

평면골조의 비탄성 거동해석을 위한 Direct Method의 적용에 관한 연구

A Study on the Application of Direct Method for the Inelastic Analysis of Planar Frames

윤 태호 * 이 상호** 정 일영***
Yun, Tae-Ho Lee, Sang-Ho Chung, Il-Young

ABSTRACT

A method for the inelastic response analysis of planar frame based on Direct Method is presented. Two elements (inelastic truss and inelastic beam) are developed. The accuracy and reliability of the proposed method is verified by comparing the results of example analysis with DRAIN-2D developed by Powell.

1. 서 론

구조물의 비탄성거동을 해석하기 위한 이전의 방법(Step-by-Step Analysis, 이하 단계별 해석법)은 구조물의 평형방정식을 하중과 변위의 증분에 관하여 구성하고 하중을 여러 단계로 나누어 가하여 각 단계의 응답을 누적함으로써 최종의 응답을 구하는 것이 일반적이다. 이들은 각 하중단계마다 평형조건을 만족시키기 위한 반복계산을 하는데 이러한 반복계산은 전체 해석시간을 크게 증대시키게 된다. 이러한 단점을 해소하고 구조물의 거동을 거시적으로 예측하기 위하여 버클리에서 개발된 비탄성구조물 해석프로그램인 Drain-2D^[5]는 각 하중단계마다 평형을 만족시키기위한 반복계산을 하지않고 불평형 하중을 다음 단계 의 하중에 더하여 가함으로써 해석의 시간을 상당히 감소시켰다. 그러나, 이러한 단계별 해석법은 하중단계를 충분히 작게 하여야만 정확한 해석이 가능하고 하중단계를 적절히 결정하기까지 여러번의 해석이 요구되는 단점이 있다. 따라서, 본 논문에서는 구조물의 비탄성해석을 단계별해석을 통하지 않고 직접 구하기 위하여 Zarka 등에 의하여 개발된 Direct Method^[1]를 평면 골조의 비탄성해석에 적용하기 위하여 평면골조의 요소로서 트러스와 보 요소를 개발하고 해석프로그램을 작성하고 해석의 신뢰성과 해석의 효율성을 검증하기 위하여 예제의 해석결과를 Drain-2D의 해석결과와 비교한다.

2. Direct Method 에 의한 해석^[1]

2.1 하중

구조물의 기하학적 형상은 경계 S를 가지는 부피 V로 정의할 수 있고 작용하는 하중은 다음과 같다. 물체력 $\mathbf{X}^d(t)$ in V, 표면력 $\mathbf{f}_i^d(t)$ on S_i of S, 초기 변위 \mathbf{u}_i^d on S_u of S, 초기변형도 ϵ_i^d in V
여기에서 위첨자 d는 주어진 값임을 나타낸다.

2.2 순수탄성응답

구조물이 순수 탄성재료로 구성되었다고 가정하면, 일반적인 구조물의 정적 탄성 해석프로그램을 상정하는 연산자 ELAS를 사용하여 변위장 $\mathbf{u}^e(t)$, 변형도 $\epsilon^e(t)$, 응력 $\sigma^e(t)$ 을 구할 수 있다.

* 서울대학교 건축학과 대학원 박사과정 수료 *** 서울대학교 건축학과 교수, 공학박사
** 해운항만청 (현 신공항건설공단 자문위원), 공학박사

$$\text{ELAS}(V, S_f, S_u, X^d, f_1^d, u_j^d, \epsilon_1^d, L) \quad --(1)$$

위식에서 처음 세개의 인자는 구조물의 기하학적 형상을 나타내고, 다음 네개 인자는 하중이며, 마지막 인자는 재료특성을 나타낸다. 순수탄성응답은 다음 조건을 만족하여야 한다.

1) $u^{el}(t), \epsilon^{el}(t)$ 은 u_j^d on S_u of S 과 운동학적으로 적합(Kinematically Admissible; K.A.)하고

$$2) \sigma^{el}(t) = L(\epsilon^{el}(t) - \epsilon_1^d(t)) \Leftrightarrow \epsilon^{el}(t) = L^{-1}\sigma^{el}(t) + \epsilon_1^d(t) \quad --(2)$$

은 $X^d(t)$ in $V, f_1^d(t)$ on S_f 와 정역학적으로 적합(Statically Admissible ; S.A.)하여야 한다.,

L 은 positive definite한 대칭 탄성행렬이고, L^{-1} 은 역행렬이다.

2.3 실제응답

실제의 구조물은 다음과 같은 실제응답을 가진다.

$$u(t), \epsilon(t) \text{ K.A. with } u_j^d \text{ on } S_u, \sigma(t) \text{ S.A. with } X^d(t) \text{ in } V, f_1^d(t) \text{ on } S_f$$

이때, 실제의 응답을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u^{el}(t) + u^{ine}(t) \\ \epsilon(t) &= \epsilon^{el}(t) + \epsilon^{ine}(t) \\ \sigma(t) &= \sigma^{el}(t) + \sigma^r(t) \end{aligned} \quad --(3)$$

여기에서

$$\epsilon^{ine}(t) = L^{-1}\sigma^r(t) + \epsilon^p(t) \quad --(4)$$

2.4 비탄성영역의 결정

2.4.1 구성방정식

kinematical hardening 재료에 대하여 항복조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\sigma - C\epsilon^p) = f(\sigma - y) = f(S - y) \leq 0 \quad --(5)$$

S 는 σ 의 deviatoric part 이고 ϵ^p 는 소성변형도텐서이며 $y = C\epsilon^p$ 는 내부파라메타이고 C 는 경화 계수이다. 이것은 응력공간에서 convex set $C(y)$ 를 y 만큼 평행이동시킨 것을 의미한다.

normality flow rules은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\epsilon}^p \in \partial \psi_{C(y)}(\sigma) \quad --(6)$$

2.4.2 내부파라메타영역(Internal Parameter Space)

내부파라메타 $y = C\epsilon^p$ 가 알려져있다고 가정한다면 ELAS에 다음과 같은 인자를 사용하여

$$\text{ELAS}(V, S_f, S_u, 0^d, 0_1^d, 0_j^d, \epsilon^p, L) \quad --(7)$$

아래와 같은 응답을 구할 수 있다.

$$u^{ine} \Rightarrow \epsilon^{ine} \Rightarrow \sigma^r = L(\epsilon^{ine} - \epsilon^p) \quad --(8)$$

2.4.3 구조변환파라메타영역 (Structural Transformed Parameters Space)

항복조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\sigma - y) = f(S - y) = f(S^{el} + \text{dev } \sigma^r - y) = f(S^{el} - Y) \leq 0 \quad --(9)$$

여기에서 S^{el} 은 탄성응력의 deviatoric part이고, Y 를 구조변환파라메타로 정의한다.

$$y = C\epsilon^p \Leftrightarrow \epsilon^p = C^{-1}y \quad --(10)$$

$$Y = C\epsilon^p - \text{dev } \sigma^r \quad --(11)$$

비탄성 변형도를 Y 에 대한 식으로 표현하면

$$\begin{aligned} \epsilon^{ine} &= L^{-1}\sigma^r + \epsilon^p = L^{-1}\sigma^r + C^{-1}(Y + \text{dev } \sigma^r) \\ &= (L^{-1} + C^{-1}\text{dev})\sigma^r + C^{-1}Y \end{aligned} \quad --(12)$$

$$\epsilon^{ine} \equiv L'^{-1}\sigma^r + C^{-1}Y \quad --(13)$$

여기에서 $L'^{-1} = (L^{-1} + C^{-1}dev)$ 은 수정탄성행렬 L' 의 역행렬이다.

구조변환파라메타 Y 가 알려져있다고 가정한다면 ELAS에 다음과 같은 인자를 사용하여

$$ELAS(V, S_i, S_u, 0^d, 0_i^d, 0_j^d, C^{-1}Y, L') \quad --(14)$$

아래와 같은 응답을 구할 수 있다.

$$u^{ine} \Rightarrow \epsilon^{ine} \Rightarrow \sigma^r = L'(\epsilon^{ine} - C^{-1}Y) \Rightarrow y = Y + dev \sigma^r \Rightarrow \epsilon^p = C^{-1}y \quad --(15)$$

2.4.4 혼합영역

일반적인 경우 구조물에는 탄성영역 V_e 와 소성영역 V_p 가 동시에 존재한다. 탄성영역 V_e 에서는 소성변형도를 알 수 있고 소성영역 V_p 에서는 Y 를 알 수 있으므로 다음과 같이

$$ELAS(V, S_i, S_u, 0^d, 0_i^d, 0_j^d, \epsilon^p \text{ in } V_e, C^{-1}Y \text{ in } V_p, L \text{ in } V_e, L' \text{ in } V_p) \quad -- (16)$$

비탄성변위 u^{ine} 를 구하고 다른 응답들은 V_e 에서는 (8)식으로, V_p 에서는 (15)식으로 구할 수 있다.

3. 탄소성스프링 모델

그림 1 (a)와 같은 탄소성스프링 모델^[1]은 변형경화성을 가지는 스프링을 두개의 스프링과 한개의 소성슬라이드로 모델링한 것이다. 하중 f 가 소성슬라이드의 임계값 f_y 보다 작을 때는 탄성강성 k 를 가지고 $\epsilon_p = 0$ 이며, f 가 f_y 보다 커지면 두개의 스프링(탄성강성 k 와 경화강성 h)이 직렬로 연결된 상태가 되어 소성강성이 k_t 가 되고 $\epsilon_p = (f - f_y)/h$ 가 된다(그림 1(b)(c) 참조). 소성강성 k_t 는 다음과 같이 구해진다.

$$k_t = \frac{kh}{k+h} \quad --(17)$$

이러한 탄소성스프링모델은 또한 변형경화재료를 모델링하기 위하여 사용되는데 이때에는 스프링에서 변형도 ϵ , ϵ^{el} , ϵ^{ine} 는 변형 e , e^{el} , e^{ine} 으로, 응력 σ , σ^{el} , σ^r 은 부재력 f , f^{el} , f^r 으로, 경화계수 C 는 경화강성 h 로, 재료특성 L, L' 은 강성 k, k_t 로 각각 대응된다.

4. 평면골조요소

4.1 트러스 요소

트러스요소는 축방향의 변형만을 가지며 인장과 압축에 변형경화를 한다(그림2).

4.1.1 탄성강성행렬

트러스요소의 탄성강성행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$K_p = B_p^T k B_p$$

여기에서,

$$k = \frac{EA}{L} \quad (E : \text{young's modulus}, A : \text{단면적}, L : \text{부재의 길이})$$

$$e = B_p U$$

$$U = \{u_i, u_j\}^T : \text{절점 변위벡터}$$

$$B_p = \{-1, 1\}^T : \text{축변형-변위변환벡터}$$

4.1.2 소성강성행렬

트러스요소의 소성강성행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$K_{p_t} = B_p^T k_t B_p$$

여기에서,

$$k_t = \frac{E_t A}{L} \quad (E_t = \frac{E h'}{E+h'} : \text{tangent modulus}, h' : \text{경화계수})$$

그림 3은 응력-변형도 관계를 보여준다. 그림에서 σ_y 는 항복점이다. 경화강성 h 는 다음과 같이 구해진다.

$$h = \frac{h' A}{L}$$

4.1.3 비탄성 영역의 결정

내부파라메타(Internal Parameter) y 는 다음과 같다.

$$y = h e^p$$

구조변환파라메타(Structural Transformed Parameter) Y 는 다음과 같이 구해진다.

$$Y = f^{el} - \frac{f^{el}}{|f^{el}|} f_y$$

잔류부재력 f^r 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{cases} f^r = k (e^{ine} - e^p) \text{ in } V_e \\ f^r = k_t (e^{ine} - \frac{Y}{h}) \text{ in } V_p \end{cases}$$

4.2 보 요소

보 요소는 양단부에 탄소성 회전스프링을 가진 탄성보^[35](그림 4)로서 부재의 소성변형은 회전스프링에 집중된 것으로 가정한다. 보 해석에 이용되는 탄소성 보요소모델로서 유한요소개념을 이용하는 요소^[2]가 있으나 이러한 요소는 일반적인 해는 정확하나 극한해석에서는 요소를 세분하거나 적분점을 많이 사용하여야 하므로 비효율적이다. 따라서, 본 연구에서는 극한해석에 효율적인 보모델을 개발하였다.

4.2.1 탄성강성행렬

보요소의 강성은 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K_p & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix}$$

K_p 는 트러스에서와 똑같이 구해지며, K_b 는 보의 휨강성으로 탄성보의 유연도행렬 F_{eb} 와 탄소성스프링의 유연도행렬 F_{sp} 를 더하여 보 요소의 유연도행렬을 구한 후 그 역행렬을 취하여 구한다.

$$K_b = B_b^T F_b^{-1} B_b$$

$$F_b = F_{eb} + F_{sp}$$

$$F_{eb} = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{-L}{6EI} \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix}, \quad F_{sp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_j} \end{bmatrix}$$

변형과 절점변위의 관계는 다음과 같다.

$$e = B U$$

$$e = \{ e_1 \ e_2 \ e_3 \}^T : \text{요소변형벡터}$$

$$U = \{ u_i \ u_j \ v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j \}^T : \text{절점변위벡터}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_b \end{bmatrix} : \text{변형-절점변위변환행렬}$$

$$B_b = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & 1 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{-1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} : \text{휨변형-절점변위변환행렬}$$

I 는 단면2차모멘트이고 위 식에서 회전스프링의 탄성강성은 상당히 큰 값($10^8 \times EI$)을 주어 항복하기 전에는 변형을 하지 않도록 하여야 한다.

4.2.2 탄소성강성행렬

보요소의 축강성은 항상 탄성으로 가정하므로 탄성강성과 동일하며 휨강성만이 변화한다.

$$K_b = B_b^T F_b^{-1} B_b$$

$$F_{b_t} = F_{e_b} + F_{s_p_t}$$

$$F_{s_p_t} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{i_t}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_{j_t}} \end{bmatrix}, \begin{cases} k_{i,j_t} = k & \text{if the spring is elastic} \\ k_{i,j_t} = k_t & \text{if the spring is plastic} \end{cases}$$

스프링의 경화강성 h 는 k , k_t 와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$k_t = \frac{k h}{k + h}$$

그림 5는 보 요소의 탄소성 회전스프링의 모멘트-회전각 관계를 보여준다.

4.2.3 비탄성 영역의 결정

내부파라메타(Internal Parameter) y 는 다음과 같다.

$$y = h e^p$$

구조변환파라메타(Structural Transformed Parameter) Y 는 다음과 같이 구해진다.

$$Y = M^{el} - \frac{M^{el}}{|M^{el}|} M_y$$

잔류모멘트(Residual Moment) M^r 은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{cases} M^r = k (\theta^{inc} - \theta^p) \text{ in } V_e \\ M^r = k_t (\theta^{inc} - \frac{Y}{h}) \text{ in } V_p \end{cases}$$

* 정적해석의 자세한 해석절차는 부록 A에 수록하였음.

5. 해석예제

5.1 트러스 구조물의 비탄성해석

그림 6과 같은 10개의 트러스요소로 구성된 트러스 구조물을 본 논문에서 제안된 방법과 DRAIN-2D로 각각 해석하였다. 해석에 사용된 자료는 다음과 같다.

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2, \quad \sigma_y = 2.4 \times 10^4 \text{ t/m}^2, \quad h = E, 0.1E, 0.01E$$

$$L = 1.0 \text{ m}, \quad A = 0.01 \text{ m}^2, \quad R = 200 \text{ t}$$

$R = 200 \text{ t}$ 을 절점 5에 수직방향으로 가하였다. $h = E, 0.1E, 0.01E$ 에 대하여 Direct Method와 DRAIN-2D로 각각 해석을 수행하였다. DRAIN-2D에서는 하중의 증분을 감소시켜가면서 응답이 1%이내로 수렴할 때를 채택하였다. 표 1에서 절점5에서의 수직변위를 비교하였다.

본 예제의 경우 표에서와 같이 두 방법에 의한 해석이 동일한 결과를 보여준다. 각 방법에 의한 해석 효율을 비교하기 위하여 강성행렬의 재구성과 전소거(forward reduction)의 회수(표의 A)와 후소거(back substitution)의 회수(표의 B)를 비교하였다. DRAIN-2D의 경우 하중단계를 10단계로 하여 해석을 하였는데 하중단계를 적절히 정하기 위하여 몇차례의 예비해석이 필요하였으나 Direct Method의 경우는 하중증분을 사용하지 않으므로 예비해석이 불필요하였다. 본 예제와 같은 단순한 구조물의 경우에는 이러한 차이가 크게 심각하지 않으나 대형구조물의 경우에는 큰 차이를 나타내게 된다.

표 1 절점 5에서의 수직변위 비교(단위:m)

h/E	Direct Method	Drain-2D
	U_{5y}	U_{5y}
1	-0.8526	-0.8526
0.1	-1.624	-1.624
0.01	-9.3383	-9.3383

표 2 해석효율의 비교

h/E	Direct Method		Drain-2D	
	A	B	A	B
1	2	2	3	10
0.1	2	2	3	10
0.01	2	2	3	10

5.2 2경간 골조 구조물의 비탄성해석

그림 7과 같은 2경간의 골조구조물^[4]에 대하여 본 논문에서 제안된 방법과 DRAIN-2D로 각각 해석하였다. 해석에 사용된 자료는 다음과 같다.

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ t/m}^2, \quad b = 0.16 \text{ m}, \quad d = 0.2 \text{ m}, \quad k_{sp} = 10^8 EI$$

$$M_y = 250 \text{ t} \cdot \text{m}, \quad h = EI, 0.1EI, 0.01EI, \quad L = 5.0 \text{ m}, \quad F = 120 \text{ t}$$

표 3은 $F = 120 \text{ t}$ 을 절점 5, 7, 8에 그림과 같은 방향으로 가하였을때 절점 8의 수평변위를 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 두방법에 의한 해석결과는 만족할 만한 일치성을 보여주고 있으나 표 4에서 보는 바와 같이 해석의 효율성은 제안된 방법이 월등히 우월함을 알 수 있다.

표 3 절점 8에서의 수평변위 비교 (단위:m)

h/E	Direct Method	Drain-2D
	U_{8x}	U_{8x}
1	1.077	1.066
0.1	1.097	1.096
0.01	1.114	1.119

표 4 해석효율의 비교

h/E	Direct Method		Drain-2D	
	A	B	A	B
1	2	2	3	133
0.1	2	2	3	133
0.01	3	3	4	133

6. 결론

본 연구에서 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

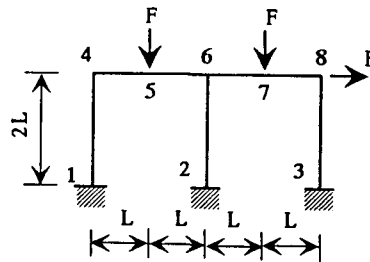
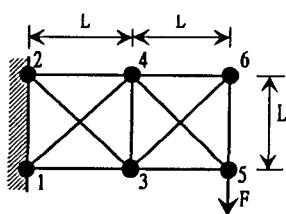
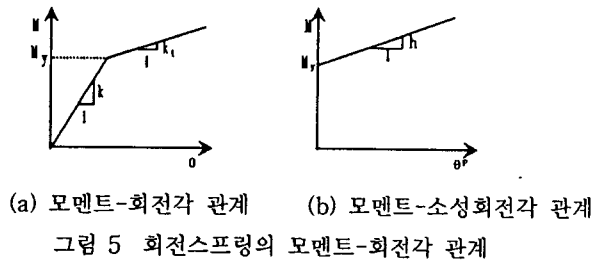
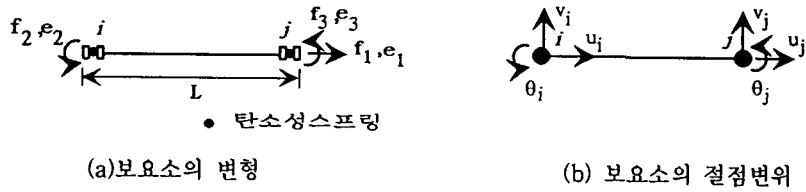
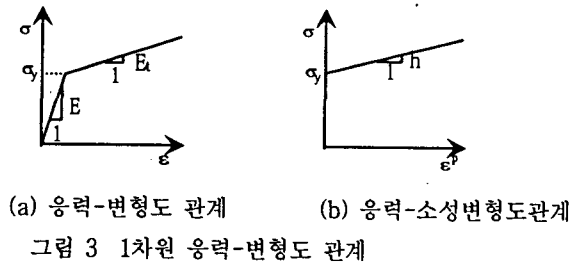
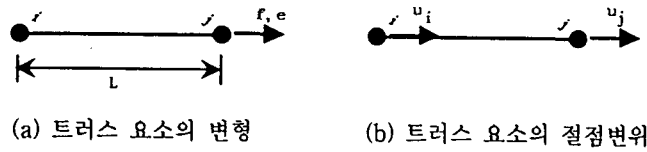
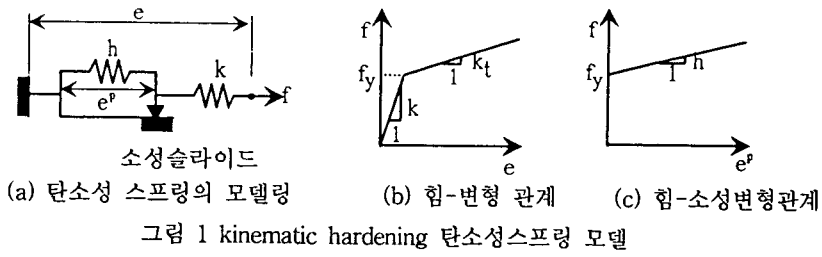
1. Direct Method를 적용하기 위한 비탄성 골조요소의 정식화를 유도하였다.
2. Direct Method에 의한 해석은 Step-by step 해석과 비교하여 해석의 신뢰성이 보장된다.
3. Direct Method는 하중증분을 사용하지 않으므로 하중증분의 크기에 따른 해의 불안정성이 없다.
4. 해석의 효율면에서 Direct Method는 정적해석 2-3번으로 해석이 완료되나 Step-by-step 해석은 일반적인 비탄성해석에서 하중증분을 적절히 설정하기 위해 몇차례의 예비해석이 필요하고 하중증분을 충분히 작게 설정하여야 하므로 Step-by-step해석은 많은 하중단계를 갖게 되고 따라서 많은 시간이 소요된다.

앞으로 Direct Method 를 적용한 비선형해석부분에 연구되어야 할 부분은 다음과 같다.

1. 정적 반복하중에 대한 비탄성해석
2. 정적 반복하중에 대한 Shakedown Analysis
3. 극한 하중에 대한 Limit Analysis (붕괴하중계수 계산)
4. 동적 하중에 대한 비선형해석

참 고 문 헌

1. J. Zarka, J. Frelat, G. Inglebert, P. Kasmai-Navidi, "A New Approach to Inelastic Analysis of Structures," Martinus Nijhoff Publishers, 1988.
2. Sang-Ho Lee, "Simplified Dynamic Analysis of inelastic Structures," thesis, The Ecole Nationale des Pontset Chaussees , 1989
3. D. R. J. Owen, E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press Ltd, 1980
4. Stuart S.J. Moy, "Plastic Method for Steel and Concrete Structures", Macmillan Press, 1981
5. Amin E.Kanaan, Graham H.Powell, "General Purpose Computer Program for Inelastic Dynamic Response of Plane Structures," EERC 73-6, University of California, Berkeley, April 1973
6. Rakesh Allahabadi, Graham H. Powell, "DRAIN-2DX User Guide", EERC 73-6, UC Berkeley, April 1973



부록 A. 정적 하중에서의 직접해석

A.1 탄소성상태의 결정

정적탄성부재력 f^{el} 을 ELAS를 사용하여 구한 후, 다음과 같은 계산이 구조물의 각 탄소성스프링마다 수행된다.

f_y 를 탄소성스프링의 탄성한계라 할 때, 항복조건은

$$f(f^{el} - Y) = (f^{el} - Y)^2 - f_y^2$$

과 같이 되고, 이에 따라

i) $f(f^{el} - Y) < 0$ 이면, 이 점은 탄성영역에 있으므로 소성변형도는 0으로 가정한다.

ii) $f(f^{el} - Y) \geq 0$ 이면, 이 점은 소성영역에 있고 Y는 항복면상에 projection된다.

$$Y = f^{el} - \frac{f^{el}}{|f^{el}|} f_y$$

A.2 해석의 절차

i) 순수탄성응답

$$ELAS(V, S_f, S_u, X^d, f_i^d, u_j^d, e_i^d, k)$$

$$\Rightarrow U^{el} = K^{-1}F \Rightarrow e^{el} = BU^{el} \Rightarrow f^{el} = k(e^{el} - e_i^d)$$

ii) 비탄성응답

A. Local

(a) 초기화 $Y^{(0)} = 0; i = 0$

(b) $i = i + 1$

(c) 탄성영역과 소성영역의 결정 : $f(f^{el} - Y^{(i-1)}) \leq 0 \Rightarrow V_e, V_p$

구조물의 모든 점이 plastically admissible하면 goto iii), 그렇지 않으면 goto (d)

$$U^{ine} = U^{ine(i-1)}; e^{ine} = e^{ine(i-1)}; f^r = f^r(i-1)$$

(d) Projection

$$\begin{cases} e^{p(i)} = 0 \text{ in } V_e \\ Y^{(i)} = f^{el} - \frac{f^{el}}{|f^{el}|} f_y \text{ in } V_p \end{cases}$$

B. Global

(a) 접선강성행렬

$$K_t^{(i)} = \sum_{V_e} B^T k B + \sum_{V_p} B^T k_t B$$

(b) 내부하중벡터

$$F^{(i)} = \int_{V_e} B^T k e^{p(i)} dV + \int_{V_p} B^T k_t (h^{-1}Y^{(i)}) dV$$

(c) 비탄성변위벡터

$$U^{ine(i)} = K_t^{(i)-1} F^{(i)}$$

C. Local

(a) 비탄성변형

$$e^{ine(i)} = B U^{ine(i)}$$

(b) 잔류응력, 구조변환파라메타, 내부파라메타

$$\begin{cases} f^r(i) = k(e^{ine(i)} - e^{p(i)}) \Rightarrow Y^{(i)} = h e^{p(i)} - f^r(i) \text{ in } V_e \\ f^r(i) = k_t(e^{ine(i)} - h^{-1}Y^{(i)}) \Rightarrow e^{p(i)} = h^{-1}(Y^{(i)} + f^r(i)) \text{ in } V_p \end{cases}$$

(c) goto A.(b)

iii) 실제 응답

$$U = U^{el} + U^{ine}; e = e^{el} + e^{ine}; f = f^{el} + f^r$$

* 탄성응답이 알려진다면, 비탄성응답(비탄성변위, 변형, 잔류부재력 등)을 구할 수 있다.