

대변형 초탄성 재료의 해석을 위한 무요소 적응기법

A Meshless Adaptive Procedure for Largely Deformed Hyperelastic Materials

전석기 (연세대 자동차기술연구소), 정동원 (제주대 기계공학과)
 Sukky Jun (Yonsei Institute of Automobile Technology), Dong Won Jung (Cheju National University)

ABSTRACT

The meshless adaptive method based on multiple scale analysis is developed to simulate large deformation problems. In the procedure, new particles are simply added to the original particle distribution because meshless methods do not require mesh structures in the formulations. The high scale component of the approximated solution detects the localized region where a refinement is needed. The high scale component of the second invariant of Green-Lagrangian strain tensor is suggested as the new high gradient detector for adaptive procedures. The feasibility of the proposed theory is demonstrated by a numerical experiment for the large deformation of hyperelastic materials.

Key Words : multiple scale Reproducing Kernel Particle Method (다중 스케일 RKPM), meshless adaptive method (무요소 적응 기법), large deformation (대변형), hyperelastic materials (초탄성 재료),

1. 서론

유한요소법으로 풀기 어려운 고체 및 구조역학의 일부 비선형 문제들을 해석하기 위하여 1993년부터 활발하게 개발되어온 무요소 해석법 (Meshless Methods)은, 필수 경계 조건의 처리가 간단하지않고 계산 시간이 상대적으로 오래 걸린다는 단점에도 불구하고, 요소를 필요로 하지않는 고유한 특성이 장점으로 작용할 수 있는 문제들을 효율적으로 해석함으로써 현재 널리 주목을 받게 된 새로운 전산 역학적 방법이다. 이러한 무요소 해석법의 예로는 Belytschko et al.의 Element Free Galerkin (EFG) Method, Babuska and Melenk의 Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM), Duarte and Oden의 hp-Cloud Method, Onate et al.의 Finite Point Method (FPM) 그리고 Liu et al.의 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) 등을 들 수 있다.⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾ 무요소 해석법의 가장 대표적인 장점 중 하나는 적응 기법 (adaptivity) 또는 세분 기법 (refinement)의 간편화이다. 일반적으로 유한요소법에 의한 적응 기법은 그 과정이 복잡하고 자동화가 까다로운 반면, 무요소 해석법은 요소의 도입 없이 절점 (particle)들만으로 문제 영역을 이산화하므로, 정밀한 해석이 필요한 국소 영역에 단지 절점들만을 추가함으로써 매우 간단하게 적응 기법을 수행할 수 있다. 특히, 3차원적 문제를 해석할 경우 유한요소법에 의한 적응 과정은 그 복잡함과 번거로움이 잘 알려져 있으므로 무요소 적응 기법의 상대적 간편함은 쉽게 이해될 수 있다. 이런 장점 때문에 현재 여러 각도로 무요소 해석법을 이용한 오차 산정법 및 적응 기법이 연구되고있다.

Liu et al.은 무요소 해석법 중에서 RKPM을 이용하여 새로운 적응 기법을 개발, 이미 압축성 유체 문제와 구조 음향의 문제들에 적용하여 그 효율성을 입증한바 있다.⁽⁷⁾⁻⁽⁸⁾ 이 방법에 의하면 RKPM의 형상 함수나 어떤 물리량의 값이 다중 분해 (multi-resolution decomposition)에 의하여 여러 개의 스케일 별로 분해될 수 있는데 그 중 상단 성분 (high scale component)이 밴드 패스 필터와 유사한 역할을 한다. 즉, 최고 단계 성분은 고 변화도 (high gradient) 문제의 결과에서 보다 상세한 해석이 요구되는 위치를 정확히 지적해주는 역할을 하므로 이를 적응 기법의 고 변화도 확인자 (high gradient detector)로 활용한다. 본 논문에서는 이와 같은 다중 스케일 RKPM의 적응 기법을 대변형을 일으키는 재료의 문제에 적용하였다. 즉, 대변형 문제에서 효율적이며 또 일반적으로 이용될 수 있는 물리량과 이를 이용한 지시계의 정식화 과정을 제안하고 초탄성 재료의 대변형 문제에 적용하여 이 방법의 타당성을 보였다. 또한 여기에서 제안된 방법은 일반적인 탄소성 대변형 문제에 바로 적용될 수 있다.

2. 다중 스케일 RKPM의 정식화와 적응 기법

유한한 영역 Ω 에서 어떤 함수 $u(x)$ 의 kernel 변환은 아래와 같이 주어진다.

$$u^K(x) = \int_{\Omega} u(\tilde{x}) \Phi(x - \tilde{x}; a) d\tilde{V} \quad (1)$$

여기에서 $\Phi(x - \tilde{x})$ 는 kernel 함수이고 a 는 완화 매

개변수이다. 위의 식을 보정함수(correction function)를 포함하는 재생 kernel 함수를 이용하여 이산화하면 RKPM의 근사식을 아래와 같이 얻는다.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(x)u_j \quad (2)$$

그리고 RKPM 형상 함수는 다음과 같이 정의된다

$$N_j(x) = C(x, x_j)\Phi(x - x_j)\Delta V_j \\ = [C_0(x) + C_1(x) \cdot (x - x_j)]\Phi(x - x_j)\Delta V_j \quad (3)$$

식 (2)에서 NP는 전체 절점들의 수를 의미한다. 식 (3)의 C(x, x_j)는 RKPM 근사가 선형 일관성 조건을 만족시키도록 도입된 보정함수이다.⁽⁶⁾

RKPM의 형상 함수는 Fourier변환에 의해 새롭게 해석될 수 있는데 저역 필터로 간주되는 핵함수족과 아래와 같이 주어지는 wavelet의 한 형태인 고차 수준의 성분들의 합으로 이루어져 있다.

$$\Psi_{m+1}(x) = \Phi_m(x) - \Phi_{m+1}(x) \quad (4)$$

그러므로, 어떤 계의 역학적 결과를 일반적으로 아래와 같은 여러 개의 단계로 나눌 수 있다.

$$u^h(x) = u_m(x) + \sum_{i=1}^m w_i(x) \quad (5)$$

여기에서,

$$u_m(x) = \int_{\Omega} C(x, \tilde{x}; 2^m a)\Phi_m(x - \tilde{x})u(\tilde{x})d\tilde{V} \quad (6)$$

$$w_i(x) = \int_{\Omega} \Psi_i(x, \tilde{x})\Phi_m(x - \tilde{x})u(\tilde{x})d\tilde{V} \quad (7)$$

$$\Psi_i(x, \tilde{x}) = C(x, \tilde{x}; 2^{i-1} a)\Phi_{i-1}(x - \tilde{x}) \\ - C(x, \tilde{x}; 2^i a)\Phi_i(x - \tilde{x}) \quad (8)$$

로 정의된다. 위의 식에서 C는 보정함수이고, a는 RKPM의 완화 계수이다. 위의 식은 또 아래와 같이 이산화될 수 있다.

$$u_m(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(x, x_j; 2^m a)u_j \quad (9)$$

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^{NP} [N_j(x, x_j; 2^{i-1} a)u_j - N_j(x, x_j; 2^i a)u_j] \quad (10)$$

여기서, N_j는 RKPM의 형상 함수이다.

다음 장에서 다룰 예제를 위하여, u^h(x)를 가장 간단한 경우인 2단계로 분해하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u^h(x) = u_1(x) + w_1(x) \quad (11)$$

여기에서, u^h(x)의 하단 성분은

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^{low}(x)u_j = \sum_{j=1}^{NP} N_j^{13}(x; 2a)u_j \quad (12)$$

이고, u^h(x)의 상단 성분은

$$w_1(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j^{high}(x)u_j = \sum_{j=1}^{NP} [N_j(x; a) - N_j(x; 2a)]u_j \quad (13)$$

이다.

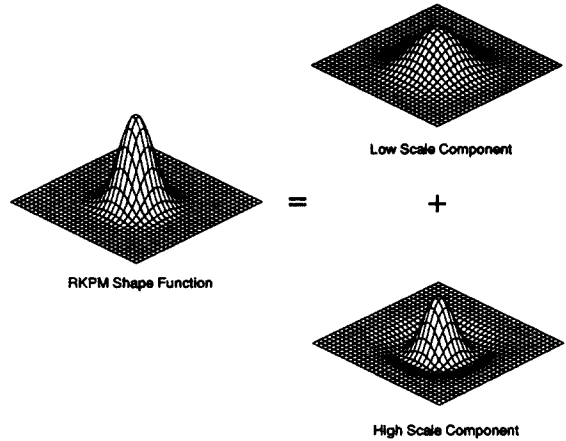


Fig. 1. RKPM 형상 함수의 2 단계 분해

이와 같은 2단계 분해에 의해서 형상 함수는 Fig. 1과 같이 하단 성분과 상단 성분으로 나누어지게 되고 각각의 성분은 해의 하단 성분과 상단 성분에 중요한 역할을 하게 된다. 하단 성분과 상단 성분은 각각 신호처리에서 low-pass 필터와 band-pass 필터와 같은 역할을 한다. Fig.2는 상단 성분의 Fourier 변환을 보여준다. 즉, u^h(x)의 하단 성분은 계산 결과의 구조적 모드를 내포하고 있는 반면에 상단 성분은 해의 고차 변화 영역을 찾아낸다.

본 논문에서는 일반적인 대변형 문제의 적용 기법을 실행하기 위한 고 변화도 확인자(high gradient detector)로서 Green-Lagrangian 변형률 텐서의 제2 불변량(the second invariant) E_{II}의 상단 성분을 선택하고 그 정식화를 다음과 같이 제안한다.

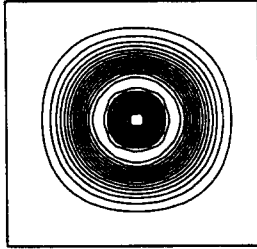
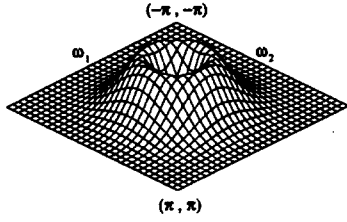


Fig. 2 RKPM 형상 함수의 상단 성분 Fourier 변환

먼저, 변위 함수의 2단계 분해를 아래와 같이 표현하자.

$$u_i = v_i + w_i, \quad i = x, y, z \quad (14)$$

여기에서 v_i 는 하단 성분이고 w_i 는 상단 성분이다. 위의 분해된 변위 벡터로부터 (2차원 문제의 경우) 변형 변화도 텐서를 표현하면 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + \frac{\partial w_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} + \frac{\partial w_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_1} + \frac{\partial w_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial v_2}{\partial X_2} + \frac{\partial w_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기에서, X_i 는 초기 형상계(initial configuration)의 위치 벡터 성분을 의미한다. 이로부터 Cauchy-Green 변형 텐서의 불변량들의 상단 성분은 각각 아래와 같이 주어진다.

$$I_1^{high} = \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right)^2 - 1 \quad (16)$$

$$I_2^{high} = \left[\left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial X_1}\right) \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right) - \frac{\partial w_1}{\partial X_2} \frac{\partial w_2}{\partial X_1} \right] \quad (17)$$

$$I_3^{high} = \left(1 + \frac{\partial w_1}{\partial X_1}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial w_2}{\partial X_2}\right)^2 - 1 \quad (18)$$

모두 변위 벡터의 상단 성분들로 구성되어 있다.

따라서 대변형 문제의 적응적 지시계로 제안할 E_{II} 의 상단 성분은 아래와 같이 구할 수 있다.

$$E_{II}^{high} = \frac{1}{4} \left(I_2^{high} - 2I_1^{high} + 3 \right) \quad (19)$$

그러므로 이 상단 성분을 이용하여 다음 장의 대변형 문제에 적용 기법을 적용한다.

3. 예제

초탄성 재료를 표현하기 위하여 Fried 와 Johnson⁽⁹⁾의 수정된 Mooney-Rivlin 모델을 채택하였다. 이 모델에 의하면 초탄성 재료의 변형률 에너지 밀도 함수 W 는 아래와 같이 주어진다.

$$W = C_1(I_1 - 3I_3^{1/3}) + C_2(I_2 - 3I_3^{2/3}) + \frac{1}{2} \lambda (\ln I_3)^2 \quad (20)$$

여기에서 물질상수들은 각각 $C_1=18.35$ (psi), $C_2=1.468$ (psi), $\lambda=1.468 \times 10^3$ (psi)로 주었다. 그리고 I_1, I_2, I_3 는 좌, 우 Cauchy-Green 변형 텐서인 G 와 C 의 스칼라 불변량들이다. 이 W 함수로부터 다음과 같은 Cauchy 응력을 구할 수 있다.

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[(C_1 + I_1 C_2) G - C_2 G^2 - (C_1 I_3^{1/3} + 2C_2 I_3^{2/3} - \lambda \ln I_3) I \right] \quad (21)$$

본 장의 예제에서 재료의 밀도는 $\rho=1.4089 \times 10^{-4}$ (slug)로 주었고 시간 적분법으로는 중앙 차분법을 이용하였다. 예제로서 평면 변형률 압축 문제를 선택하였다. 먼저 2601개의 절점을 이용한 변형의 결과와 유효 응력의 분포도를 Fig. 3에 보였다.

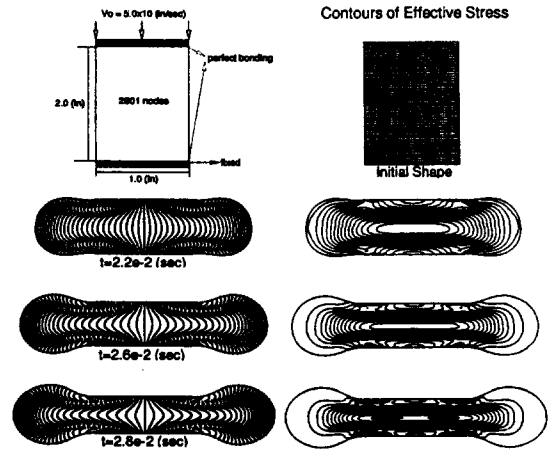


Fig. 3 압축 문제의 변형 결과와 응력 분포도.

다음은 적응 기법을 실행하기 위하여 이 문제를 상대적으로 적은 수의 절점 분포로 (961 개) 시뮬레이션하였고 그 변형 결과를 Fig. 4 에 보였다. 이로부터 E_{II} 의 상단 성분을 계산하면 Fig. 4 의 좌측 하단과 같은 결과를 얻을 수 있다. 따라서 이 결과에 근거하여 상단 성분의 최고 값의 30% 이상인 위치에 절점들을 새로 추가하였으며 그 결과를 Fig. 4 의 우측 하단에 보였다.

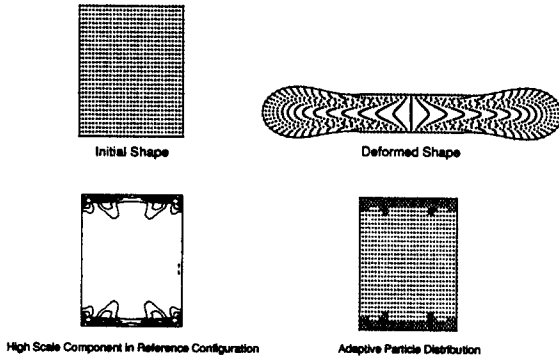


Fig. 4 E_{II} 의 상단 성분에 근거한 적응 기법

새로운 절점 분포를 이용하여 처음부터 해석을 다시 시작하였으며 그 결과를 Fig. 5 에서 비교하였다. 소수의 절점들 E_{II} 의 상단 성분값이 큰 곳에 추가함으로써 훨씬 세분한 절점 분포의 결과와 유사한 변형 상태를 얻을 수 있게 되었다.

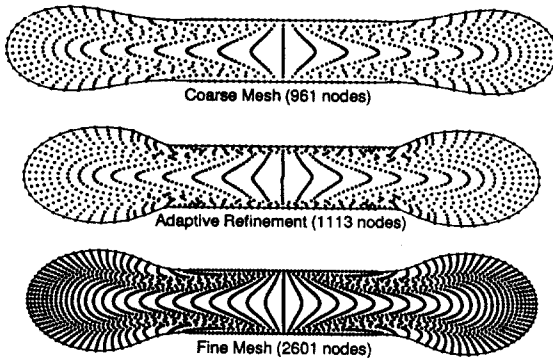


Fig. 5 적응 기법의 결과 비교

4. 결론

주요소 해석법을 이용한 다중 스케일 적응 기법을 대변형 문제에 적용하였다. 형상 함수를 여러 단계로 분해하고 이에 근거하여 Green-Lagrangian 변형을 텐서의 제 2 불변량의 상단 성분을 적응 과정의

기준 지시계로 제안하였다. 본 논문에서 제시된 방법은 일반적인 대변형 문제에 모두 적용될 수 있으며 특히 기하학적 비선형성을 내포하는 탄소성 대변형 문제에 쉽게 응용될 수 있다.

참고문헌

1. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element Free Galerkin Methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
2. I. Babuska and J. M. Melenk, "The Partition of Unity Finite Element Method, Univ. of Maryland, Technical Note BN-1185, 1995.
3. C. A. Duarte and J. T. Oden, "hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary Value Problems", TICAM Report, 95-05, 1995.
4. E. Onate, S. Idelson, T. Fischer and O. C. Zienkiewicz, "A Finite Point Method for Analysis of Fluid Problems", presented in 9th Int. Conference on Finite Elements in Fluids, Venezia, Italy, October 15-21, 1995.
5. W. K. Liu, J. Adee and S. Jun, "Reproducing Kernel Particle Methods for Elastic and Plastic Problems", Advanced Computational Methods for Material Modeling, eds. Benson, D. J. and Asaro, R. A., AMD 180 and PVP 268, ASME, pp. 175-190, 1993.
6. W. K. Liu, S. Jun and Y. Zhang, "Reproducing Kernel Particle Methods", International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.
7. W. K. Liu, S. Jun, D. T. Sihling, Y. Chen and W. Hao, "Multiresolution Reproducing Kernel Particle Method for Computational Fluid Dynamics", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, pp. 1391-1415, 1997.
8. W. K. Liu, Y. Chen, S. Jun, J. S. Chen, T. Belytschko, C. Pan, R. A. Uras and C. T. Chang, "Overview and Application of the Reproducing Kernel Particle Methods", Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 3-80, 1996.
9. I. Fried and A. R. Johnson, "A Note on Elastic Energy Density Function for Largely Deformed Compressible Rubber Solid", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, pp. 53-64, 1988.