

유한요소 - 경계요소 조합에 의한 지반매개변수 추정에 관한 연구

A Study on the Estimation of Underground Parameters
by Coupling of Finite and Boundary Elements

김 문 겸*, 장 정 범**, 오 금 호**
Kim, Moon Kyum Jang, Jung Bum Oh, Keum Ho

ABSTRACT

Behavior of underground structural systems is usually complicated because of various unknown parameters. In order to construct those structural systems safely and economically, exact identification of the system parameters and accurate analysis of the system behaviors are essentially required. In this study, a forward analysis program, which is able to eliminate numerical errors due to far field boundary effect, is developed by coupling finite and boundary elements. In this coupled analysis, boundary elements are used in the semi-infinite domain where stress variation is small, and finite elements in the stress concentration region where material nonlinearity should be considered. Then, a back analysis program which can identify the system parameters is developed using the direct method to be combined with the forward analysis program. The elastic modulus and initial stress, which are most important in the description of the behavior of underground structures, are taken as the system parameters. A simple example is examined to show that the method can be used effectively.

1. 서론

유한요소법이나 유한차분법과 같은 수치해석 방법이 최근에 와서 다양하고도 복잡한 구조물의 설계와 해석에 있어서 필수불가결한 도구가 되었다. 이러한 수치해석을 수행하는 목적은 여러 하중조건하에서 가능한한 구조물의 거동을 정확하게 모형화하여 해석결과를 설계목적에 맞게 효율적으로 사용하기 위함이다. 따라서, 해석대상을 정확히 모형화하고, 구조물의 거동을 지배하는 다양한 매개변수들을 적절히 정의하는 것은 매우 중요하다고 할 수 있다.

특히, 지하구조체는 지하에서 지반굴착과 함께 구조체를 형성하게 됨에 따라 구조물 - 지반 - 지하수 등 다상 (multi-phase) 의 구조체를 형성하게 되며 복합적 구조체 내에서 다양한 미지변수에 의하여 거동을 하게 된다. 이러한 구조체를 안전하고 경제적으로 형성시키기 위해서는 구조체 구성인자의 정확한 파악 (identification) 과 파악된 구조체의 거동에 대한 정확한 해석이 필수적으로 요구된다. 따라서, 재료특성이나 하중조건 등을 나타내는 매개변수를 실험실 시험에 의한 입력자료로서 정의하는 것이 아니라, 실제 구조물의 시공 중 발생하는 계측자료를 활용함으로써 정의하는 방법이 제안되어 연구되고 있다. 이러한 접근방법을 역해석 (back analysis) 이라 부른다.

본 연구에서는 해석영역과 경계조건에 따른 수치해석상의 오차를 소거하기 위하여 응력의 변화율이 작은 반무한 영역에서는 경계요소해석을 수행하고 재료의 비선형성을 고려해야 하는 응력집중부에는 유한요소해석을 수행하는 유한요소와 경계요소를 조합한 정해석 프로그램을 개발하여 재료의 비선형성을 효과적으로 수치모형화하여 경제적이고 합리적인 해석을 하도록 한다. 또한, 개발된 정해석 프로그램에 다양한 지반모델을 적용할 수 있는 직접법을 조합하여 지하구조물의 해석에서 그 영향이 큰 탄성계수와 초기응력을 추정하는 역해석 프로그램을 개발하고자 한다.

2. 유한요소와 경계요소의 조합

영역을 유한개의 요소로 이산화하여 해를 구하는 유한요소법은 지하구조물의 수치해석에서 자주 만나게 되는 복잡한 구성법칙, 비균질성, 비등방성, 비선형재료 등을 모형화할 수 있다. 그러나, 경계의 영향이 굴착부 주변의 응력, 변형률, 변형 등의 해석에 영향을 미치지 않도록 무한영

* 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

** 연세대학교 공과대학 토목공학과 대학원 박사과정

역에 경계조건을 모형화하는 것에는 적합하지 않다. 하지만, 경계요소법은 반무한영역에서의 경계조건이 기본해에 의하여 정확히 만족하고, 경계만을 이산화함으로써 해석이 효율적이고 경제적이다. 그러나, 기본해가 선형, 탄성의 균질한 영역에만 적용할 수 있다는 단점을 가지고 있어 복잡한 시공단계와 재료의 시간의존 특성 및 비선형성을 고려하기 어렵다는 단점을 가지고 있다.

따라서, 본 연구에서는 두 방법의 장점만을 취하여 응력이 집중하여 재료의 비선형성이 예상되는 굴착부 주변은 유한요소모형을, 응력변화가 미약하여 재료의 선형거동이 예상되는 반무한영역에서는 경계요소모형을 적용하여 합리적이고 효율적인 수치해석을 수행하도록 한다.

물체력과 초기응력이 존재하는 경우의 경계요소 및 유한요소에서의 계방정식은 다음과 같다.

$$[H] \{u\} = [G] \{t\} + \{B\} - \{S\} \quad (1)$$

$$[K] \{u\} = \{F\} + [M] \{g\} - \{F^0\} \quad (2)$$

식 (2) 에서 물체력과 초기응력의 항을 $\{D\}$ 로 정의하면 다음과 같은 계방정식을 얻는다.

$$[K] \{u\} = \{F\} + \{D\} \quad (3)$$

여기서, $\{u\}$ 와 $\{t\}$ 는 절점변위와 표면력이며 $\{B\}$ 와 $\{S\}$ 는 물체력과 초기응력에 대한 항이다. 또한, $[H]$ 와 $[G]$ 는 점병치과정을 차례로 경계절점에 적용하여 미지의 u, q 에 대해 기본해와 형상함수를 사용함으로써 얻어지는 행렬이다. 또한, $[K]$ 는 강성도행렬, $\{u\}$ 는 절점변위, $\{F\}$ 는 외부에서 가해진 하중에 의한 등가 절점하중, $\{D\}$ 는 물체력과 초기응력에 대한 항이다.

유한요소와 경계요소를 조합하는 방법은 일반적으로 두가지가 있으나, 본 연구에서는 경계요소의 계방정식을 유한요소의 계방정식 형태로 변환하여 조합하는 방법을 사용한다. 또한, 유한요소와 경계요소를 조합하기 위해서는 두 요소의 접합면을 따라 변위와 표면력이 연속적이어야 한다는 적합조건 (compatibility condition) 과 평형조건 (equilibrium condition) 이 만족되어야 한다.

식 (3) 에서 등가절점하중 $\{F\}$ 를 변위에 사용하였던 형상함수를 사용하여 표면력의 항으로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[H]_{FE} \{u\}_{FE} = [H] \{t\}_{FE} + \{D\}_{FE} \quad (4)$$

식 (1) 과 같은 경계요소의 계방정식을 유한요소 형태의 계방정식으로 변환시키기 위하여 식 (1) 의 양변에 $[N] [G]^{-1}$ 을 곱하면 다음과 같다.

$$[N] [G]^{-1} [H] \{u\} - [N] [G]^{-1} (\{B\} - \{S\}) = [N] \{t\} \quad (5)$$

여기서, 식 (5) 의 각 항을 다음과 같이 정의한다.

$$[K]' = [N] [G]^{-1} [H] \quad (6)$$

$$[D]' = [N] [G]^{-1} (\{B\} - \{S\}) \quad (7)$$

$$\{F\}' = [N] \{t\} \quad (8)$$

이로부터 식 (5) 는 다음과 같은 유한요소형태의 계방정식으로 변환된다.

$$[K]_{BE}' \{u\}_{BE} = \{F\}_{BE}' + \{D\}_{BE}' \quad (9)$$

그러나, 식 (9) 에서 $[K]'$ 행렬이 비대칭행렬이 되는데, 본 연구에서는 계산상의 편의와 효율성을 위해 에너지 접근방법을 사용하여 $[K]'$ 행렬을 대칭화하도록 한다.

에너지 접근방법으로 구한 $[K]$ 는 다음과 같다.

$$[K]_{BE} = \frac{1}{2}([N][C] + [C]^T[N]^T) \quad (10)$$

여기서, $[C] = [G]^{-1}[H]$ 이다.

유한요소와 경계요소의 접합부분에서 공유하는 절점에 대하여 강성도와 하중을 조합하여 전체 강성도행렬과 하중행렬을 구성하면 다음과 같이 유한요소 형태로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} ([K]_{FE} + [K]_{BE})(\{u\}_{FE} + \{u\}_{BE}) \\ = \{F\}_{FE} + \{F\}_{BE} + \{D\}_{FE} + \{D\}_{BE} \end{aligned} \quad (11)$$

이로부터 식 (11) 을 전체 강성도행렬과 하중형태로 나타내면 식 (12) 와 같다.

$$[K]_C \{u\}_C = \{F\}_C + \{D\}_C \quad (12)$$

여기서 $[K]_C$ 는 조합된 전체 강성도행렬, $\{u\}_C$ 는 조합된 전체 변위, $\{F\}_C$ 는 조합된 전체 외부하중, $\{D\}_C$ 는 조합된 전체 물체력과 초기응력을 나타낸다.

3. 조합해석 프로그램의 검증

본 연구에서 개발한 조합해석 기법의 신뢰성을 검토하기 위하여 동일한 해석모형에 대한 다른 연구결과와 비교검토하도록 한다. 비교대상으로 그림 1 과 같은 해석모형을 설정하였으며, 다른 연구결과로는 Hinton 의 유한요소해석 결과와 미국의 ITASCA 사에서 개발되어 국내에서 터널해석용으로 많이 사용되고 있는 FLAC (Fast Lagrangian Analysis of Continua) 을 사용하여 터널 주변부의 변위 및 소성 발생영역을 비교함으로써 프로그램의 신뢰성을 확인하도록 한다.

프로그램의 검증을 위하여 설정된 모형은 그림 1 에 도시한 바와 같이 지표로부터 원공의 중심이 33.0 m 의 깊이에 위치한 반경이 3.0 m 인 원형터널이며, 반무한경계를 가진 문제이다. 해석에 사용된 대상영역의 지반물성은 표 1 과 같다.

해석모형에 대한 수치해를 구하기 위하여 조합해석 프로그램은 그림 2 와 같은 해석요소망을 구성하였으며, 검증용 유한요소 해석프로그램의 해석모형은 그림 3, FLAC 의 해석모형은 그림 4 와 같다.

표 1 해석모형에 사용한 지반물성

탄성계수	단위중량	포아손비	점착력	내부마찰각	인장강도	정지토압계수
30,000 tonf/m ²	2.0 tonf/m ³	0.35	20 tonf/m ²	30°	10 tonf/m ²	0.5

앞에서 서술한 해석모형에 대해 수치해석을 수행한 결과를 터널 주변부에서 발생한 수평 및 수직변위로 그림 5 및 그림 6 에 도시하였다.

그림에 도시한 바와 같이 세 경우에 대한 해석결과가 거의 일치하는 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 그러나, 유한요소해석 결과가 상대적으로 다른 해석방법에 비하여 작은 수직변위를 보이는 것은 유한요소해석시 인위적인 경계조건의 설정으로 인하여 실제 지반보다 강성이 크게 모형화되기 때문인 것으로 판단된다.

또한, 비선형성이 발생하는 경우에 대한 조합해석기법의 타당성을 검증하기 위하여 소성영역 발생범위를 유한요소해석 결과와 함께 그림 7 에 도시하였다. 그림 7 에서 알 수 있는 바와 같이 소성영역의 발생범위도 조합해석결과와 유한요소해석 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 역해석

지하구조에서의 문제들 대부분이 반무한의 영역을 가지고 있으므로, 전영역을 유한개의 요소로 이산화하는 기존의 수치해석방법에서 인위적인 경계조건 설정에 따른 오차는 필수불가결하다. 또한, 지반물성도 보오링자료와 채취시료의 실험실 시험에 의해 결정되고 있으나 이는 현지의 지반상황을 제대로 반영하지 못하여 수치해석시 해석자의 주관적 입장이 반영된 지반물성을 사용하는 경우가 많다. 특히, 지하구조문제들은 굴착과 관련된 경우가 대부분이며 이 경우 등가하중으로 변환되는 초기응력상태를 파악하는 것도 매우 중요하다.

본 연구에서는 해석영역의 기하학적 조건은 앞에서 타당성을 검증한 바 있는 조합해석기법을 사용함으로써 해결하였다. 따라서 시공중 발생하는 계측변위를 입력자료로 하여 지반물성과 초기응력을 역해석의 대상으로 하며, 지반물성중에서도 지하구조체의 거동에 영향이 큰 탄성계수를 대상으로 한다.

본 연구의 적용대상은 지하구조물로, 이 경우 굴착에 따른 굴착부 주변의 소성거동에 따른 비선형의 발생은 필수불가결하다. 따라서, 본 연구에서는 역해석방법 중 다양한 지반모델에 대하여 적용이 가능한 직접법을 역해석방법으로 하였다.

직접법은 계산변위 u_i 와 계측변위 \bar{u}_i 에 의해 구성된 식 (13) 과 같은 오차함수 (error function) 를 최소화하는 매개변수를 반복연산에 의하여 찾아내는 방법이다.

$$Error = \left\{ \sum_{i=1}^n [u_i - \bar{u}_i]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

여기서, n 은 계측수이다.

계산변위 u_i 는 지반의 강성을 나타내는 재료상수들의 함수로 나타낼 수 있기 때문에, 직접법은 이러한 재료상수를 매단계 보정함으로써 오차함수가 최소화 되는 값을 찾아내는 것이다. 이러한 오차함수가 최소화되도록 미지의 매개변수를 보정하는 방법은 다음과 같다.

- 1 단계 : 매개변수 V_i 에 대한 적당한 값을 입력하여 구조계의 초기조건을 정의한다. 여기서, i 는 매개변수의 수이다. 이때 반복연산횟수 j 는 0 으로 놓는다.
- 2 단계 : 반복연산횟수 $j=j+1$ 로 증가하며, j 번째 매개변수의 입력치로 그에 따른 새로운 변위 및 응력을 계산한다.
- 3 단계 : j 번째 입력치를 사용하여 계산된 변위와 응력이 계측변위와 일치하지 않는 경우, 다음과 같이 보정계수를 사용하여 매개변수를 수정한다.

$$V_i^{(j)} = V_i^{(j-1)} \times \beta_i^{(j)} \quad (14)$$

여기서, 보정계수 $\beta^{(j)}$ 는 계측변위 \bar{u} 와 계산변위 u 에 의하여 정의될 수 있다.

$$\beta_i^{(j)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{u_k^{(j-1)}}{u_k} \quad (15)$$

여기서 K 는 계측점의 수이다.

이러한 과정들을 계측변위와 계산변위가 일치하여 오차함수가 허용범위 내로 수렴할 때까지 반복적으로 수행하게 된다.

5. 역해석 프로그램의 검증

개발한 역해석 프로그램의 신뢰성을 검토하기 위하여 정해석을 수행한 결과를 계측변위로 입력하여 탄성계수와 초기응력을 역해석하도록 한다. 역해석에서 나온 결과를 정해석에 사용한 물성과 비교함으로써 프로그램의 타당성을 확인하도록 한다. 역해석 프로그램의 검증을 위하여 사용한 모형은 그림 8 에 도시한 바와 같이 지표로부터 원공의 중심이 22.5 m 의 깊이에 위치한 반경

이 2.5 m 인 원형터널이다. 해석에 사용된 해석영역의 지반물성은 표 2 와 같으며, 해석모형은 그림 9 와 같다. 역해석의 입력자료인 계측변위로 정해석 결과를 사용하기 위하여 표 2 의 지반물성을 사용하여 해석을 수행하였다. 이때, 산정된 터널 주변부의 변위가 계측변위로 입력되고 사용된 지반물성이 역해석 결과의 정확한 해가 되는 것이다.

그림 10 에서 보는 바와 같이 1 번 절점의 수직변위를 천단침하로, 4 번 절점의 수평변위를 내공변위로, 7 번 절점의 수직변위를 저면변위로 하여 계측자료로 사용하도록 한다. 표 3 은 역해석에 사용할 계측자료인 각 절점에서의 변위를 나타낸 것이다.

표 2 해석모형에 사용한 지반물성

탄성계수	단위중량	포아손비	점착력	내부마찰각	인장강도	정지토압계수
392 Mpa	2.1 tonf/m ³	0.3	50 Kpa	20°	25 Kpa	0.5

표 3 계측변위

계측항목	천단변위	내공변위	저면변위
크기 (mm)	-4.93	-2.43	7.27

표 3 의 계측변위를 역해석의 입력자료로 하여 탄성계수와 초기응력을 역해석한 결과를 그림 11 및 그림 12 에 나타내었다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 탄성계수와 초기응력은 12 회의 반복연산에 의하여 거의 정확히 역해석되고 있음을 알 수 있다. 그림 13 은 탄성계수와 오차합수의 관계를, 그림 14 는 초기응력과 오차합수의 관계를 도시한 것이다.

6. 결론

본 연구의 결과, 지하구조체와 같이 반무한영역의 경계조건을 가지고 굴착부 주변에만 응력이 집중하는 경우에 반무한영역은 경계요소를 사용하고 응력집중이 큰 굴착부 주변은 유한요소를 사용하는 조합해석프로그램을 개발하였다. 개발된 조합해석 프로그램을 유한요소해석과 FLAC 해석결과와 비교하여 본 연구에서 개발한 프로그램이 지하구조물의 해석에 효율적으로 사용될 수 있음을 보였다. 또한, 지하구조물의 시공 중 발생하는 계측자료를 이용하여 지반물성을 추정하는 역해석 프로그램을 개발하여 검증함으로써 시공 중 지하구조물의 안정성해석에 가용될 수 있음을 보였다.

참고문헌

1. Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W. and Bettess, P., " The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures ", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, 1977, pp. 355 - 375.
2. Brebbia, C. A. and Gergiou, P., " Combination of Boundary and Finite Elements in Elastostatics ", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 3, 1979.
3. Beer, G., " Implementation of Combined Boundary Element - Finite Element Analysis with Applications in Geomechanics ", *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 4, Elsevier, 1986, pp. 191 - 225.
4. Gioda, G. and Sakurai, S., " Back Analysis Procedures for the Interpretation of Field Measurements in Geomechanics ", *Int. J. of Numerical Analysis Methods Geomechanics*, 11, 1987, pp. 555 - 583.
5. Cividini, A., Jurina, L. and Gioda, G., " Some Aspects of Characterization Problems in Geomechanics ", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.* 18, 1981, pp. 487 - 503.
6. Sakurai, S. and Takeuchi, K., " Back Analysis of Measured Displacements of Tunnels ", *Rock Mech. Rock Eng.* 16, 1983, pp. 173 - 180.
7. Yang, L. and Sterling, R. L., " Back Analysis of Rock Tunnel Using Boundary Element Methods ", *J. of Geotech. Eng. Div. ASCE*. 115, 1989, pp. 1163 - 1169.

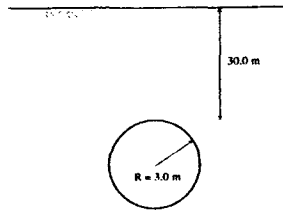


그림 1. 해석모형

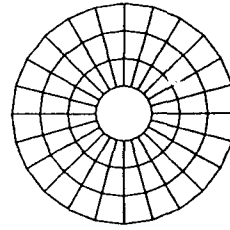


그림 2. 조합해석모형

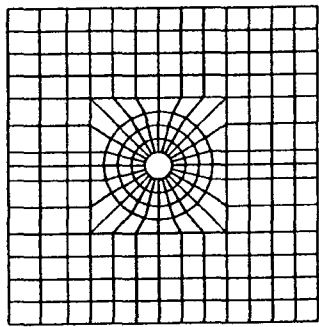


그림 3. 유한요소모형

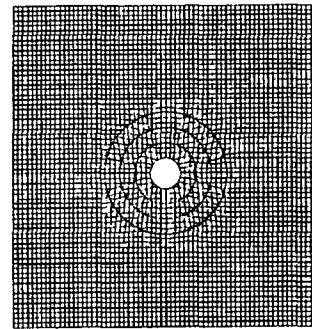


그림 4. FLAC 해석모형

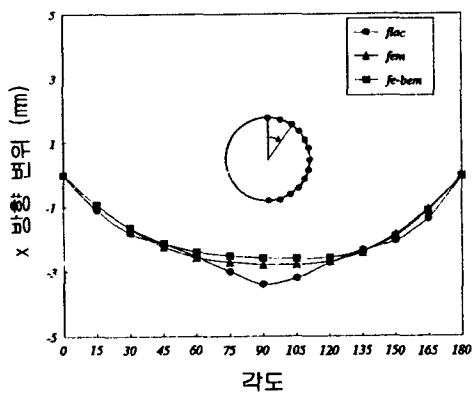


그림 5. 수평방향변위

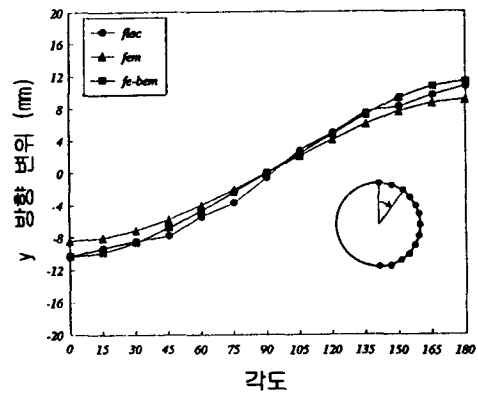


그림 6. 수직방향변위

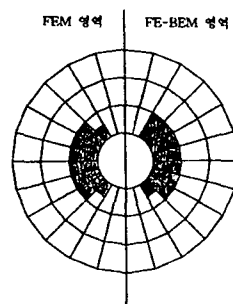


그림 7. 소성영역 비교

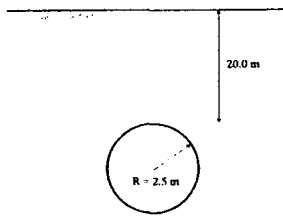


그림 8. 해석모형-역해석

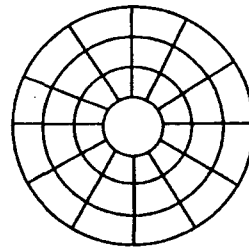


그림 9. 조합해석모형-역해석

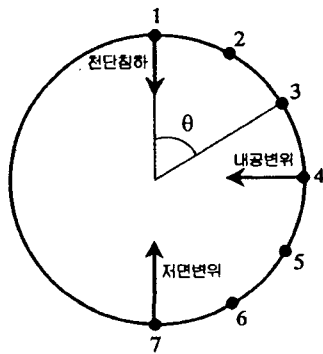


그림 10. 계측변위

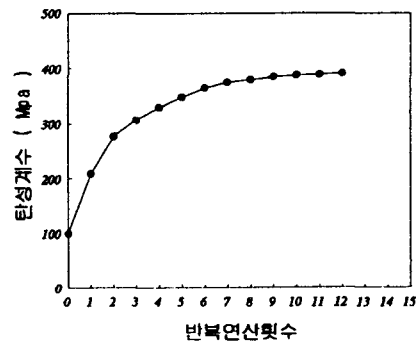


그림 11. 탄성계수의 역해석

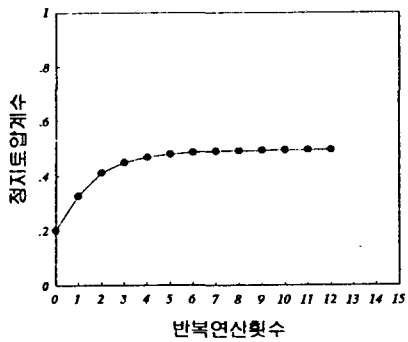


그림 12. 정지토압계수의 역해석

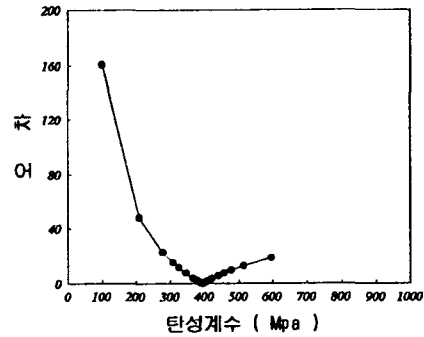


그림 13. 탄성계수와 오차함수의 관계

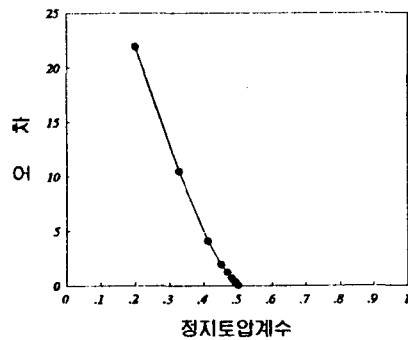


그림 14. 정지토압계수와 오차함수의 관계