

# FETM 을 이용한 다자유도 회전체 시스템의 진동해석 (Analysis for a MDOF rotor vibration using FETM)

김승현\*(전남대 대학원), 김영배(전남대 기계공학과)

S.H.Kim(Chonnam Nat. Univ.), Y.B.Kim(Chonnam Nat. Univ.)

## ABSTRACT

A MDOF vibration analysis of the rotor is performed using combined modeling of transfer matrix method and finite element method(FETM). This method combines the advantages of both matrix. Each rotor is modelled using transfer matrix method and treated one element or several ones. The finite element method is applied in composing a system matrix and finding roots. The method used in this paper is more efficient than conventional finite element method in saving calculation time and provides good results in complex MDOF rotor model.

Key Words : Transfer Matrix Method(전달행렬법), Finite Element Method(유한요소법)

### 1. 서론

에너지의 발생 및 변환에 사용되는 회전기계가 고성능화, 고속화함에 따라 위험속도(critical speed)구간을 통과하여 운전되는 경우가 있고 이에 따라서 회전축의 소음, 진동문제가 중요한 고려대상이 되었다. 그러므로 사전에 회전기계의 진동을 사전에 해석 및 예측하여 운전 시 불안정 영역을 피할 수 있게 하는 해석기술이 필요하게 되었다. 회전축의 진동에 영향을 주는 복합적인 인자를 고려하여 일반적인 형상의 회전축의 진동을 해석하는 방법에는 유한요소법, 전달행렬법 등이 있다. 전달행렬법은 행렬크기가 요소의 수와 무관하게 일정하여 계산이 간단하나 복잡한 구조물 또는 여러 가지 요소들의 모델링에 문제점이 있다. 유한요소법은 전달행렬법에 비하여 몇 가지 부수적인 영향을 고려할 수 있고, 복잡한 구조물의 모델링이 용이하나 전달행렬법에 비해 많은 기억용량과 계산시간을 필요로 한다는 단점이 있다. 또한 회전축계의 해석대상이 이중회전축 또는 부구조물을 갖는 회전축 등으로 확대됨에 따라 복잡한 구조물의 모델링기법이 필요하게 되었고, 많은 절점의 변수를 효과적으로 다룰 수 있는 계산기술이 필요하게 되었

다. 기존의 방법들의 단점을 보완하기 위해서 유한요소법과 전달행렬법을 결합하려는 시도가 있었고 전달행렬법의 행렬은 유한요소법의 행렬형태로 변환될 수 있으며 그 것의 역도 가능하다는 것이 제시되었다. 이렇게 두 방법을 결합한 방법을 FETM 방법이라 한다.

본 논문에서는 계산의 효율성을 높이면서도 복잡한 회전구조물의 해석에 이용 가능한 새로운 방법을 적용하여 간단한 회전구조물에 적용하여 해석함으로써 이 방법이 효과를 검증하였다.

### 2. 해석방법

#### 2.1 전달행렬법

전달행렬법은 회전자-베어링 시스템을 집중질량과 관성을 무시한 축으로 모델링할 수 있다.

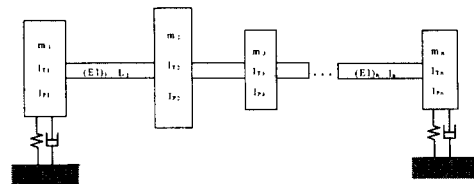


Fig 1. Rotor-Bearing System

(1) 집중질량에 대한 전달행렬

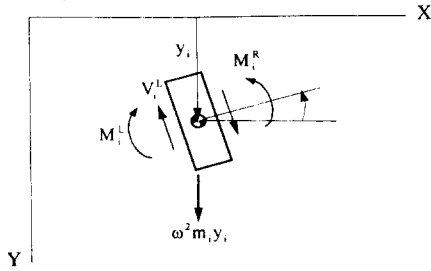


Fig 2. Free body diagram of mass point

n 번째 질점에 대한 평형상태를 고려하여 그 지점의 좌측의 상태 즉, 처짐( $Y$ ), 뒤틀림각( $\theta$ ), 전단응력( $V$ ), 굽힘모멘트( $M$ )를 우측의 상태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 J & 1 & 0 \\ \omega^2 m_n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^L \quad (1)$$

(2) 질량을 무시한 축에 대한 전달행렬

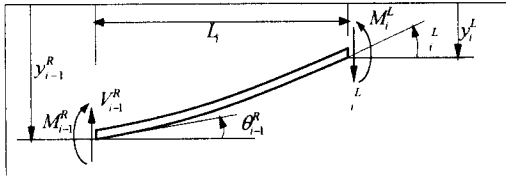


Fig 3. Free body diagram of shaft

다음은 관성을 무시한 축요소에 대한 전달행렬이다.

$$\begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^L = \begin{bmatrix} 1 & L & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{L}{EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_i^R \quad (2)$$

(3) 전체 전달행렬의 유도

질점과 축의 좌우측의 상태벡터는 다음과 같은관계로 나타낼 수 있다.

$$\{S\}_{iR}^M = [T_M]_i \{S\}_{iL}^M \quad (3)$$

$$\{S\}_{iR}^B = [T_B]_i \{S\}_{iL}^B \quad (4)$$

질점의 우측지점과 축의 좌측지점은 같은 점이므로

$$\{S\}_{iL}^B = \{S\}_{iR}^M \text{의 조건을 이용하면}$$

$$\{S\}_{iR}^B = [T_B]_i [T_M]_i \{S\}_{iL}^M \quad (5)$$

다음 질점의 왼쪽지점은 앞 축요소의 오른쪽지점과 같은 점이므로 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\{S\}_{i+1} = [T_B]_i [T_M]_i \{S\}_i \quad (6)$$

위의 과정을 연속적으로 적용하면 회전축계 양끝단의 상태벡터를 각각의 전달행렬의 곱 즉, 하나의 전달행렬로 관계지을 수 있다.

$$\{S\}_{n+1} = [T]_n [T]_{n-1} \cdots [T]_2 [T]_1 \{S\}_1 \quad (7)$$

(4) 해석절차

$$\begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_N = [T_o] \begin{Bmatrix} -Y \\ \theta \\ M \\ V \end{Bmatrix}_1 \quad (8)$$

여기서

$$[T_o] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} : \text{전체전달행렬}$$

지지조건에 따른 경계조건을 적용하여 위험속도와 모드형상에 대한 해석을 할 수 있다.

## 2.2 유한요소법

유한요소법에서 회전체-베어링 시스템은 유한 축 요소, 원판 요소, 베어링 요소로 구성된다. 이 세가지 종류의 축 요소로부터 유도된 질량 및 감쇠행렬, 강

성행렬을 기초로 경계조건과 적합성(compatibility)을 고려하여 계 전체의 질량 및 감쇠행렬, 강성행렬을 구성하고 고유치 해석을 통하여 고유진동수, 모우드 형태 등을 구할 수 있다.

### 1) 요소행렬의 유도

각 요소의 행렬들은 운동에너지 및 포텐셜에너지를 구한 후 Lagrange 방정식을 이용하여 구할 수 있다.

#### (1) 축 요소

$$([M_T^e] + [M_R^e])\{\ddot{q}^e\} - \Omega[G^e]\{\dot{q}^e\} + ([K_B^e] - [K_A^e])\{q^e\} = \{Q^e\} \quad (9)$$

#### (2) 원판요소

$$([M_T^d] + [M_R^d])\{\ddot{q}^d\} - \Omega[G^d]\{\dot{q}^d\} = \{Q^d\} \quad (10)$$

#### (3) 베어링 요소

$$[C^b]\{\dot{q}^b\} - [K^b]\{q^b\} = \{Q^b\} \quad (11)$$

#### (4) 계의 운동방정식

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} = \{Q\} \quad 4n \times 1 \quad (12)$$

여기서  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ 는 전체 질량, 감쇠 및 강성행렬이고,  $\{Q\}$ 는 불평형력 벡터이다.

### 2) Whirl Speed Analysis

자유진동 문제로 가정하여 계의 고유진동수 및 모드 형상을 구할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} - [K]\{q\} = \{0\} \quad 4n \times 1 \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_2 = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \\ F_2 = \begin{Bmatrix} M_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & P_1 \\ C & D & P_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = Y_1 \\ \begin{Bmatrix} M_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = F_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

윗식을 풀어쓰고 힘의 향으로 정리하면

$$\begin{aligned} F_1 &= -B^{-1}AY_1 + B^{-1}Y_2 - B^{-1}P_1 \\ F_2 &= [C - DB^{-1}A]Y_1 + DB^{-1}Y_2 + P_2 - DB^{-1}P_1 \end{aligned} \quad (15)$$

강성행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_T = \begin{bmatrix} -B^{-1}A & B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -B^{-1}P_1 \\ P_2 - DB^{-1}P_1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

전환과정에 있어서 부호규약을 수정하면

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_S = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}_T \quad (17)$$

부구조물의 동강성행렬과 외력벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K_S &= \begin{bmatrix} B^{-1}A & -B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \\ FE = F_S &= \begin{Bmatrix} B^{-1}P_1 \\ P_2 - DB^{-1}P_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

전체 지배방정식은 부구조물의 결합을 통해서 얻을 수 있다.

$$[K]\{X\} = \{F_e\} \quad (19)$$

$[K]$ : 전체 강성행렬

$\{X\}$ : 전체 변위벡터(모든절점의 변위를 나타냄)

$\{F_e\}$ : 절점 외력벡터

### 2.3 FETM ( Finite Element Transfer Matrix )

부구조물의 자유도를 줄이기 위해서 전달행렬법을 사용하여 전체전달행렬을 구하고 유한요소법에 적용 가능한 형태로 변환시킨 후 유한요소법에 적용할 수 있다. 부구조물의 전달행렬을 다음과 같이 쓸 수 있다.

### 3. 실험 및 해석 결과

#### 3.1 실험 장치

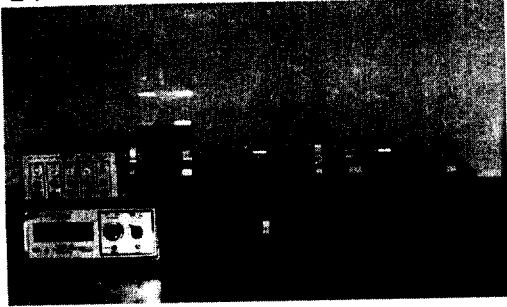
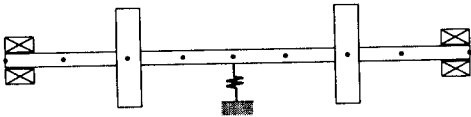


Fig 4. Experimental setup

#### 1) 실험 모델



Disk mass :  $m_1=m_2=0.8$  kg  
 Polar Inertia of disk :  $5.6 \times 10^{-4}$  kgm<sup>2</sup>  
 Diametral Inertia of disk :  $2.8 \times 10^{-4}$  kgm<sup>2</sup>  
 Density of shaft : 7800 kg/m<sup>3</sup>  
 Elastic modulus of shaft :  $2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>  
 Diameter of shaft : 0.001 m  
 Length of shaft : 0.5 m

#### 3.2 실험 결과

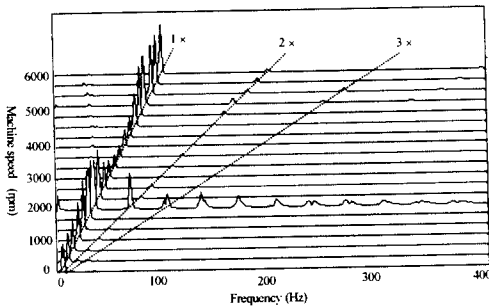


Fig 5. Waterfall plot

#### 3.3 해석 결과

##### 1) FETM 해석 결과

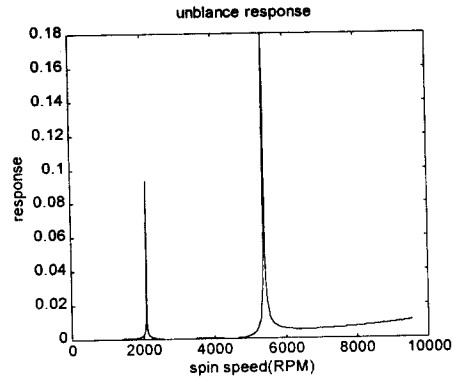


Fig 6. Unbalance response for experimental model

### 4. 결론

본 연구에서는 기존의 회전체 진동해석에 주로 이용되는 방법들의 단점을 보완하기 위해 새로운 해석방법을 회전체 모델에 적용하였다. FETM 방법을 간단한 회전체 모델에 적용하여 실제 실험결과와 비교하여 본 결과 기존에 사용되던 유한요소법 보다 훨씬 적은 계산시간으로도 유효한 결과를 얻을 수 있다는 사실을 확인할 수 있었다. 즉 이 방법을 사용함으로써 복잡한 부구조물을 갖는 다단 회전축의 해석이 훨씬 적은 시간에 가능하다.

#### 참고문헌

- (1) John M. Vance., Rotordynamics of Turbomachinery John Wiley & Sons., 1988
- (2) Fredric F. Ehrich., Handbook of Rotordynamics McGraw-Hill., 1992
- (3) Nelson H.D. & McVaugh J.M., The Dynamics of Rotor Bearing Systems Using Finite Elements. Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, p. 593-600, May, 1976.
- (4) Ruhl R. & Booker J.F., A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems. Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, p. 126-132, Feb, 1972
- (5) Storace A.F., Interactive Engine System Dynamics Analysis. ASME paper 91-GT-193, 1991
- (6) Demeter G. Fertis, Mechanical and Structural Vibrations John Wiley & Sons., 1991