

회전자유도를 가지는 3차원 변절점 고체요소의 개발 3D Variable Node Solid Elements with Drilling Degrees of Freedom

최 창근*
Choi, Chang-Koon

정 근영**
Chung, Keun-Young

ABSTRACT

A new three-dimensional transition solid element with drilling degrees of freedom is presented. The proposed transition element is established by adding variable nodes to a basic 8-node element for an effective connection between the refined region and the coarse. The derivation of the element in this paper is based on the variational principles in which the drilling rotations are introduced as independent variables. This element was also improved through the addition of modified non-conforming modes. Numerical examples show that performance of the element and the applicability to 3D adaptations are satisfactory.

1. 서론

3차원 연속체를 해석함에 있어서 그 기하학적인 난이성 때문에 유한요소 모델링은 매우 복잡하다. 따라서 작은 절점을 가지고 해석의 정확성을 높이는 고체요소의 개발은 매우 중요하다고 할수 있다. 따라서 본 연구에서는 회전자유도를 3차원 고체요소(solid element)에 도입하여 조악한 요소망과 조밀한 요소망사이에 존재하는 변이지역(transition zone)의 연결에 유용하게 쓰일수있는 회전자유도(drilling degrees of freedom)를 가지는 3차원 변절점(variable node) 고체요소를 개발하였다. 회전자유도를 가지는 면(in-plane)요소 혹은 고체(solid)요소는 3차원 해석에 있어서 특히 유용하다고 할수 있다. 3차원해석에 있어서 회전자유도를 가지는 공간보요소, 쉘요소등이 같이 쓰이는 경우에 있어서 이들 요소간의 연결을 쉽게 처리해 줄 수있다.본연구에서 개발된 요소는 회전 자유도의 도입에 의하여 한절점에서 6개의 자유도를 가진다.

2. 회전변위를 도입하기 위한 범함수

본 연구에서 개발하고자 하는 3차원 변절점 요소는 그림 1에서 살펴볼 수 있듯이 요소변에 변절점을 가진다.8개의 꼭지절점 이외의 절점들은 변절점이며 필요에따라 추가시켜 사용한다. 본연구에서 사용한 변분법은 Hughes와 Brezzi^[2]에 의해서 제안된 방법을 따랐다. 이 변분법에서는 응력장 σ 는 대칭이란 조건이 가정되지 않는다. 그리고 변위장 u 외에도 반대칭 텐서(skew-symmetric tensor)인 회전변위장 ψ 를 추가적으로 사용한다. 회전변위장은 응력장의 반대칭성분과 서로 상보(complementary role) 관계이다.

Problem(M)

$$\begin{aligned} \Pi'_\gamma(u, \psi, skew \sigma) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (symm \nabla u) \cdot C \cdot (symm \nabla u) d\Omega + \int_{\Omega^e} skew \sigma^T \cdot (skew \nabla u - \psi) d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \int_{\Omega^e} |skew \sigma|^2 d\Omega - \int_{\Omega^e} u \cdot f d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

Problem(D)

$$\tilde{\Pi}_r^*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^r} (\text{symm } \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{symm } \nabla \mathbf{u}) d\Omega - \frac{1}{2} \gamma \int_{\Omega^r} |\text{skew } \nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}|^2 d\Omega - \int_{\Omega^r} \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad (2)$$

3. 변절점요소의 보간

범함수에 나오는 변위장(displacement field) 및 회전장(rotational field)은 다음과 같은 벡터의 형태로 정의가 가능하다.

$$\text{symm } \nabla \mathbf{u} = \langle u_{1,1} \ u_{2,2} \ u_{3,3} \ u_{1,2} + u_{2,1} \ u_{2,3} + u_{3,2} \ u_{1,3} + u_{3,1} \rangle^T \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle^T \quad (4)$$

$$\text{skew } \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \langle u_{3,2} - u_{2,3} \ u_{1,3} - u_{3,1} \ u_{2,1} - u_{1,2} \rangle^T \quad (5)$$

또한 요소의 좌표는 다음과 같은 방법에 의해 n -절점 변절점 요소의 기하학적인 형상을 보간하게 된다.

$$\mathbf{x} = \sum_{I=1}^n N_I^*(r, s, t) \mathbf{x}_I \quad (6)$$

여기서 \mathbf{x} 는 전체좌표계에서의 좌표이고, N_I 는 n -절점 변절점 요소의 등매개변수 형상함수^[4]이다(그림 1).

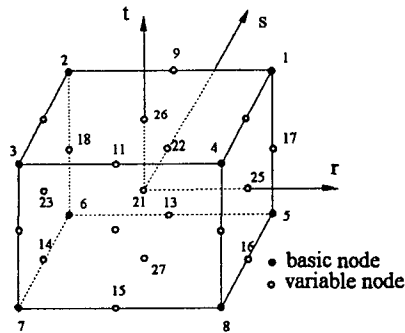


그림 1. 변절점 고체요소의 형상과 절점 번호

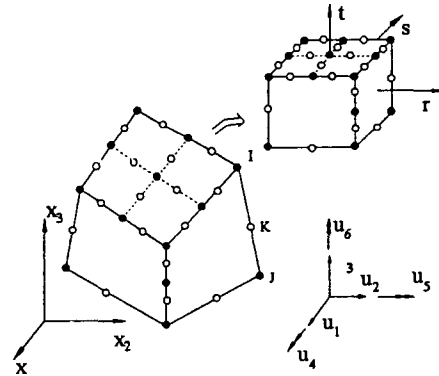


그림 2. 회전자유도를 가지는 변절점 고체요소

변위장의 보간은 그림 2와 같은 모요소(parent element)로 부터 유도된다. 이 변위장은 계층적인 형상함수와 등매개형상함수를 이용하여 보간된다.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^n N_I^*(r, s, t) \mathbf{u}_I + \sum_{k=n+1}^{n+m} N_k^{**}(r, s, t) \Delta \mathbf{u}_k \quad (7)$$

여기서 $\Delta \mathbf{u}_k$ 는 계층변위(hierarchical displacement), N_k^{**} 는 인근의 절점을 잇는 선을 따라 포물선의 형상을 가지는 특수한 계층함수, m 은 특수 계층형상 함수의 수이다. 이러한 계층변위들 중 절점과 절점을 잇는 선에 수직인 변위 성분들은 요소절점에서의 회전자유도 $\boldsymbol{\psi}_I$ 를 도입함으로써 제거할수있게된다. 이러한 특수계층변위는 변환행렬을 도입함으로써 체계적으로 구성된다. 요소절점 I와 J를 잇는 선의 중앙에 있는 가상절점K의 계층변위의 회전변위로의 변환은 아래와 같이 표현된다.

$$\Delta u_K = T_U(\psi_I - \psi_J) + l_U \Delta u_{IK} \quad (8)$$

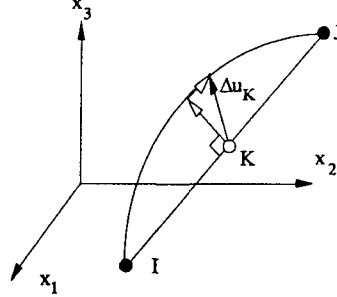


Fig 3. 절점과 절점을 잇는 선의 1차원적인 형태

여기서

$$T_U = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & \Delta x_{3U} & -\Delta x_{2U} \\ -\Delta x_{3U} & 0 & \Delta x_{1U} \\ \Delta x_{2U} & -\Delta x_{1U} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta x_U = x_J - x_I \quad (10)$$

$$l_U = \frac{1}{l_U} \Delta x_U \quad (11)$$

또한 l_U 는 절점 I와 J를 잇는 선의 길이이다. 그리고 (8)식의 오른쪽 첫째항은 가상절점 K에서의 절점간을 잇는 선에 수직인 변위성분이며, 둘째항은 접선방향의 비적합변위로 설명할 수 있다.

$$u^h = \sum_{I=1}^n N_I^e(r, s, t) u_I + \sum_{K=n+1}^{n+m} N_K^e(r, s, t) T_U(\psi_I - \psi_J) + \sum_{K=n+1}^{n+m} N_K^e(r, s, t) l_U \Delta u_{IK} \quad (12)$$

여기서 만약 선의 접선방향의 변위를 인근 절점 I와 J에서의 변위의 평균값으로 가정한다면 접선방향의 비적합 변위형은 무시된다. 이와 같은 비적합 변위형 외에도 요소의 거동을 보다 개선하기 위해 회전변위를 갖는 고체요소에도 비적합변위형을 추가할수있다.

$$(1-r^2)(1-s^2)(1-t^2) \quad (13)$$

혹은

$$(1-r^2)(1-s^2), (1-s^2)(1-t^2), (1-r^2)(1-t^2) \quad (14)$$

위와 같은 비적합변위형은 변절점의 존재 여부에 따라 적절히 수정되어서 사용되어야 한다. 이러한 수정은 변절점의 존재 여부에 따라 결정되는 형상함수를 비적합 변위형으로 부터 소거하는 것이다.

요소내의 임의의 점에서의 회전장은 앞서 언급한 변위장과는 독립적으로 보간되는데, 이때에는 등매개 형상함수를 이용하여 절점 회전변위로부터 보간한다.

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = h = \sum_{I=1}^n N_I^e(r, s, t) \quad (15)$$

혼합정식화법에서 사용되는 반대칭 응력장의 보간은 변위장이나 회전장의 보간과는 독립적으로 보간된다. 반대칭 응력장의 보간은 전체좌표계를 통하여 선형 또는 2차 함수로써 가정이 가능하다.

$$skew \sigma^h = S^e \sigma_0^e \quad (16)$$

$$H_2(s,t) = H_2(s,t) + \frac{1}{4}\{(1-|s|)(1-|t|)\} \quad (24)$$

유사한 방법으로 절점4의 +s, and -t 방향의 모서리들과 다른 꼭지절점에 대해 형상함수를 구성한다.

4.2 모서리 중간 절점의 특수계층함수

그림 1에서 변절점 11번이 존재한다면 -r 과 +r 방향의 모서리를 따라 포물선을 같은 형상함수는 앞서의 꼭지절점에서 구성한 함수와 동일하다. 변절점 9번이 존재하는 경우에 +s방향의 포물선 형상을 가지는 경우는 아래식과 같다..

$$N_{11,+r}^{**}(r,s,t) = H_1(s)H_2(r,t) \quad (25)$$

여기서

$$H_1(s) = \begin{cases} 2(|s|-s)(1+s) & \text{if node 26 exist} \\ 1-s^2 & \text{if no node 26} \end{cases} \quad (26)$$

$$H_2(r,t) = \frac{1}{2}(1-|r|)(1+t) \quad (27)$$

식(27)은 만약 절점 번호 21이 존재하거나 22와 24가 동시에 존재하는 경우에 다음과 같은 수정이 필요하다.

$$H_2(s) = H_2(s) - \frac{1}{2}\{(1-|r|)(1-|t|)\} \quad (28)$$

4.3 면중앙절점의 특수 형상함수

만약 그림 1의 변절점 24가 존재한다면 -r, +r, -t, 그리고 +t 방향의 계층함수들의 앞서의 경우와 유사하다. 변절점 22가 존재하여 +s 방향의 계층함수를 정의 가능한 경우는 다음과 같다.

$$N_{24,+s}^{**}(r,s,t) = H_1(s)H_2(r,t) \quad (29)$$

여기서

$$H_1(s) = \begin{cases} 2(|s|-s)(1+s) & \text{if node 21 exist} \\ 1-s^2 & \text{if no node 21} \end{cases} \quad (30)$$

$$H_2(s,t) = (1-|s|)(1-|t|) \quad (31)$$

이 경우에는 추가적인 수정이 불필요하다.

4.4 요소내부절점의 특수계층함수

만약 요소내부절점인 21번 절점이 존재한다면, 앞서와 유사하게 -r, +r, -s, +s, -t, 와 +t의 6방향의 선을따라 각각의 형상함수들이 구성된다. 이때의 포물선 모양의 성분은 $2(|r|+r)(1-r)$, 혹은 $2(|r|-r)(1+r)$ 와 같은 형태이고, 선형부분에 해당하는 형상함수의 성분은 $(1-|s|)(1-|t|)$ 와 같은 형태이다.

5. 요소 강성행렬

행렬형태로 표현한 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{symm } \nabla u^e = \sum_{I=1}^n (B_I^e u_I + G_I^e \psi_I) + \sum_{K=1}^m R_K^e \Delta u_{IK} \quad (32)$$

여기서 u_I , ψ_I , 와 Δu_{IK} 는 각각 절점변위와, 절점회전 변위, 그리고 접선방향의 비적합변위이다. 절점 I에서의 변형률-변위 관계행렬 및 변형률-회전변위 관계행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$B_I^{eT} = \begin{bmatrix} N_{I,x_1}^e & & N_{I,x_2}^e & & N_{I,x_3}^e \\ & N_{I,x_2}^e & & N_{I,x_1}^e & & \\ & & N_{I,x_3}^e & & N_{I,x_1}^e & \\ & & & N_{I,x_3}^e & & N_{I,x_1}^e \end{bmatrix} \quad I=1,2,\dots,n \quad (33)$$

$$G_I^e = \sum_{\alpha\beta\gamma} B_K^e T_{\alpha\beta\gamma} \quad (34)$$

그리고 접선 비적합 변위에 의한 변형률-변위 관계행렬은 접선방향을 따라 다음과 같이 정의할수 있다.

$$R_K^{eT} = \frac{1}{l_U} [\Delta x_{1U} N_{\epsilon_n}^e \quad \Delta x_{2U} N_{\epsilon_n}^e \quad \Delta x_{3U} N_{\epsilon_n}^e \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (35)$$

위의 식에 나타난 관계행렬 G_I^e 와 R_K^e 는 통상적이지 않은 형상함수의 사용으로 인한 locking을 피하기 위해 수정되어야한다. 이러한 수정은 잘알려진 B-bar 방법^[9]과 유사하다.

$$\bar{G}^e = G^e - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} G^e d\Omega \quad (36)$$

$$\bar{R}^e = R^e - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} R^e d\Omega \quad (37)$$

회전장을 표현하기 위한 반대칭 변위 경사의 경우는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{skew } \nabla u^e &= \sum_{I=1}^n (A_I^e u_I + F_I^e \psi_I) + \sum_{K=1}^m Q_K^e \Delta u_{IK} - \sum_{I=1}^n N_I^e \psi_I \\ &= \sum_{I=1}^n (A_I^e u_I + \hat{F}_I^e \psi_I) + \sum_{K=1}^m Q_K^e \Delta u_{IK} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서

$$A_I^e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -N_{I,x_1}^e & N_{I,x_2}^e \\ N_{I,x_1}^e & 0 & -N_{I,x_2}^e \\ -N_{I,x_1}^e & N_{I,x_2}^e & 0 \end{bmatrix} \quad I=1,2,\dots,n \quad (39)$$

그리고 요소절점 I에서의 모든 절점간 선을 따라 F_I^e 가 얻어진다.

$$F_I^e = \sum_{\alpha\beta\gamma} A_K^e T_{\alpha\beta\gamma} \quad (40)$$

최종적으로 범함수 Π_γ 를 최소화 하여 다음과 같은 요소 강성행렬을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} K^e & H^e \\ H^{eT} & -M^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ \sigma_0^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ \theta \end{Bmatrix}, a = \begin{Bmatrix} u \\ \psi \\ \Delta u \end{Bmatrix} \quad (41)$$

여기서

$$K^e = \int_{\Omega^e} [B^e \ G^e \ R^e]^T C [B^e \ G^e \ R^e] d\Omega \quad (42)$$

$$H^{eT} = \int_{\Omega^e} S^{eT} [A^e \ \hat{F}^e \ Q^e] d\Omega \quad (43)$$

$$M^e = \gamma^{-1} \int_{\Omega^e} S^{eT} S^e d\Omega \quad (44)$$

같은 방법으로 변위법에 기초한 강성행렬도 구할 수 있다.

$$[K^e + P^e] a = f \quad (45)$$

$$P^e = \gamma \int_{\Omega^e} [A^e \ \hat{F}^e \ Q^e]^T [A^e \ \hat{F}^e \ Q^e] d\Omega \quad (46)$$

위의 식(41)과 (43)에 있는 행렬 K^e 와 H^e 는 14-절점적분 방법[6]에 의해 계산되었으며, 식(45)에 나타난 행렬 P^e 는 2x2x2 가우스 적분법을 사용하여 계산되었다. 또한 변절점 요소에서 사용한 불연속 함수를 적분하기 위해 Gupta의 적분 개념[7]에 의하여 14-절점 적분법과 2x2x2 가우스 적분법을 사용하였다..

6. 수치검증

본 연구에서는 제안된 요소의 유효성과 거동을 검증하기 위해 여러가지 수치실험을 행하였다. 본 논문에서 언급한 두가지 정식화법과 비적합 변위 선택적으로 사용하면 16가지의 서로 다른 요소가 만들어질수 있다. 그들 중에서 각 정식화법에 대해 2가지의 경우에 대해 아래 다음과 같은 결과도출되었다. 개발된 요소를 표기함에 있어서 사용한 정식화법이 혼합법이나 변위법이나에 따라 각각 CCHM와 CCHD로 표기하였으며 비적합변위를 사용하지 않은 경우에 0으로 표기(CCHM0 혹은 CCHD0)하였으며, 집선 비적합 변위형을 제외한 모든 변위형을 사용한 경우는 3(CCHM3)으로 표기하였고, 집선 비적합 변위형과 bubble mode만을 사용한 경우는 6이란 숫자(CCHD6)로 표기하였다. 본 논문에서는 수치실험의 결과를 변절점 요소인 NC-V1, NC-V2, C-V1[4]와 비교하였다.

6.1 고유치 해석 및 조각보 시험

강체운동을 표현하기 위한 6개의 영에너지 모드외의 불필요한 영에너지 모드를 가지고 가지고 있는가의 여부를 검증하기 위해 변이영역에서 주로 사용되는 전형적인 변절점요소[4]들에 대한 고유치해석결과 강제운동을 표현하기 위한 6개의 영에너지 모드만 가지는 것으로 판명되었다.

제안된 회전자유도를 가지는 변절점 요소가 일정 변형률을 표현할수 있는가를 검증하기위해 그림 4와 같은 예제를 통하여 조각보 시험을 수행한 결과 시험을 통과하였다.

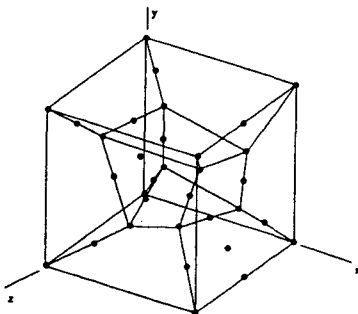


그림 4 삼차원 변절점 고체요소의 조각보시험

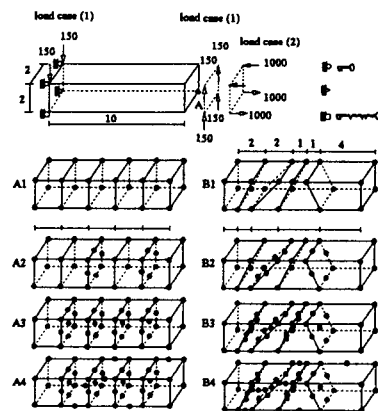


그림 5. 변절점 고체요소의 성능 시험 예제

6.2 Cantilever beam

개발된 새로운 변절점 요소가 요소 체는 형성시에 발생하는 변이지역의 연결이나 적응적 체는화법에 효과적으로 사용되어질 수 있는가의 여부를 검증하기 위해 그림 5와 같은 예제를 통해 검증하였다. 해석에 있어서 캔틸레버 보의 고정점에서의 회전 변위는 모두 억제 하였으며, 하중이 재하되는 단면에서의 x 및 z 방향의 회전 자유도를 억제하였다. 만약 아래에서 사용한 집중 하중 대신에 에너지 등가의 점점하중을 사용한다면 후자의 경계조건은 불필요한 것으로 생각된다. 캔틸레버보의 끝단 A 지점의 수직 변위를 보이른 및 다른 변절점 요소의 결과와 비교하였다.

표 2. 규칙적인 요소망의 경우에 있어서의 끝단 수직변위

Mesh	Load Case 1				Load Case 2			
	A1	A2	A3	A4	A1	A2	A3	A4
C-V1	68.45	70.10	72.33	78.48	66.67	68.86	70.83	77.86
NC-V1	101.40	100.96	101.28	100.27	100.00	99.43	99.97	98.07
NC-V2	101.40	100.67	100.08	98.99	100.00	99.09	98.51	97.00
CCHM0	95.87	97.28	98.90	98.18	93.32	95.37	97.30	96.04
CCHM3	102.06	101.80	100.95	100.29	99.39	99.28	99.00	97.65
CCHD0	95.50	96.58	98.51	97.90	93.25	95.16	97.23	97.75
CCHD6	102.12	101.68	101.28	100.76	99.71	99.63	99.73	98.75
Theory	102.60	102.60	102.60	102.60	100.00	100.00	100.00	100.00

표 3. 불규칙한 요소망의 경우에 있어서의 끝단 수직변위

Mesh	Load Case 1				Load Case 2			
	B1	B2	B3	B4	B1	B2	B3	B4
C-V1	49.33	56.38	64.61	79.49	44.38	51.59	58.42	78.60
NC-V1	89.89	86.66	89.57	97.40	87.45	83.46	86.03	95.99
NC-V2	89.89	83.90	78.84	82.66	87.45	80.50	75.85	82.09
CCHM0	83.15	92.05	91.72	93.44	80.64	90.10	89.26	92.03
CCHM3	91.05	97.86	94.35	95.78	88.38	95.78	91.94	93.99
CCHD0	78.83	87.20	89.52	91.17	76.55	85.38	87.34	89.99
CCHD6	92.49	94.08	100.26	102.46	79.89	91.79	91.13	100.11
Theory	102.60	102.60	102.60	102.60	100.00	100.00	100.00	100.00

7. 결론

본 연구에서는 3차원 연속체에서 국부세분화시에 이용될수 있는 회전자유도를 가지는 변절점 고체요소를 개발하였다. 본 연구에서 제안한 요소는 고유치 해석이나 조각보시험을 통과하였으며, 예제해석을 통하여 3차원 연속체 문제의 변이 지역에 이용될수 있음을 검토하였다. 또한 절점에서의 회전 자유도를 가지므로 3차원 모델링에서 보나 쉘과 같은 다른 3차원 구조적 유한요소와 접할경우 자연스러운 모델링이 가능하다.

참고 문헌

- [1] E. Reissner, 'A note on variational theorems in elasticity', *Int. j. solids and Structures*, 1, 93-95 (1965)
- [2] T. J. R. Hughes and F. Brezzi, 'On drilling degrees of freedom', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 105-121(1989)
- [3] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson, 'Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields', *Int. j. numer methods eng.*, 31, 1393-1414(1991)
- [4] C. K. Choi and N. H. Lee, 'Three dimensional solid elements for adaptive mesh gradation', *Structural Engineering and Mechanics*, 1, 61-74(1993)
- [5] A. Ibrahimbegovic and E. L. Wilson, 'A modified method of incompatible modes', *Communications in applied Numerical Methods*, 7, 187-194(1991)
- [6] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1980
- [7] A. K. Gupta, 'A finite element for transition from a fine to a coarse grid', *Int. j. Numer. Meth. Eng.*, 12(1), 35-45(1978)
- [8] C. K. Choi and W. H. Lee, 'Transition membrane elements with drilling freedom for local mesh refinements', *Structural Engineering and Mechanics*, 3(1), 75-89(1995)