

공작기계 스피들시스템에서 상태공간을 이용한 베어링 주변의 열거동에 대한 연구

A Study on the Thermal Behavior of Bearing Surroundings using State-Space in Machine Tool Spindle System

신동수 (화천기공㈜), 정성중 (한양대 공대)

D. S. Shin (Hwacheon Machine Tools Co., Ltd.), S. C. Chung (Hanyang Univ.)

ABSTRACT

This paper proposes the state-space model of the thermal behavior of the spindle system to establish dynamic mathematical model of thermal characteristics in machine tool spindle system. The model is derived from physical laws of heat transfer and thermoelasticity and represents the thermal behavior induced by uneven thermal expansions within a bearing. The model, which is successfully validated for two typical configurations of high speed spindle assemblies, provides a tool for understanding the basis mechanics of induced thermal expansion as a function of initial preload, spindle speed and housing cooling conditions.

Key Words : Angular Contact Ball Bearing (앵글라 콘택트 볼베어링), Heat Transfer Model (열전달모델), Inner Ring (내륜), Machine Tool Spindle System (공작기계 스피들시스템), Outer Ring (외륜), State-Space Model (상태공간모델), Taper Roller Bearing (테이퍼 롤러베어링), Thermal Expansion Model (열팽창모델)

1. 서 론

최근 단일부품생산 및 다품종 소량생산을 위한 제품제조 방식에 대응하기 위해 시스템적합형 공작기계, 기능통합형 공작기계, 그리고 지능형 공작기계 등과 같이 고생산성을 지향하는 공작기계의 개발이 시도되고 있지만, 공작기계의 생산성을 높이는 기본적인 방법은 고속, 고강성 및 고정도화라 할 수 있다.⁽¹⁾

공작기계의 성능을 좌우하는 핵심기술로는 주축계라 할 수 있으며 특히 공작기계의 성능은 주축-베어링 시스템의 동적 및 열적특성에 따라 평가된다. 특히, 고속에서는 회전축의 진동문제 뿐만 아니라 발열에 의한 가공물의 정밀도 저하문제가 발생하므로 주축-베어링 시스템의 동적·열적 특성을 설계단계에서 예측하는 일이 매우 중요하다.⁽²⁾

공작기계의 주축에는 앵글라 콘택트 볼베어링, 원통 롤러 또는 테이퍼 롤러베어링 등이 많이 사용되며 최근들어 마그네틱베어링이 일부 연삭기의 주축으로 사용되기도 한다. 고속으로 회전하며 고강성을 유지하기 위해서는 적절한 예압을 필요로 하며, 예압량은 접촉가의 함수로써 축하중의 형태로 나타나며 베어링의 종류와 운전조건에 따라 달라진다.⁽³⁾ 축의 회전에 따라 앵글라 콘택트 볼베어링의 볼은 스피드모멘트와 자이로모멘트를 받으며 레이스와 상대운동을 통해 열이 발생된다. 또한 작용하중과 사용기름의 점성에 의해 열이 발생되고 탄성히스테리시스, 볼과 케이지의 미끄럼과 시일 마찰 등에 의해서도 작은 양이지만, 발열이 일어난다.^(4,5) 이러한 발열량은 결과적으로 예압과 열변형량에 영향을 미치므로 발열량의 예측은 냉각, 윤활계통의 설계에 기초가 될 뿐만 아니라 주축계의 정밀도 유지에도 매우 중요

한 역할을 한다.

국내의 연구현황을 살펴보면, Schultz 등⁽⁶⁾은 고속가공과 관련된 기술에 대해 체계적으로 서술하였고, Muramatsu 등⁽⁵⁾은 최고 30,000 rpm 회전수에서 FEM 모델을 통해 주축의 열전도해석에 대해 연구하였다. Lacey 등⁽⁷⁾은 서로 다른 윤활유의 유량과 초기 예압량 조건에서 각 접촉베어링을 500 ~ 4,500 rpm의 주축속도 범위에서 베어링의 예압을 살펴보았다. Harris⁽⁸⁾는 적절한 초기 예압량은 베어링 피로 수명을 증가시키고 베어링 소음을 감소시키며, Skidding을 방지하고 고속상태에서 각 접촉 볼베어링의 내륜과 외륜의 Raceway 사이의 접촉각을 줄이는 연구를 수행하였다. Tu 등⁽⁹⁾은 Anti-Friction 주축-베어링계에서 열에 의해 발생하는 볼베어링과 로울러베어링의 예압에 관한 공간상태 모형화를 시도하였으며, Shin⁽¹⁰⁾은 베어링의 비선형성에 대한 해석연구를 수행하였다.

본 논문에서는 Tu가 상태공간 모형화를 이용하여 예압량만을 모니터링한 것과는 달리, 베어링셋의 외륜, 내륜, 볼 및 예압에 의한 열팽창량을 해석하고 총 열팽창량을 모니터링하였다. 고정도, 고강성 및 고속화의 요구로 단순히 고속회전이 가능할 뿐만 아니라 주축의 온도상승을 억제하고 열변형을 적게 하고자 하여 효율적인 센서의 선택과 온라인 열변형 평가를 쉽게 접근할 수 있도록 상태공간 모델을 정립하였다. 50 ~ 4,500 rpm의 주축속도 범위에서 총열팽창량을 살펴보았으며, 초기 예압, 스피들속도 및 하우징 냉각 상태 등의 측정이 용이한 입력 상태변수에 대한 열전달 및 열팽창해석의 수식화를 정립하여 효율적인 열적 특성의 동

역학적 관계를 보다 쉽게 추정할 수 있도록 하였다.

2. 베어링의 발열량 추정

2.1 베어링 발열량 추정

앵글라 콘택트 볼베어링에서 발열은 볼의 미끄럼 모멘트와 베어링의 동마찰토크에 의해 발생된다. 미끄럼 모멘트에 의한 발열은 Fig. 1 - (b)의 스핀모멘트와 (c)의 자이로모멘트에 의해 주로 발생되며, 베어링의 동마찰 토크에 의한 발열은 베어링의 형식이나 하중의 크기에 따라 발생하는 하중항의 동마찰 토크발열과 기름의 점도, 양 및 회전수에 의해 결정되는 속도항의 동마찰 토크발열로 나뉘어진다.^(4,5,11)

또한 롤러베어링에서 발열은 하중의 크기에 따라 발생하는 하중항의 동마찰 토크발열과 기름의 점도, 양 및 회전수에 의해 결정되는 속도항의 동마찰 토크발열로 나타낼 수 있다.

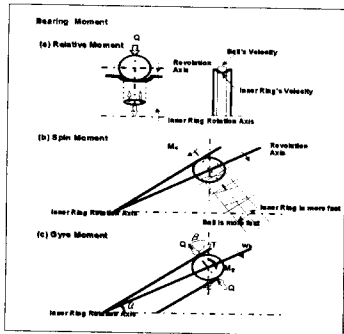


Fig. 1 Applied Moment on Ball with angular contact

3. 상태공간 모델

3.1 시스템 블록선도

Fig. 2는 대상 주축계의 구조를 나타내고 있으며, 베어링은 접촉각이 40°인 앵글라 콘택트 볼베어링과 테이퍼 롤러베어링을 사용하였다. 베어링은 고속회전과 주축계의 강성을 위해 복열(Double)의 형태를 취하고 있으며, 전반부 베어링과 후반부 베어링은 Grease 윤활방식으로 하였다. 축의 재질은 SM45CD와 하우징은 GC300과 GC250을 사용하였다. 모터는 FANUC사의 연속정격출력 11 Kw, 최대 회전속도는 5,000 rpm을 사용하였다.

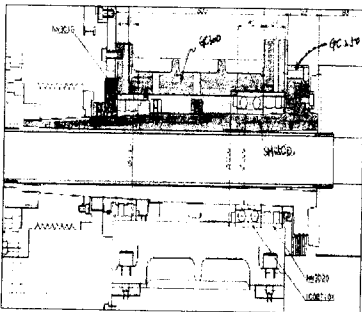


Fig. 2 Specified Spindle's Structure

Fig. 3은 주축계의 열거동을 해석하기 위한 블록선도이

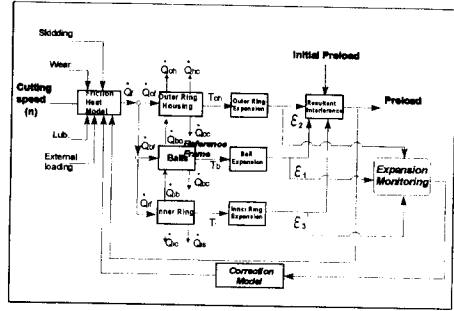


Fig. 3 A Block Diagram for the proposed Model

며 베어링을 외륜, 볼 및 내륜으로 구분하였고, 중간 볼을 Reference Frame으로 선정하고 에너지 보존법칙에 따라 Heat의 Source와 Sink를 선도도 나타낸 것이다. 여기서, 절삭속도에 따른 윤활, 외부하중 및 마모와 Skidding으로 인한 마찰열 \dot{Q} 는 베어링의 각부분에 온도를 발생시키며 온도에 의해 외륜, 볼 및 내륜에 열팽창량을 유발시켜 결과적인 총 열변형량을 일으킨다.

Fig. 4는 베어링 주변의 열거거동을 해석하기 위해 제어 체적을 선택한 경우를 보여주고 있으며, 에너지 보존법칙에 의해 열전달방정식을 구현한 상태를 나타내고 있다.

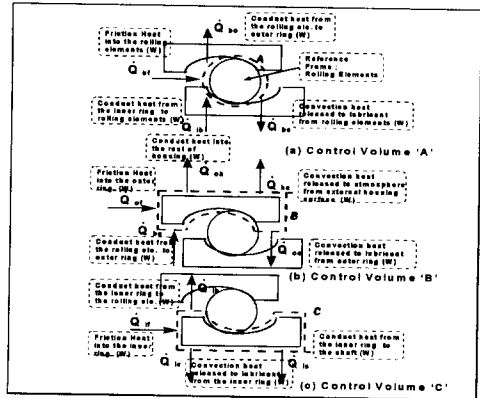


Fig. 4 Control Volumes for the proposed Model

여기서 Fig. 4 - (a)는 볼을 제어체적으로 선택한 것으로 Source와 Sink의 형태를 구분하여 수식을 수립하였으며, (b)는 외륜을, (c)는 내륜을 제어체적으로 선택한 경우를 보여주고 있다. 마찰열의 분포는 그림과 같이 볼의 경우가 50%이며, 외륜과 내륜의 경우가 각각 25%임을 알 수 있다.⁽¹³⁾

3.2 열전달해석

Fig. 3 ~ 4를 토대로 수식을 정리하면, 회전요소의 열전달방정식은 식 (1) ~ (3)과 같다. 제어체적 사이에서 열교환은 열전도와 대류 열전달로 정의된다고 가정한다. 전도가 Grease 윤활방식에서 훨씬 현저히 나타나고, 반면에 대류는 oil-mist 윤활방식에서 열교환을 지배한다.

$$\frac{1}{3} \pi C_{oh} b \rho (r_h - r_o) \cdot \frac{dT_{o-h}}{dt} = \left[-\frac{1}{R_{bo}} - \frac{1}{R_{oh}} - h_c A_o + \frac{(2r_o + r_h)}{(2r_h + r_o)} h_{\infty} A_h \right] T_o - \frac{h_{co} A_h}{2r_o + r_h} T_{o-h} + \frac{T_b}{R_{bo}} + \eta_o \dot{Q}_f \quad (1)$$

$$m_b C_b \frac{dT_b}{dt} = \frac{1}{N} \left[-h_c A_b T_b + \frac{(T_i - T_b)}{R_{ib}} - \frac{(T_b - T_o)}{R_{bo}} + \frac{1}{N} \eta_b \dot{Q}_f \right] \quad (2)$$

$$m_i C_i \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{N} \left[-(h_c A_i + \frac{1}{R_{is}}) T_i + \frac{(T_i - T_b)}{R_{ib}} + \eta_i \dot{Q}_f \right] \quad (3)$$

3.3 열팽창 해석

베어링 부분이 팽창함에 따라 초기예압에 의한 초기 간섭 Fit 가 변화되고, 따라서 예압이 변한다. Fig. 5 에서 보듯 내륜과 외륜이 radial 방향으로 ϵ_3 와 ϵ_2 만큼 팽창한다. 동시에 볼의 중심은 c_b 에서 c'_b 로 이동하고 Inner Race 곡률 중심은 c_i 에서 c'_i 로 이동하며, Outer Race 곡률 중심은 c_o 에서 c'_o 로 이동한다. 따라서 볼반경은 r_b 에서 r'_b 로 팽창할때 접촉각 역시 α^0 에서 α 로 변한다.

ϵ_3 와 ϵ_2 에 의한 결과적인 기하학적 간섭은 새로운 접촉각의 선을 따르는 길이의 변화와 동일하다.

$$\frac{(\epsilon_3 - \epsilon_2) \cos \alpha}{2} \quad (4)$$

$\alpha \cong \alpha^0$ 이므로 식 (4) 를 더욱 간단히 식 (5) 로 쓸 수 있다.

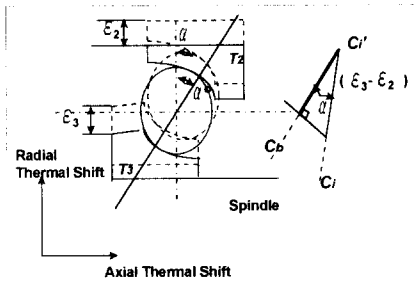


Fig. 5 Thermal expansions

$$\frac{(\epsilon_3 - \epsilon_2) \cos \alpha^0}{2} \quad (5)$$

총 간섭변화는 식 (5), 초기예압에 의한 간섭 ϵ_{10} 및 볼팽창에 의한 ϵ_1 의 합이다. 그러므로,

$$\epsilon_t = \epsilon_1 + \epsilon_{10} + \frac{(\epsilon_3 - \epsilon_2) \cos \alpha^0}{2} \quad (6)$$

가 되고 원통 롤러베어링은 식 (5) 에서 $\alpha^0 = 0$ 으로 하면 된다.

내륜, 외륜 및 회전요소들의 팽창은 온도함수로서 선형적으로 가정한다. 회전요소들의 팽창은

$$\epsilon_1 = \alpha_d r_b T_b \quad (7)$$

이 되며, 내륜의 팽창은

$$\epsilon_3 = \alpha_d r_i T_i \quad (8)$$

이 된다. 외륜과 하우징의 조합팽창은 하우징의 두께에 의해 더욱 복잡하다. 그러므로, Radial 방향으로 $T(r)$ 의 온도분포를 가진 중공실린더의 열팽창문제를 취급한 Timoshenko의 classical solution을 이용한다. 따라서 ϵ_2 는

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \frac{1}{r_o} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_{r_o}^{r_h} \alpha_d T(r) r dr + C_1 r_o + C_2 \frac{1}{r_o} \\ &= \frac{\alpha_d}{3} \frac{(1+\nu)}{r_o + r_h} [T_o(2r_o + r_h) + T_h(r_o + 2r_h)] \end{aligned} \quad (9)$$

이고, $T(r)$ 은 원주방향으로 선형적이라고 가정한다.

유도 접촉력은 단지 탄성변형만 일어난다고 가정한다면 Interference 변화 (유도예압) 에 의해 생성된 접촉력은 Hertz 의 접촉원리를 기초로 하여 식 (10) 을 얻을 수 있다.

$$F_t = k_t \epsilon_t^\beta \quad (10)$$

여기서 K_t 는 베어링의 Radial 탄성계수, $\beta = 1.5$ (Ball 의 경우), $\beta = 1.11$ (Roller 의 경우) 이다.

각 접촉 볼베어링의 경우에 총 축방향 예압은

$$F_M = F_t \sin \alpha N \quad (11)$$

으로 표현된다. 결국, 초기변형 ϵ_{10} 은 식 (10) 을 변형하여 F_t 가 초기예압과 같다고 함으로써 식 (12) 로 계산 되어진다.

$$\epsilon_{10} = \left(\frac{F_M}{k_t} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (12)$$

총 열팽창에 의한 값은 볼의 경우 식 (13) 으로, 로울러의 경우 식 (14) 로 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_t^{ball} = \epsilon_1 + \epsilon_{10} + \frac{1}{2} (\epsilon_3 - \epsilon_2) \cos \alpha^0 \quad (13)$$

$$\epsilon_t^{roller} = \epsilon_1 + \epsilon_{10} + \frac{1}{2} (\epsilon_3 - \epsilon_2) \quad (14)$$

3.4 상태공간 방정식

베어링계의 모델은 3 개의 서로 독립적인 에너지 저장요소를 가지고 있어서 단지 3 개의 상태변수를 필요로 한다. 제어체적과 관련된 모든 온도변수 중 T_b , T_i 는 독립변수이고, T_o 와 T_h 는 온도분포함수 $T_{oh}(r, t)$ 로 서로 의존적인 형태이다. 따라서, T_b , T_i , T_o 가 상태변수로 선택된다면, T_o , T_{so} , T_{ho} , T_{co} , F_n 과 관련된 항들은 시간에 따라 변하는 인자들로서 미지수가 될 것이다. 만약 필요한 센서들을 설치할 만큼 비용이 충분하고 측정에 필요한 미분을 계산한다면, 방정식들은 수치해석으로 풀릴 수 있다. 불행하게도, 이 센서들 중 상당량은 유용하게 쓰이지 못하거나 복잡한 설치장비를 요구한다. 더욱이 T_h 의 미분값 역시 필요하므로, 측정 noise 도 큰 문제이다. 측정치의 미분계산을 피하기 위해, 상태변수들은 T_b , T_i , T_{oh} 로 정의한다. 여기서,

$$T_{oh} = (2r_o + r_h) T_o + (2r_h + r_o) T_h \quad (15)$$

이 되고, 이 상태변수는 두 가지 이점을 가지고 있다.

첫째, T_h 의 미분항이 소거되고 둘째, 새로이 정의된 T_{oh} 가 외륜/하우징의 열팽창과 직접적인 비례관계를 가지고 있

다. 방정식을 풀기 위해 $T_o, T_{sco}, T_{ho}, T_{co}$ 및 F_n 이 요구되어진다. 그러나, 실질적으로 T_{sco}, T_{ho}, T_{co} 는 Reference 온도로서 상수로 취급할 수 있고, T_o 는 쉽게 측정할 수 있다.

상태공간형태의 최종 시스템방정식은 식 (16) 으로 정의된다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{T}_{oh} \\ \dot{T}_b \\ \dot{T}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ f_3(x, u) \end{bmatrix} = Ax + Bu + q(u, z)$$

$$u = \begin{bmatrix} n \\ T_o(t) \end{bmatrix}, z = F_i = f(x, F_{po}) = [d_o F_{po} + d_2 x_2 + d_3 x_3 - d_1 x_1 - 1]^2 \quad (16)$$

여기서, $f_1(x, u), f_2(x, u), f_3(x, u)$ 은 식 (1) ~ (3) 에 의해 정의되고, 출력함수 $f(x, F_{po})$ 는 식 (7) ~ (9) 로 정의되어진다.

결과적으로, 식 (16) 의 상태공간 모델을 이용한 방정식은 식 (17) 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = A\hat{x} + Bu + q(u, \hat{z}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{\pi b \rho C_{oh}(r_h - r_o)} \cdot \frac{h_{co} \cdot A_h}{(2r_h + r_o)} & \frac{3}{\pi b \rho C_{oh}(r_h - r_o)} \cdot \frac{1}{R_{ho}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Nm_i C_b} \cdot (-h_c \cdot A_b - \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{ho}}) & \frac{1}{Nm_i C_b} \cdot \frac{1}{R_b} \\ 0 & \frac{1}{Nm_i C_i} \cdot \frac{1}{R_b} & \frac{1}{Nm_i C_i} \cdot (-h_c \cdot A_i - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_b}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{o-h} \\ T_b \\ T_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{\pi b \rho C_{oh}(r_h - r_o)} \cdot (-h_c \cdot A_b - \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_{ho}}) + \frac{(2r_o + r_h)}{(2r_h + r_o)} \cdot h_{co} \cdot A_h \\ \frac{1}{Nm_i C_b} \cdot \frac{1}{R_b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3\eta_o}{\pi b \rho C_{oh}(r_h - r_o)} \\ \frac{1}{Nm_i C_b} \cdot \eta_b \\ \frac{1}{Nm_i C_i} \cdot \eta_i \end{bmatrix} \cdot \dot{Q}(n, F_n, F_i) \quad (17)$$

여기서, $\hat{x}_1 = T_o(2r_o + r_h) + T_h(2r_h + r_o)$ 이며,

$$\dot{Q}(n, F_n, F_i)^{ball} = \frac{2\pi n}{60} [0.8f_o(\mu_o n)^{2/3}(r_i + r_b)^3 + 0.001f_i F^{-1/0.3}(r_i + r_b)(F_n + F_i)^{4/3}] \quad \text{이고}$$

$$\dot{Q}(n, F_n, F_i)^{roller} = \frac{2\pi n}{60} [0.8f_o(\mu_o n)^{2/3}(r_i + r_b)^3 + 0.00025f_i(r_i + r_b)(F_n + F_i)] \quad \text{이다.}^{(9)}$$

4. 시뮬레이션

시뮬레이션을 하기 위한 환경으로 MathWorks 사의 SIMULABTM 과 Dynamic system 시뮬레이션 소프트웨어인 SIMULINK[®] 를 이용하였으며, 식 (17) 을 블록선도로 나타내면 Fig. 6 과 같다.

Fig. 6 에서 제어입력값은 회전수와 외륜의 온도가 되며 온도와 예압의 계산치와 제어입력들과의 Mux 를 거치며, 제어행렬과의 합은 적분기를 통해 출력값을 생성한다. 또한 출력값은 피드백되어 시스템 혹은 플랜트행렬에 대입되며 출력행렬의 한 성분으로 이용된다. 출력값인 T_{oh}, T_b 및 T_i 는 열팽창량 ϵ_2, ϵ_1 및 ϵ_3 으로 환산하여 모니터링

되며 예압과 온도값과의 관계로 인한 ϵ_{10} 과의 합으로 총 열팽창량을 모니터링할 수 있다.

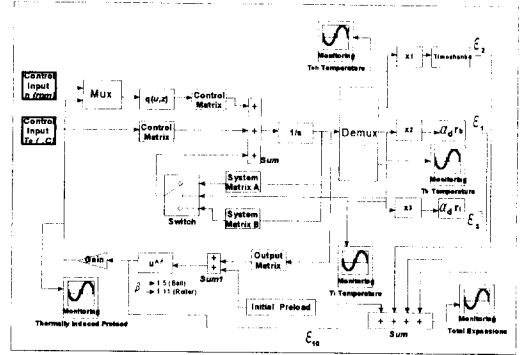


Fig. 6 A block diagram for simulation

4.1 파라미터의 규명

Fig. 6 의 블록선도에서 취급되는 파라미터들을 Table 1 에 나타내었다. 각각의 파라미터는 재료에 따른 물성치, 기하학적 관계, 무차원계수 및 시뮬레이션 결과에 의한 값들로 구성되어 있다.

4.2 시뮬레이션 결과

Fig. 7 은 블베어링의 시뮬레이션의 결과를 보여주며, 열에 의한 예압 F_t , 외륜/하우징의 온도분포 T_{oh} , 볼의 온도 T_b , 내륜의 온도 T_i , 총 열팽창량 ϵ_t 및 스핀들회전에 의한 총 열팽창량 ϵ_t vs rpm 을 보여주고 있다.

5. 결론

공작기계 스핀들시스템에서 상태공간을 이용한 베어링 주변의 열거동에 대한 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 고정도, 고강성 및 고속화의 요구로 인한 주축의 온도상승을 억제하고 열변형을 적게 하고자 총 열팽창량에 대한 모니터링을 시도하였다.
2. 열적 특성에 의한 열팽창량은 주축 회전수가 증가함에 따라 가공 정밀도에 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있었고 회전수에 대한 총 열팽창량이 선형적임을 알았다.
3. 초기예압, 스핀들속도 및 하우징 냉각상태 등의 측정이 용이한 입력 상태변수에 대한 열전달 및 열팽창 해석의 수식화를 정립하였다.
4. 공작기계에서 열적 특성의 동역학적 관계를 보다 쉽게 추정할 수 있도록 하였다.
5. 총 마찰 발열량 $\dot{Q}_f(n, F_n, F_i)$ 의 마찰계수 정의가 중요한 요소임을 알 수 있었다.

향후방향으로 실험에 의한 적절한 \dot{Q}_f 의 정의를 바탕으로 FEM 해석을 통해 주축설계에 바탕이 되는 주축의 열적특성에 대한 보다 정확한 모델구명의 연구가 필요하다고 본다.

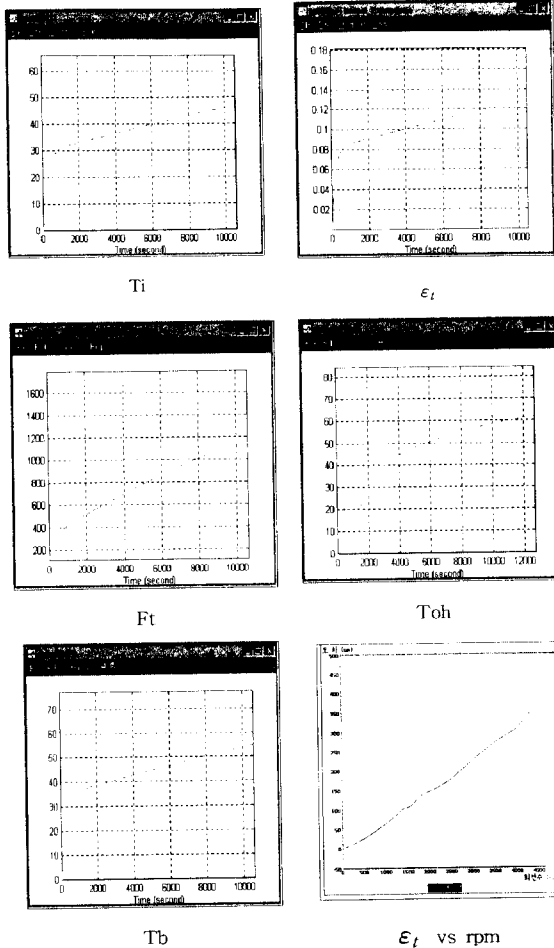


Fig. 7 Results for F_t , T_b , T_i , T_{oh} and ϵ_t simulation of angular contact ball bearing

참고문헌

1. 정성중, "공작기계의 적응제어 기술의 개발동향", 공작기계 자동화기술 특별세미나, 한국정밀공학회, pp. 68 - 76, 1988.
2. 김완두, "축경사가 볼베어링의 피로수명에 끼치는 영향에 관한 연구", 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1993.
3. 서울대학교, "고강성, 고정밀 고속주축 기술개발에 관한 연구", 통상산업부 과학기술처, 선도개발사업개발보고서, pp. 241 - 242, 1995.
4. 최대봉외, "고속공작기계용 모터내장형 주축의 열거동 및 자켓냉각특성해석", 한국정밀공학회, 제 14 권 제 2 호, pp. 33 - 40, 1997.
5. A. Muramatsu, S. Nakamura, H. Yoneyama, O. Iwasaki, "Heat Conduction Analysis for Motor Integrated Spindle", NSK Technical Journal, No. 658, pp. 32 - 39, 1994.
6. H. Schulz and T. Moriwaki, "High-Speed Machining", Annals of the CIRP, Vol. 41/2, pp. 637 - 643, 1992.
7. S. J. Lacey, F. P. Wardle, and S. Y. Poon, "High Speed Bearing for CNC Machine Tool Spindles", Chartered Mechanical Engineering, Vol. 30, No. 12, Dec., pp.51 - 56, 1983.
8. T. A. Harris, "Rolling Bearing Analysis", 2nd Edition, Wiley, New York, NY, 1984.
9. J. F. Tu and J. L. Stein, "A State-Space Model for Monitoring Thermally Induced Preload in Anti-Friction Spindle

Bearings of High-Speed Machine Tools", Transactions of the ASME, Vol. 116, pp. 372 - 386, 1994.

10. Y. C. Shin, "Bearing Nonlinearity and Stability Analysis in High Speed Machining", Journal of Engineering for Industry, Vol. 114, pp. 23 - 30, 1992.
11. Y. Onose, "Bearings and Lubrication Methods for High-Speed Machine Tool Spindles", NSK Technical Journal, No. 646, pp. 32 - 46, 1986.
12. A. Palmgren, "Ball and Roller Bearing Eng. 3rd ed, Burbank, Philadelphia, pp. 34 - 41, 1959.
13. F. C. Pruvot, "High speed Bearings for Machine Tool Spindles", Annals of the CIRP, Vol. 29/1, pp. 293 - 297, 1980.

Table 1. Parameter identification

Items(unit)	Value	Items(unit)	Value
a_{si} (m)	Ellipse's radius of contact surface of inner ring	N	Number of the rolling elements
a_{so} (m)	Ellipse's radius of contact surface of outer ring	Q_f (W)	Total friction heat generation
A_b (m ²)	Surface area of a rolling element	Q_{si}	Contact force of inner ring
A_h (m ²)	Surface area of the housing	Q_{so}	Contact force of outer ring
A_i (m ²)	Surface area of the inner ring	R_{bn}	Thermal resistance between the outer ring and the rolling elements
b (m)	Bearing width	R_{ib}	Thermal resistance between the inner ring and the rest of the housing
C_b (J/(kg°C))	Specific heat of a rolling element	R_{is}	Thermal resistance between the inner ring and the shaft
C_i (J/(kg°C))	Specific heat of the inner ring	R_{oh}	Thermal resistance between the outer ring and the rest of the housing
C_{oh} (J/(kg°C))	Specific heat of the outer ring/housing	r_h (m)	Radius of the housing
c_b	Ball center	r_o (m)	Radius of the outer race
c_i	Curvature center of inner race	T_b (°C)	Temperature of the rolling elements
c_o	Curvature center of outer race	T_h (°C)	Temperature of the housing
f_0	Coefficient of rolling friction	T_i (°C)	Temperature of the inner race
f_1	Friction coefficient related to loading direction	T_o (°C)	Temperature of the outer race
F_o (N)	Designed load capacity of the bearing	T_{oh} (°C)	Temperature distribution in the outer ring and the housing
F_n (N)	Contact force induced by external loading	α_d (m/m°C)	Linear expansion coefficient of bearing material
F_t (N)	Thermally induced preload	β	Ball attitude angle
F_{po} (N)	Initial preload acting on one rolling element	ϵ_1	Ball expansion
h_c	Convection coefficient of the atmosphere	ϵ_2	Outer ring expansion
h_{∞}	Heat convection coefficient of the atmosphere	ϵ_3	Inner ring expansion
m_b (Kg)	The mass of the rolling elements	ϵ_{10}	Expansion by thermally induced preload
m_i (Kg)	The mass of the inner race	η_b	Fraction of total friction heat into the rolling elements
n (rpm)	Spindle speed	η_i	Fraction of total friction heat into the inner ring
n_b (rpm)	Rotation speed of a ball	μ_{si}	Fraction coefficient of inner ring
n_c (rpm)	Revolution speed of a ball	μ_{so}	Fraction coefficient of outer ring
n_{si} (rpm)	Speed of inner race	π	3.141592
n_{so} (rpm)	Speed of outer race	ρ (Kg/m ³)	Bearing material density