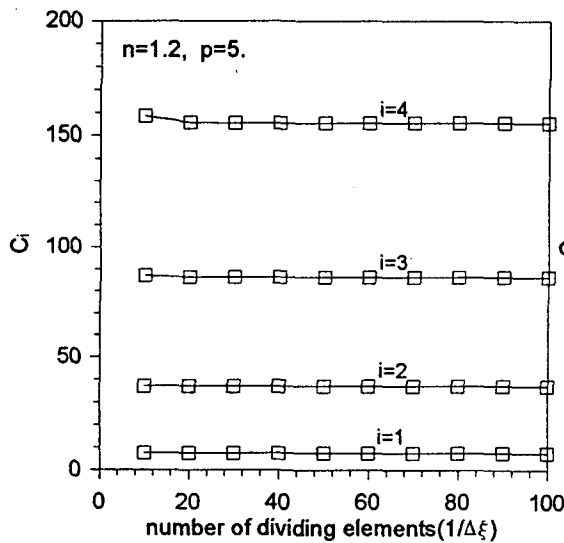


그림 3. 수렴해석

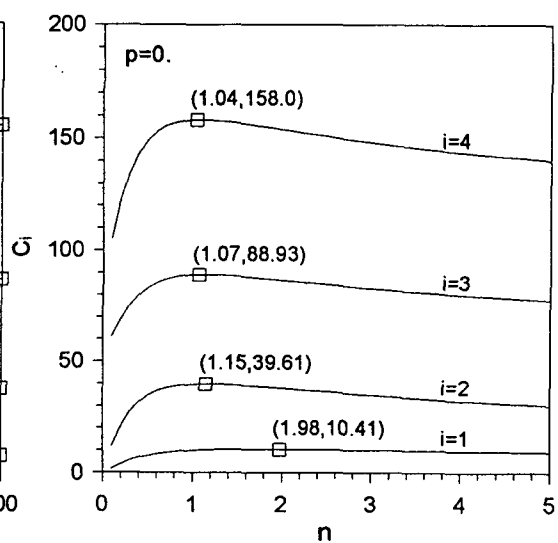


그림 4. C<sub>i</sub>-n곡선(p=0.)

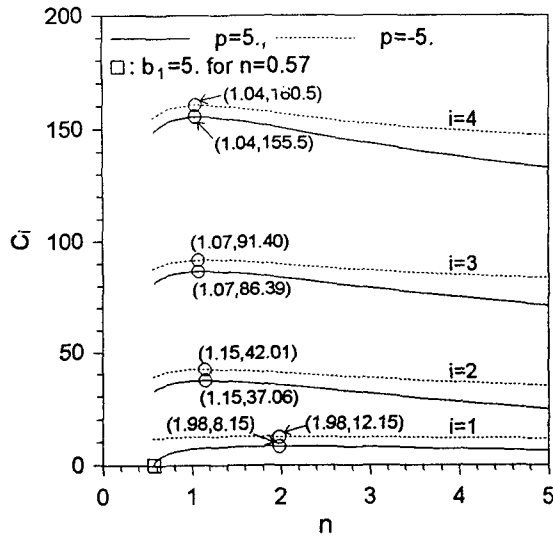


그림 5. C<sub>i</sub>-n곡선(p=5 및 p=-5.)

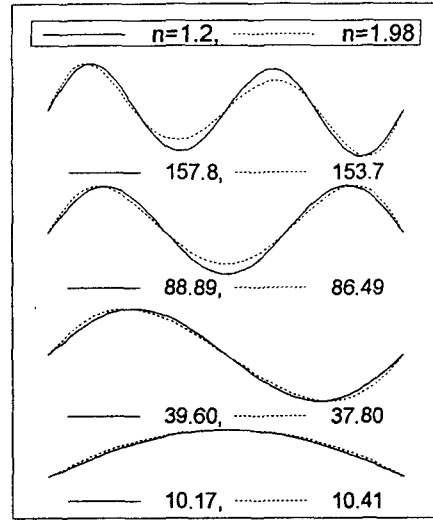


그림 6. 진동형의 예(p=0.)

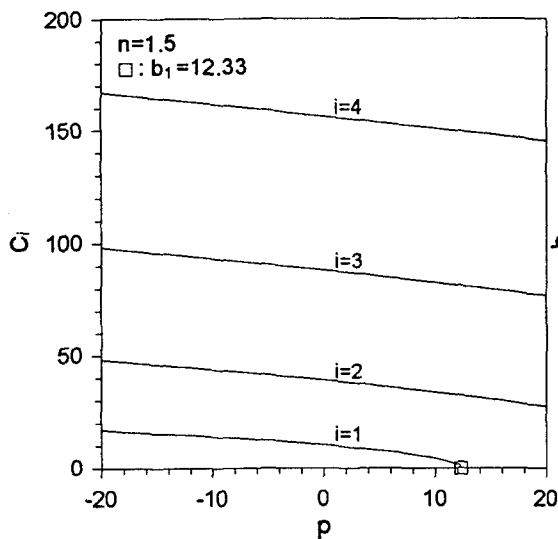


그림 7. C<sub>i</sub>-p곡선(n=1.5)

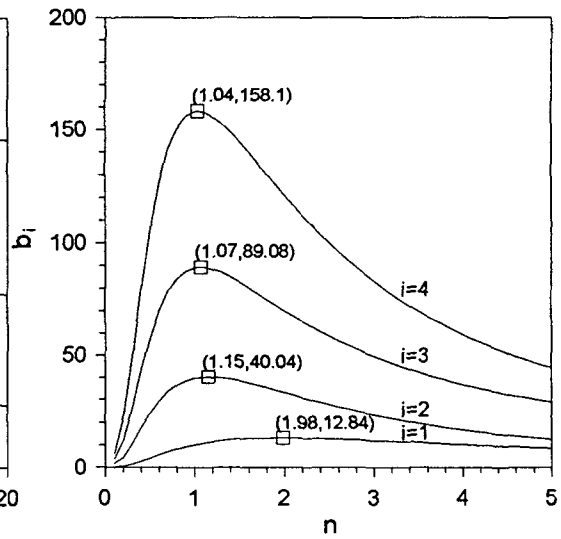


그림 8. b<sub>i</sub>-n곡선

고 있음을 알 수 있다. 이는 축하중의 작용여부에 관계없이 가장 큰 고유진동수를 갖는 최적형상은 항상 일정함을 의미한다. 또한 이 그림에서 p=5(실선)일 때 제1모드에서 □표로 표시한 n=0.57에서는 C<sub>1</sub>=0을 나타내고 있는데 이는 n=0.57인 경우 무차원 좌굴하중이 b<sub>1</sub>=5임을 의미한다. 따라서 n=0.57이하에서는 p=5가 작용하는 경우 좌굴되어 후좌굴거동을 보이게 된다. 그러나 p=-5인 경우는 축인장력이므로 고유진동수가 존재한다.

그림 6은 n=1.2와 n=1.98(최적형상)에 대하여 p=0인 경우의 진동형을 나타낸 것으로 1, 2모드에서는 큰 차이가 없으나 3, 4모드에서는 비교적 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

그림 7은 n=1.5에 대하여 C<sub>i</sub>와 p사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 축압축하중이 증가하는 경우 고유진동수는 감소하며, 축인장하중이 증가하는 경우는 고유진동수가 증가함을 알 수

있다. 따라서 보-기둥에 축하중을 적절히 가하므로서 고유진동수를 제어할 수 있다. 축하중  $p$ 가 계속 증가하여 □표로 표시한  $p=12.33$ 에 도달하게 되면  $C_1=0$ 이 되어 대상 보-기둥은 좌굴하게 되며, 이후 후좌굴거동을 하게 된다. 따라서 이때의 축하중은 대상 보-기둥의 무차원 제1좌굴하중을 의미한다.

그림 8은  $b_1$ 와  $n$ 사이의 관계를 나타낸 것으로  $n$ 값이 증가함에 따라  $b_1$ 값은 증가하다가 극치를 보인 후에 감소함을 알 수 있다. 이 그림에서 □표로 표시한 극치는 그림 4, 5에서의 동일한  $n$ 값에서 결정됨을 알 수 있다. 이는 최대의 정적 및 동적강성을 나타내는 최적형상은 동일함을 의미한다. 좌굴하중의 경우  $b_1$ 에서 좌굴이 발생하면  $b_2, b_3, b_4$ 는 사실상 무의미하며 일정체적을 갖는 보-기둥에서 가장 큰 하중능력을 보이는 최강기둥(strongest column)은  $n=1.98$ 인 경우로 이때의 무차원 좌굴하중은  $b_1=12.84$ 임을 알 수 있다.

## 5. 결론

이 연구는 일정체적을 갖는 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중에 관한 연구이다. 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 이용하여 단면의 반경이 포물선으로 변화하는 원형 단면을 갖는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였으며, 이로부터 대상 보-기둥의 좌굴하중을 지배하는 상미분방정식을 직접 유도하였다. Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 이용하여 유도된 미분방정식을 수치해석할 수 있는 알고리즘을 개발하였다. 실제 수치해석 예에서는 단순지지된 보-기둥에 대한 결과만을 나타내었으나, 본 연구방법은 다른 단부 조건 및 단면변화에 대해서도 쉽게 적용할 수 있다.

## 참 고 문 헌

1. Haftka R.T., Gürdal Z. and Kamat M.P., Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher, 1990.
2. Niordson F.I., "On the Optimal Design of a Vibrating Beam", Q. Appl. Math., Vol.23, 1965, pp.47-53.
3. Kamat, M.P. and Simitses, G.J., "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method", Int. J. Solids Struct., Vol.9, 1973, pp.415-429.
4. Kamt, M.P., "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.9, 1975, pp.51-62.
5. Keller, J.B., "The Shape of the Strongest Column", Archiv. Rat. Mech. and Anal., Vol. 5, 1960, pp.275-285.
6. Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B., "Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues", J. Appl. Mech., Vol.29, 1962, pp.159-164.
7. Keller, J.B. and Niordson, F.I., "The Tallest Column", J. Math. and Mech., Vol.16, 1966, pp.433-446.
8. Taylor, J.E., "The Strongest Column-An Energy Approach", J. Appl. Mech., Vol.34, 1967, pp.486-487.
9. Wilson, J.F., Holloway, D.M. and Biggers S.B., "Stability Experiments on the Strongest Columns and Circular Arches", Experimental Mechanics, 1971, pp.1-6.
10. Masur, E.F., "Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints", Int. J. Solids Struct., Vol.20, 1984, pp.211-231.
11. Clough, R.W. and Penzien, J., Dynamics of Structures, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1993.
12. Lee, B.K. and Wilson J.F., "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", J. Sound and Vibration, Vol.136, 1990, pp.75-89.

13. Wilson, J.F., Lee, B.K. and Oh, S.J., "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross Section", *Struct. Eng. and Mech.*, Vol.2, 1994, pp.345-357.
14. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.