

유한요소법에 의한 3차원 충격파 해석

The Analysis of the Stress Wave in 3-Dimensional Model by Finite Element Cord

진성훈*(서남대 공학부)

ABSTRACT

This thesis attempt to explore the shape of stress wave propagation of 3-dimensional stress field which is made in the process of time increment. A finite element code about 3-dimensional stress wave propagation is developed for investigating the changing shape of the fracture by the impact load. The Finite Element Code ,which is the solution for the 3-dimensional stress wave analysis, based on Galerkins and Newmark-β method at time increment step. The tensile stress and compressive stress become larger with the order of the middle, the upper and the opposite layers when the impact load is applied. In a while the shear stress become larger according to the order of the upper, the middle and the opposite layers when impact load applied

Key Words : stress wave(응력파, 충격파), time increment(시간중분), stress field(응력장), impact load (충격하중), upper layer(상층부), middle layer(중간층)

1. 서론

일반적으로 고체 매질내에 전달되는 응력의 파동을 응력파 또는 충격파라 하고, 충격파는 매질의 관성과 탄성에 의해 전달된다. 재료가 충격하중을 받으면 응력파가 생성되어 고체 내부에 전달되면서 압축과 인장응력이 반복되고 응력의 소멸이 반복된다. 이는 구조물의 결합이 없는 상태에서도 응력집중 현상이 나타나며, 이에 따른 변형 및 파괴거동도 정하중 때와는 판이하게 달라지게 된다. 재료의 변형거동을 지배하는 변형속도는 응력파에 의해 좌우되고, 그 응력파는 다시 재료의 변형거동에 의해 지배된다.

탄성체에서의 응력파 전달이론은 Kolsky, Scoch와 Miklowitz 논의되기 시작하였으며, 그후 Brekhovskikh, Lindsay, Morse와 Ingard에 의해 탄성체 내에서의 파의 전달에 관한 정성적인 이론해석만이 가능했으며, 응력파의 전달에 관한 정성적이면서 정량적인 이론해석이 불가능한 실정이다. 따라서 안전 설계를 위해서는 충격에 의해 구조물에 생성되는 응력장과 응력파의 시간에 따른 변화들을 해석하는 것이 절대적으로 필요한 실정이다. 응력파 전파에 관한 수치해석 방법으로는 경계적분법, 직접 시간 적분법, DtN법, 반이산화법, Fourier급수를 이용한 스펙트럼 해석등이 있으나, 이들은 해석과정이 복잡하고 해석결과에 대한 신뢰성으로 인하여 탄성체내에서 파의 전파에 관한 정성적인 해석만이 가능하다.

따라서 본 연구에서는 Newmark-β 방법을 이용하여 진·황동이 개발한 3차원 유한요소 프로그램으로 3차원 평판 내에서 시간의 흐름에 따라 전파되는, 구조물 내부에 발생되는 3차원 응력파의 전달 형태, 응력장의 크기를 해석코자 한다.

2. 응력파 지배방정식

직각 좌표계에서 3차원 응력파의 동적 평형을 만족시키는 지배방정식은 다음식과 같이 내부에서 발생하는 내력(internal force)과 입자의 질량이 가지고 있는 관성력(inertia force)의 평형식으로 구성된다. 3차원 응력파의 지배방정식은 4개의 독립 변수 인 시간 t와 공간상의 x, y, z 좌표를 포함하는 2계 편미분방정식이다

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

식(1)은 하중 작용점 으로부터 충격파가 일정한 속도 c로 공간 좌표상의 법선방향으로 평형하게 이동하며, 이에대한 이론해 ϕ는 다음 식과 같다.

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{2} [f(lx + my + nz + ct) + f(lx + my + nz - ct)] \quad (2)$$

여기서 함수 $\phi = f(x + my + nz - ct)$ 는 충격하중이 작용하는 점으로부터 밖으로 ct 만큼 진행함을 의미 한다. 즉 함수 $f(x + my + nz)$ 가 충격하중이 작용하는 방향과 같은 방향으로 c 의 속도로 진행함을 나타낸다. 같은 의미로 $\phi = f(x + my + nz + ct)$ 이면, 함수 $f(x + my + nz)$ 가 충격하중이 작용 하는 방향과 반대의 방향으로 ct 만큼 진행함을 의미 한다. 종파와 횡파를 해석대상으로하여 일반적인 충격파 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3)$$

3. 유한요소 수식화

시간에 따라 변하는 응력과 거동을 해석하는 일반적인 방법으로는 해석영역을 이산화하는 방법이 있는데, 이 방법은 시간의 함수를 포함하는 편미분 방정식 형태의 운동방정식을 공간영역과 시간영역으로 분할한 후 직접 시간적분을 수행하여 근사해를 구하는 것이다. 외부에서 가한 하중(f)을 고려하면, 충격파 지배방정식은 다음식과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - f - k_n \phi = 0 \quad (4)$$

식(4)를 Galerkin 방법으로 유한요소 수식화하고, 경계조건을 고려하여 요소의 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[K_n]\{\phi\} + [K]\{\phi\} + [K_{S_1}]\{\phi\} + \{R(\lambda)\} = \{0\} \quad (5)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} k_n N_i N_j d\Omega^{(e)}$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega^{(e)}} \left(k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega^{(e)}$$

$$k_{S_w} = \int_{S_1} h N_i N_j dS_2$$

$$R_i = \int_{\Omega^{(e)}} f N_i d\Omega^{(e)} + \int_{S_1} q_i dS_2^{(e)}$$

$[K_n]$ 는 가속도에 의한 관성행렬, $[K]$ 는 탄성에 의한 강성행렬, $[K_{S_1}]$ 는 경계조건에 의해 결정되는 경계행렬 및 $\{R(\lambda)\}$ 는 외부에서 가한 하중벡터이다. 그리고 h 는 경계면에서 응력파가 투과되는 것과 반사되는 비율을 나타내는 상수, f 는 외부에서 작용하는 하중이다.

임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서의 평형상태를 이용하는 방법으로는 Houbolt방법, Wilson θ 방법 및 Newmark- β 방법 등이 있는데, 본연구에서는 수렴성이 좋고, 평형상태를 만족하는 Newmark- β 방법을 이용하여 시간에 대한 연속인 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[K^*]\{\phi\}_{t+\Delta t} = \{F^*\}_{t+\Delta t} \quad (6)$$

여기서 $[K^*] = [K] + \frac{4}{\Delta t^2}[M]$: 유효 강성 행렬

(effective stiffness matrix)

$$\{F^*\}_{t+\Delta t} = \{F(t+\Delta t)\} + [M] \left(-\frac{4}{\Delta t^2} \{\phi\}_t + \frac{4}{\Delta t^2} \{\phi\}_0 + \{\ddot{\phi}\}_0 \right) \quad (7)$$

: 유효 하중 벡터(effective load vector)

위 식의 해를 구하기 위해 다음과 같은 계산과정을 단계적으로 수행하면 된다.

- ① 요소의 관성과 강성행렬 $[K_n]$, $[K]$ 를 구한다.
- ② 초기의 $\{\phi\}_0$, $\{\dot{\phi}\}_0$ 및 $\{\ddot{\phi}\}_0$ 값을 정한다.
- ③ 미소 시간 증분 Δt 와 변수 β 와 γ 를 선정한다.
- ④ 유효 강성행렬 $[K^*]$ 를 구한다.
- ⑤ 경계조건을 고려하여 $[K^*]$ 를 수정한다.
- ⑥ 매 시간 증분에 따른 유효 하중 벡터 $\{F^*\}_{t+\Delta t}$ 를 구한다.
- ⑦ 경계조건을 고려하여 유효 하중 벡터 $\{F^*\}_{t+\Delta t}$ 를 수정한다.
- ⑧ 임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서 변위 $\{\phi\}_{t+\Delta t}$ 를 구한다.
- ⑨ 임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서 속도와 가속도를 구한다.

4. 유한요소 해석모델 및 경계조건

3차원 응력과 전달에 대한 유한요소 해석위해 본 연구에서 사용한 모델인 일반용 강(Steel)의 물리적 특성은 Table 1.과 같으며, 모델의 크기, 절점(node)수, 요소(element)수 및 총자유도(Total number of freedom)는 Table 2.와 같다. 또한 유한요소 해석에 사용한 시간증분 간격은 응력파가 1cm 진행하는데 소모되는 시간 $\Delta t = \frac{l}{c} = \frac{l}{5.015E6} = 2E10^{-7} \text{sec}$ 이다. 이 시간동안에 x 좌표값이 $x/2 = 5 \text{cm}$, y 좌표값이 $y/2 = 5 \text{cm}$ 이고 z 좌표값이 $z/2 = 0.75 \text{cm}$ 인 고정단의 반대쪽 면의 중앙에 10 kg의 계단하중을 집중하중으로 가하였다. 이때 3차원 평판에 전달되는 3차원 응력파의 전달 양상을 관찰 하였다.

Table 1. The material properties of model

Young's Modulus (kgf/mm ²)	Density (kgf·sec ² /mm ⁴)	Poisson's ratio	Speed (m/sec)
2.0E4	7.951E-10	0.28	5015

Table 2. The Total number of mode point and elements in the finite element analysis

Element size(cm)	Node Number	Element Number	Total Number of freedom
10×10×0.75	3,362	1,600	10,086

이상과 같은 해석 대상에 초기조건을 $\{\phi\}_0, \{\dot{\phi}\}_0$ 와 $\{\ddot{\phi}\}_0$ 를 0으로 하고, 경계조건으로 x 좌표값이 0 과 $x = 10$ cm(= x_l) 인 y 좌표의 양쪽 끝단 전체를 고정하여 응력파가 100%반사되는 것으로 하였으며, 고정단 이외의 경계면에서 응력파는 100% 투과되는 것으로 가정하였다. 유한요소 해석에 사용한 요소는 8절점의 육면체 isoparametric 요소로 하였으며, Newmark- β 법을 이용하여 [진·황]등이 개발한 유한요소 프로그램으로 응력파 전달에 대한 유한요소 해석을 하였다.

본 연구에서 사용한 Newmark 상수는 유한요소 해석시 수렴성이 가장 좋은 $\beta = 1/2, \gamma = 1/4$ 을 이용하였다. 또한 기하학적인 형상과 재료의 물리적 특성은 이론해에서 사용한 값과 동일한 값을 갖는 유한요소 모델을 이용하였다.

5. 결과 및 고찰

본 연구에서 유한요소해석에 사용한 시간분분 간격(Δt)은 2×10^{-7} sec로 증분시켰으며, personal computer에서 유한요소 프로그램과 입력 데이터를 작성하여 super-computer인 cray/c-90을 이용하여 유한요소 해석을 수행한 결과이다. 두께 방향을 3개의 요소로 분할하여 시간의 변화에 따른 3차원 응력파 전달에 관한 유한요소 해석을 수행한 결과는 Fig. 1~4에 보인바와 같다.

Fig. 1는 충격하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 X-방향 응력값(σ_x)을 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. σ_x 는 충격을 가한 순간, 충격하중을 받는 미소면적에는 X-축 방향으로 인장응력이 작용하며, 이러한 인장응력으로 인하여 충격하중을 받는 미소면적 주위에는 압축응력이 발생함을 볼 수 있다.

초기에 충격을 가했을때 보다 시간이 미소하게 증가한 후 응력값 σ_x 가 더 크게 나타나며, 시간이 경과하면 인장응력값은 낮아지고 압축응력값은 커지나 초기에 형성된 응력장의 형태를 유지하면서 응력파가 전달되는 현상을 볼 수 있다. 또한 응력파 선단이 경계면에 도달한 후에는 압축응력과 인장응력이 모두 낮아지나, 경계조건에 의해 응력파가 반사되는 경계면에서는 응력파 선단에서의 응력값이 중첩되어 커지는 현상이 나타나며, 응력파가 투과되는 경계면에서는 응력값 σ_x 가 0 이 되는 현상을 볼 수 있고, 충격하중이 작용한 부위의 응력값은 다른 부위에 비해 큰폭의 인장, 압축응력이 반복적으로 나타나는 현상을 볼 수 있고, 이때 응력장의 크기는 X, Y-방향으로 응력파의 전달 속도

에 해당하는 값만큼의 크기로 넓어지는 현상을 볼 수 있다.

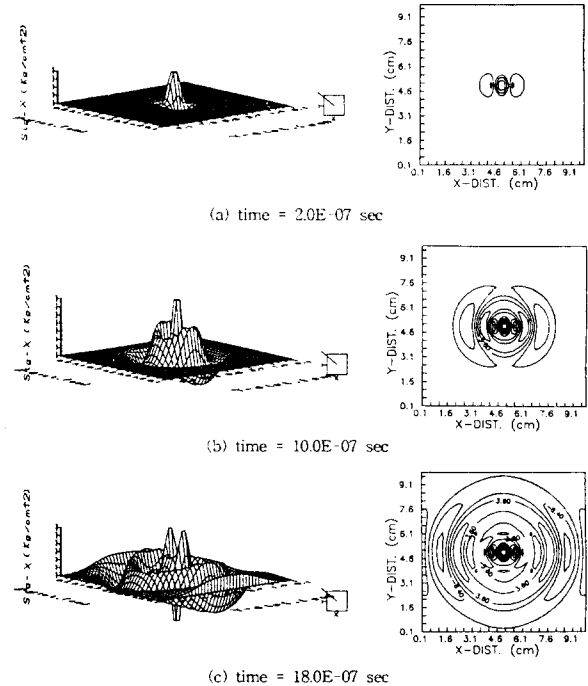


Fig. 1 Results of the stress σ_x in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

Fig. 2는 충격하중에 의해 3차원 요소의 세중 가운데 중간층에 해당하는 요소에 형성되는 X-방향 응력값(σ_x)을 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. 유한요소 해석 결과로 부터 중간층의 σ_x 는 충격하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 σ_x 에 비해 크기가 작으며, 인장·압축이 주기적으로 반복되는 현상을 볼 수 있다. 이때 응력장의 크기는 응력파 선단이 X, Y-방향으로 응력파의 전달 속도에 해당하는 값만큼의 크기로 넓어지는 현상을 볼 수 있다.

Fig. 3은 충격하중이 작용하는 면에 대해 반대쪽 면의 요소에 발생하는 X-방향 응력값 σ_x 를 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. Fig. 3의 유한요소 해석 결과로 부터, σ_x 는 충격을 가한 순간에 충격하중을 받는 부위에 X-축 방향으로 압축응력이 작용하고, 시간이 증가할수록 압축응력값은 작아지며 인장응력값은 커지는 현상을 볼 수 있다. 응력파가 전달된 응력파 선단은 초기에 형성된 응력장의 형태를 유지하면서 전달되며, 충격하중을 작용시킨 미소 부위의 인장·압축응력의 반복으로 인하여 미소 부위가 파형원(wave source)의 작용을 하고 있는 것을 볼 수 있다.

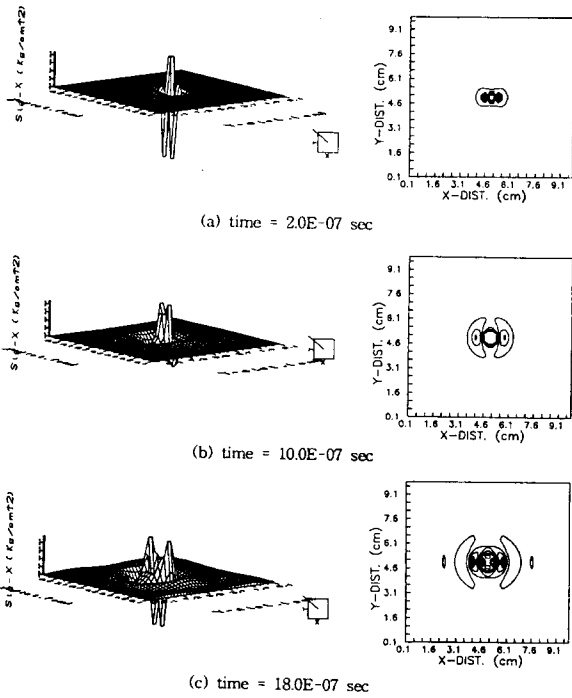


Fig. 2 Results of the stress σ_x in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

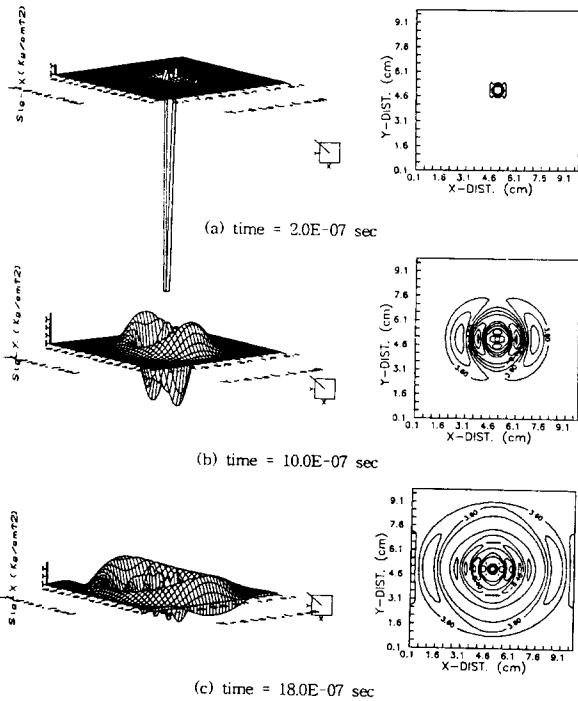


Fig. 3 Results of the stress σ_x in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

Fig. 4은 충격하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 전단 응력값 τ_{yx} 를 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. Fig. 4의 유한요소 해석결과는 충격하중에 의해 3차원 평판의 표면에 발생하는 응력파의 전단응력 성분 τ_{yx} 가 충격하중을 받는 부위의 우측부분은 음의 값을 가지며, 좌측부분은 양의 값을 갖는, 충격하중이 가해진 부분의 x 값에 해당되는 축에 대해 대각선으로 대칭인 분포를 보이고 있다. 또한 초기에 생성된 전단응력값의 크기와 시간이 흐른후 전단응력값의 크기가 거의 같은 값을 가지고 있음을 알 수 있고, 전단응력을 받는 면적은 응력파의 전달속도의 크기 만큼 커짐을 알 수 있다.

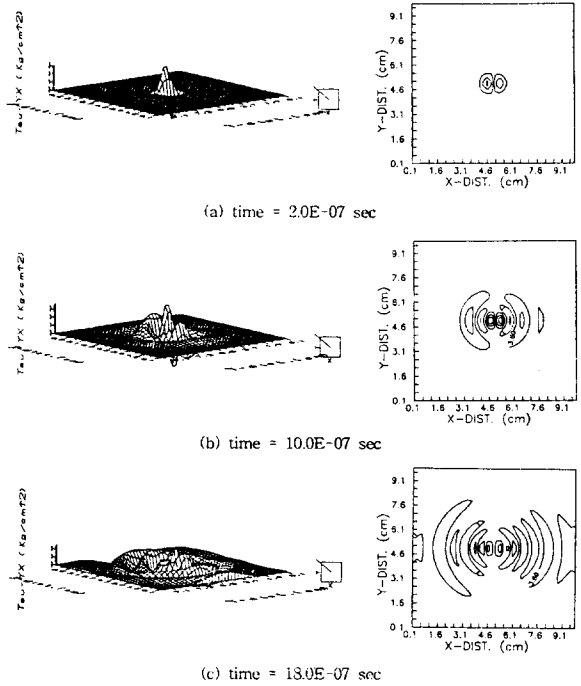


Fig. 4 Results of the shear stress τ_{yx} in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

Fig. 5은 충격하중에 의해 3차원 요소의 3층 가운데 중간 층에 해당하는 요소에 형성되는 전단응력값 τ_{yz} 를 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. 유한요소 해석 결과로부터 중간층의 τ_{yz} 는 충격하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 τ_{yx} 에 비해 큰 값을 가지며, 시간이 경과한 후 전단응력값의 크기가 충격하중이 작용한 초기에 생성된 전단응력값의 크기보다 현저히 낮아지는 현상을 보이나 전반적으로 충격하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 전단응력값 τ_{yz} 보다 훨씬 큰 값을 가지고 있다.

Fig. 6는 충격하중이 작용하는 면에 대해 반대쪽 면의 요소에 발생하는 전단응력값 τ_{xz} 를 시간의 변화에 따라 해석한 결과이다. Fig. 6의 유한요소 해석 결과, 충격하중

하중을 받는쪽 면의 요소에 발생하는 전단응력값과 중간층에 해당하는 요소에 형성되는 전단응력값들 보다 큰 값을 가지며, 충격하중이 작용하는 미소 면적에 최대 전단응력이 발생함을 알 수 있으며, 응력파가 경계면에 도달하기 시작하면 충격하중이 작용하는 면에 대해 반대쪽 면의 요소에 발생하는 전단응력값이 중간층의 전단응력값보다 작아지는 현상을 볼 수 있다.

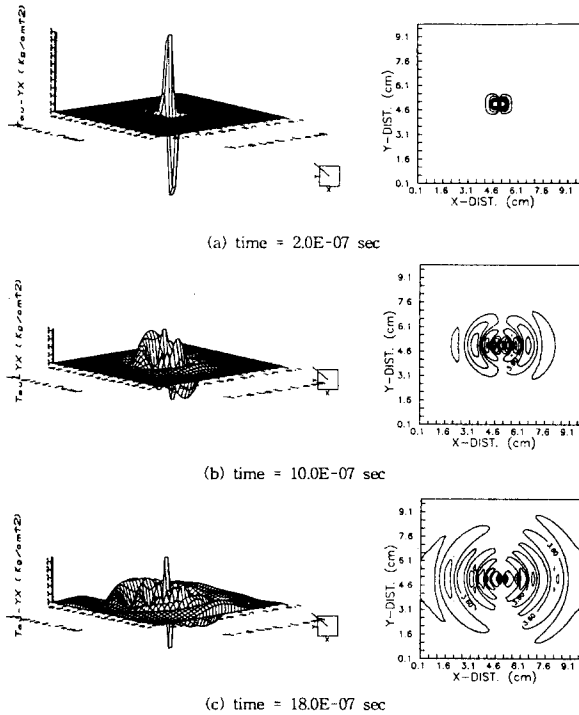


Fig. 5 Results of the shear stress τ_{yx} in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

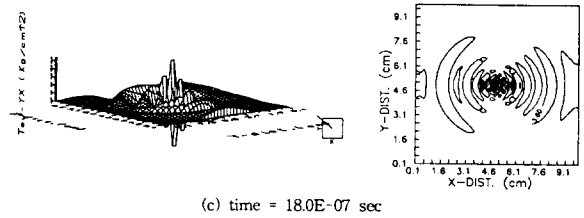
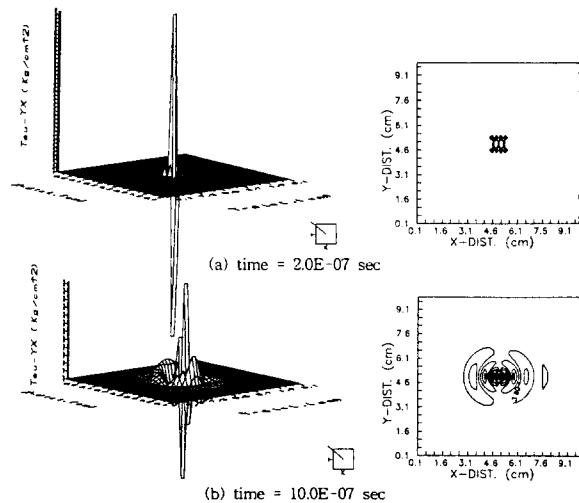


Fig. 6 Results of the shear stress τ_{yx} in 3-Dim. plate at time step $\Delta t = 10^{-7}$ sec

6. 결론

본 논문은 3차원 응력과 해석을 위한 시간의 흐름에 따라 형성되는 3차원 응력장의 크기를 고찰하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

응력장의 크기를 고찰함으로써 구조물의 안전설계에 적용하기 위하여, 유한요소 해석시 두께방향의 요소는 최소한 3층 이상으로 하는것이 유한요소 해석 결과에 두께의 영향을 극소화 시킬 수 있고, 두께방향의 요소를 3층 이상으로 한 3차원 응력과 해석 결과, 인장응력 또는 압축응력의 크기는 중간층, 충격하중이 작용하는 면, 충격하중이 작용하는 반대 면의 순서로 커지며, 전단응력은 인장응력 또는 압축응력과는 달리 충격하중을 받는 면, 중간층, 충격하중이 작용하는 반대 면의 순서로 커진다. 위의 결과로부터 실제 구조물에 충격하중이 작용하면 충격하중이 작용하는 면의 반대쪽 면에서 항복 또는 파괴가 먼저 시작될 것으로 판단되었다.

7. 참고문헌

1. 林 卓夫, and 田中吉之助, "衝擊工學", 日刊工業新聞社, 1988(昭和63), p7-27.
2. H. Kolsky, "Stress Waves in Solids," New York Dover Pub.Inc., 1963, p4-45.
3. J. Miklowitz, "Elastic Wave Propagation," Applied Mechanics Surveys, Spartan Books, 1966.
4. 黃鉀雲, "균열이 있는 유한 평판내의 응력과 전파에 관한 유한요소법적 해석" 전남대학교 대학원 박사학위 논문, 1994
5. 陳聖勳, "3차원 응력과 해석을 위한 유한요소 기법의 개발" 전남대학교 대학원 박사학위 논문, 1995
6. 矢川元基, 破壊力學, 培風館, 1988, p62.
7. 岸本 의 2명, 日本機械學會論文集, 46-410, A, 昭和 55, p1049.