

복소 유사 응력 함수에 의한 타원 강체 함유물을 내포하는 크릴 재료의 응력 해석

Stress Analysis of Creep Material Containing Elliptical Rigid Inclusion by Complex Pseudo-Stress Function

김종성(한국전력기술(주) 전력기술개발연구소), 이강용(연세대 기계공학과)
Jong Sung Kim(KOPEC), Kang Yong Lee(Dept. of Mech. Engng, Yonsei Univ.)

Abstract

The analysis model is the power law creep material containing an elliptical rigid inclusion subjected to the arbitrarily directional stress on infinite boundary. The stress analysis is performed using the conformal mapping function and complex pseudo-stress function. The stress distributions near an elliptical rigid inclusion are obtained with various ellipse shapes, strain hardening exponents and directions of applied stress.

Key Words : Creep Material(크릴 재료), Complex Pseudo-Stress Function(복소 유사 응력 함수), Elliptical Rigid Inclusion(타원 강체함유물), Stress Analysis(응력해석)

1. 서론

크릴 거동은 적어도 두세기 전부터 논의되어지기 시작했는데 해석의 난해함으로 연구 대상에서 한동안 제외되었다. 그러나 에너지 설비, 우주 항공 엔진과 화학 반응로등의 효율과 출력 증대를 위해 작동 온도와 압력이 증가되어졌고 이로 인하여 크릴 변형을 일으키게 되어 그 해석의 중요성이 증가되어졌다.

Power law 크릴 재료의 응력 해석에 대해 연구한 기존의 연구를 살펴보면 다음과 같다. Rozenblium⁽¹⁾은 얇은 박판의 크릴 거동에 대한 개략화된 응력 방정식을 개발하였다. Spence⁽²⁾는 유연 곡선 파이프가 압축 상태에 있을때 크릴 해석을 수행하였다. Mukherjee⁽³⁾는 경계요소법을 이용하여 금속의 크릴 변형에 대해 연구하였다. Lee와 Gong⁽⁴⁾은 단순 인장 또는 순수 전단 응력이 외부 무한 경계에서 작용하고 power law 크릴 거동을 하는 무한체에 원형 모양의 강체 함유물이 있을때의 응력 분포를 유사 응력 함수(pseudo-stress function)를 이용하여 결정하였다. Lee와 Smith⁽⁵⁾는 단순 인장이 외부 무한 경계에서 작용하고 power law 크릴 거동을 하는 무한체에 원형 구멍이 존재하는데 구멍 표면에 걸쳐서 응력이 작용하지 않는 경우에 대하여 응력 분포를 유사 응력 함수를 이용하여 결정하였다.

그러나 타원 형상의 강체 함유물이 포함되어 있는 power law 크릴 무한체에 대한 응력의 엄밀해에 대한 기존의 연구는 찾아볼수 없다. 따라서 본 논문에서는 복소 변수, 등각 사상 함수와 복소 유사 응력 함수를 이용하여 무한 경계에서 임의 방향의 응력이 작용하는 타원 강체 함유물을 내포하는 power law 크릴 재료 무한체에 대해 타원 강체 함유물 주위의 응력 분포를 엄밀해로 결정하고자 한다.

2. 복소 유사 응력 함수와 등각 사상 함수

2.1 복소 유사 응력함수

Lee와 Gong⁽⁴⁾이 power law 크릴 재료에 대해 개발한 아래의 식들이 본 연구에서 사용된다.

Kolosoff 응력 함수⁽⁶⁾ $\phi(z)$, $\psi(z)$ 들과 변위 rate 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\dot{u} + i\dot{v} = K(m)[\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}], \quad (1)$$

여기서 $K(m) = (\frac{\sqrt{3}}{4})(\frac{2\sqrt{3}}{\sigma_0})^{1/m}$, m은 변형을 rate 경화지수이고 σ_0 은 강도 계수이다.

복소 유사 응력 함수 Λ 와 변형을 rate 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= -\dot{\epsilon}_y = -K(m)\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2}\right) \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= -iK(m)\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2}\right),\end{aligned}\quad (2)$$

여기서 $\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\{\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\}$ 이다.

복소 유사 응력 함수 Λ 와 응력 성분식 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 4\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2}\right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2}. \quad (3)$$

복소 유사 응력 함수 Λ 와 팽창 응력 σ_p 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_p = \sigma_x + \sigma_y &= 4 \int \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \right\} dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right)^{(m-1)/2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \bar{z}^2} \right\} d\bar{z} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

식(4)를 임의의 적분경로 C_i 에 대해 극좌표 (r, θ) 로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_p(\beta_2) - \sigma_p(\beta_1) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^m (I_r - I_\theta) \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^m \int_{C_i} \eta^{m-1} \left[\left\{ \left(m \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right) \cos(\Delta + 2\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\eta \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \sin(\Delta + 2\theta) \right\} dr \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left(\eta \frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{m}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \cos(\Delta + 2\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(m \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \right) \sin(\Delta + 2\theta) \right\} r d\theta \right].\end{aligned}\quad (5)$$

무한 power law 크립 재료에 대해 Kolosoff 응력 함수 $\phi(z)$ 와 $\psi(z)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \{-(X+iY)/2^{1-m} c_1(m)(m+3)\pi\} \ln z + \phi^*(z) \\ \psi(z) &= \{(X-iY)/2^{1-m} c_1(m)(m+3)\pi\} \ln z + \psi^*(z),\end{aligned}\quad (6)$$

여기서

$$\begin{aligned}\phi^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ \psi^*(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n z^n,\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 X와 Y는 외력이다.

2.2 등각 사상법

Fig.1에서 보는 바와 같이 ζ 복소 평면상의 단위원

Γ' 와 그 외부영역 E' 는 등각사상함수 $\omega(\zeta)$ 에 의해서 z 복소 평면상의 폐곡선 Γ 와 그 외부영역 E 로 변화된다.

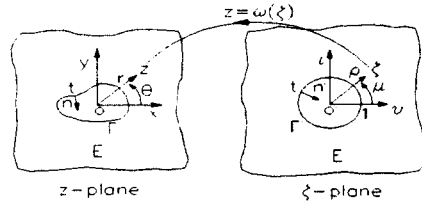


Fig. 1. Conformal mapping.

3. 응력 해석

Fig.2에서 보는 바와 같이 x 축에 대해 임의의 각도 γ 로 무한 경계에서 작용하는 응력 σ 에 응력 변환식을 이용하면 다음 식을 얻는다.

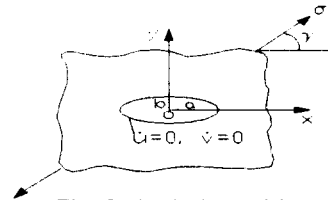


Fig. 2. Analysis model.

$$\sigma_y = \sigma \sin^2 \gamma, \quad \sigma_x = \sigma \cos^2 \gamma, \quad \sigma_{xy} = \sigma \sin \gamma \cos \gamma \quad (z = \infty). \quad (8)$$

해석 모델에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy} : \text{유한한 값} \quad (\text{무한 경계면}) \quad (9)$$

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad (\text{강체 함유물 표면}) \quad (10)$$

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 0 \quad (\text{강체 함유물 표면}) \quad (11)$$

함유물이 타원 형상인 경우 등각 사상 함수⁽⁶⁾는 다음과 같다.

$$z = \omega(\zeta) = C\left(\zeta + \frac{D}{\zeta}\right), \quad (12)$$

여기서 $C = \frac{a+b}{2}$ 이고 $D = \frac{a-b}{a+b}$ 이다.

함유물의 표면에는 어떠한 외력도 작용하지 않는 것을 이용하고 식(12)를 식(6)에 대입한후 ζ 에 대한 다항식으로 전개하고 식(3)과 무한체의 외부 경계에서 응력은 유한하다는 식(9)를 이용하면 다음과 같다.

$$\phi(\zeta) = b_1 \zeta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \zeta^n = b_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \quad (13)$$

$$\psi(\zeta) = b'_1 \zeta + \sum_{n=-\infty}^0 b'_n \zeta^n = b'_1 \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{\zeta^n}. \quad (14)$$

함유물의 표면에서 변위 rate는 영이라는 경계조건 식(11)과 식(1)로부터 다음과 같은 식이 도출된다.

$$\dot{u} + i\dot{v} \Big|_{\zeta=1} = K(m) [\phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (15)$$

식(15)로부터 $\psi(\zeta)$ 에 대해 정리한 결과식에 식(13)과 (14)를 대입하고 Cauchy 적분⁽⁷⁾을 수행한후 양변을 계수 비교하면 다음과 같다.

$$\overline{a_0} = a'_0 \quad (16)$$

$$\overline{a_1} - b_1 D = b'_1 \quad (17)$$

$$\overline{a_n} = 0, \quad n=2,3,4,\dots \quad (18)$$

식(18)을 이용하고 a_0 는 응력값과 변위 rate 값에 아무런 영향을 주지 못하는 복소 계수라는 점을 고려하면 식(13)은 다음과 같다.

$$\phi(\zeta) = b_1 \zeta + \frac{a_1}{\zeta}. \quad (19)$$

식(15)로부터 $\psi(\zeta)$ 에 대해 정리한 결과식에 식(12)와 (19)를 대입하면 다음 식을 얻을수 있다.

$$\psi(\zeta) = \frac{\overline{b_1}}{\zeta} + \overline{a_1} \zeta - \frac{1+D\zeta^2}{\zeta^2-D} (b_1 \zeta - \frac{a_1}{\zeta}) \quad (20)$$

식(3)과 (4)의 양변에 $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty}$ 을 취하고 식(12), (19)와 (20)을 대입하고 경계조건식(8)과 식(17)을 이용하면 다음과 같은 계수 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} b'_{1x} &= -2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} C \cos 2\gamma \\ b'_{1y} &= 2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} C \sin 2\gamma, \\ b_1 &= \frac{2}{m+1} \sigma^{\frac{1}{m}} C. \end{aligned} \quad (21)$$

식(17)에 식(21)을 대입하여 실수부와 허수부로 분류하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_{1x} &= b'_{1x} + b_1 D = 2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} C \left(\frac{D}{m+1} - \cos 2\gamma \right) \\ a_{1y} &= -b'_{1y} = -2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} C \sin 2\gamma, \end{aligned} \quad (22)$$

식(5)의 β_2 지점의 좌표를 (r, θ) 로 설정하고 β_1 의 지점을 (∞, θ) 로 설정하고 경계조건 식(8)을 이용한 후 식(19)와 (20)을 대입한 팽창 응력의 결과식과 식(3)에 식(19)와 (20)을 대입하여 극 좌표계로 나타낸 결과식으로 부터 각 응력 성분식이 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \sigma_x(r, \theta) &= \frac{\sigma}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \int_{\infty}^r \eta^{m-3} \left[Re^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta - \left(\frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} + \frac{\partial Im}{\partial r} \right) \sin 2\theta \right\} \\ &\quad + (m-1) Re Im \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta - \left(\frac{\partial Re}{\partial r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} + Im^2 \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. - \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right] dr - 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \eta^{m-1} Re \\ \sigma_y(r, \theta) &= \frac{\sigma}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \int_{\infty}^r \eta^{m-3} \left[Re^2 \left\{ \left(m \frac{\partial Re}{\partial r} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta - \left(\frac{m}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} + \frac{\partial Im}{\partial r} \right) \sin 2\theta \right\} \\ &\quad + (m-1) Re Im \left\{ \left(\frac{\partial Im}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta - \left(\frac{\partial Re}{\partial r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} + Im^2 \left\{ \left(\frac{\partial Re}{\partial r} - \frac{m}{r} \frac{\partial Im}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. - \left(m \frac{\partial Im}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Re}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta \right\} \right] dr + 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \eta^{m-1} Re \\ \sigma_{xy}(r, \theta) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \eta^{m-1} Im. \end{aligned} \quad (23)$$

4. 결과 및 고찰

강체 함유물의 형상이 단위원이면서 무한체의 외부 경계에서 수직 응력만이 작용하는 경우, 즉 γ 가 90° 인 경우인 경우 Re 과 Im 은 다음과 같이 변화된다.

$$\begin{aligned} Re &= -2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} \left\{ \left(\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^2} \right) \cos 4\theta - 1 \right\} \\ Im &= 2 \frac{m-2}{m} \sigma^{\frac{1}{m}} \left(\frac{3}{r^4} - \frac{2}{r^2} \right) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

식(24)는 Lee와 Gong⁽⁴⁾의 결과와 동일하다. 또한 식(24)를 σ_x , σ_y , σ_{xy} 에 대한 식(23)에 대입하면 그 결과는 Lee와 Gong⁽⁴⁾의 결과와 일치한다.

Fig.3은 m 이 0.5, a 가 1, γ 가 45° , ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 유효 응력을 b 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. 여기서 $\bar{\sigma}$ 는 유효응력이다. Fig.4는 a 가 1, b 가 0.5, γ 가 45° , ρ 가 1.0001인 경우, 무차원화된 유효 응력을 m 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다. Fig.5는 m 이 0.5, a 가 1, b 가 0.5, ρ 가

1.0001인 경우, 무차원화된 유효 응력을 γ 의 값에 따라서 μ 에 대해 나타내고 있다.

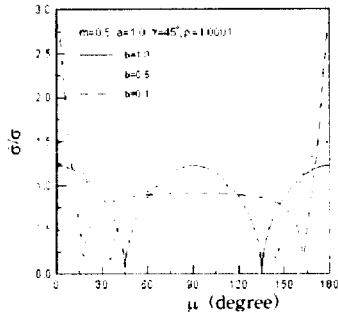


Fig. 3. $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various b values.

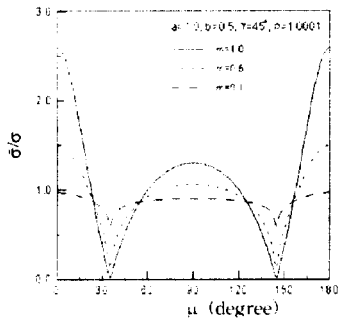


Fig. 4. $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various m values.

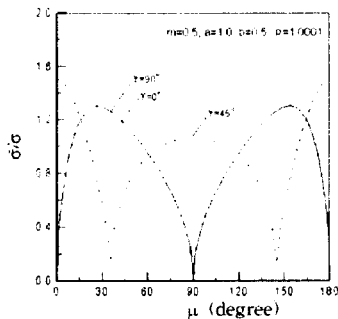


Fig. 5. $\bar{\sigma}/\sigma$ vs. μ for various γ values.

5. 결론

무한 경계에서 임의 방향의 응력이 작용하는 타원 강체 함유물을 포함하는 무한 power law 크릴 재료의 응력 해석을 복소 유사 응력 함수를 이용하여 수행하였으며 그 결과는 다음과 같다.

(1) 본 연구의 타당성을 검증하기 위해 타원 형상 변수를 조정하여 기존의 결과식들과 비교하였을 때 동일하다.

(2) 타원이 납작해질수록 타원 좌표계의 동심 각도 μ

가 0° 와 180° 이면서 타원 표면에 인접한 부분에서의 응력의 절대값은 급격하게 증가하나 μ 가 90° 이면서 타원 표면에 인접한 부분에서의 응력의 절대값은 서서히 감소한다.

(3) 변형률 rate 경화 지수가 증가할수록 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포중 응력의 최대값과 최소값은 각각 증가하고 감소하여 응력의 최대 최소 편차도 증가한다.

(4) 작용 각도의 변화에 따라 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포중 응력의 최대값과 최소값이 발생하는 지점이 변화하고 타원 표면에 인접한 부분에서 μ 에 따른 응력분포의 대칭양상이 변화한다.

참고문헌

1. Rozenblium, V.I., "Approximate Equations of Creep of Thin Shells," *J. Appl. Math. Mech.*, Vol.17, pp.217-225, 1963.
2. Spence, J., "Creep Analysis of Smooth Curved Pipes under In-Plane Bending," *J. Mech. Eng. Sci.*, Vol.15, pp.252-265, 1973.
3. Mukherjee, S., "Time-Dependent Inelastic Deformation of Metals by Boundary Element Methods," *Developments in Boundary Element Methods-II*, Banerjee, P.K. and Shaw, R.P.(eds.), Applied Science Publishers, Barking, Essex, UK, pp.111-142, 1982.
4. Lee, Y.S. and Gong, H., "Application of Complex Variables and Pseudo-Stress Function to Power Law Materials and Stress Analysis of Single Rigid Inclusion in Power-Law Materials Subjected to Simple Tension and Pure Shear," *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol.29, pp.669-694, 1987.
5. Lee, Y.S. and Smith, L.C., "Analysis of a Power-Law Material Containing a Single Hole Subjected to a Uniaxial Tensile Stress Using the Complex Pseudo-Stress Function," *Trans. of ASME, J. of Appl. Mech.*, Vol.55, pp.267-274, 1988.
6. Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff International Publishing, 1954.
7. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, fifth edition, John Wiley & Sons, Inc., 1963.