

# 무요소 해석법에 의한 초탄성 재료의 변형에 관한 연구 On The Deformation Analysis of Hyperelastic Materials Using A Meshless Method

전석기 (연세대 자동차기술연구소), 정동원 (제주대 기계공학과)  
Sukky Jun (Yonsei Institute of Automobile Technology), Dong Won Jung (Cheju National University)

## ABSTRACT

A meshless method which is the new computational method being developed recently, is applied to the simulation of large deformation problems. Among the many types of meshless methods, the Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) is used and the nearly incompressible hyperelastic materials are employed in simulations. The meshless methods can avoid mesh distortions and mesh entanglements that may frequently happen when the mesh-based methods like finite element method are used for the simulations of largely deformed materials. A general features of meshless methods are reviewed and the formulation of RKPM is presented. Next, the performance of explicit RKPM is demonstrated by examples.

**Key Words :** meshless methods (무요소 해석법), large deformation (대변형), hyperelastic materials (초탄성 재료), Reproducing Kernel Particle Method (RKPM), particle methods (절점법)

### 1. 무요소 해석법의 개요

유한요소법은 지난 30 여년간 수많은 학자들에 의하여 개발되어왔으며 컴퓨터의 빠른 발전 속도에 힘입어 현재는 고체 및 구조역학 분야에서 가장 널리 이용되고있는 계산 역학적 방법이 되었다. 그러나 일부 문제들에 대하여는 아직도 유한요소법을 이용한 해석이 어려움을 겪고있는 것 또한 사실이며 그 어려움은 요소라는 개념 자체로부터 기인하는 경우가 많이 있다. 예를 들면, 고체내 균열의 전파를 시간에 대하여 동적으로 해석할 경우, 균열의 전파 방향이 요소망의 구조와 일치하지 않음으로써 요소망을 가로질러 전파하는 균열은 해석이 어려워진다. 또한, 어떤 구조물이 심하게 변형을 일으킬 때, 그 부근 요소들의 비틀림에 의하여 해석이 불가능해지는 경우가 자주 발생된다. 이러한 해석상의 난제들을 해결하는 방법으로써, 유한요소법은 일정한 시간 스텝마다 요소망 재구성 기법을 도입함으로써 해석을 지속시켜나간다. 그러나 이러한 요소망의 재구성 기법이 항상 투영오차를 유발시킴으로써 유한요소 해석값의 정확도를 떨어뜨림은 이미 잘 알려진 사실이다.

1992년부터, 기존의 유한요소법을 연구하던 일부 학자들은 요소망을 필요로 하지 않는 새로운 계산역학적 방법을 잇달아 개발함으로써 앞의 예와 같은 문제들을 매우 정확하게 해석하기 시작하였다. Belytschko et al.의 Element Free Galerkin Method (EFG)<sup>(1)</sup>, Babuska and Melenk의 Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)<sup>(2)</sup>, Duarte and Oden의 hp-Cloud Method<sup>(3)</sup>, Onate et al.의 Finite Point Method

(FPM)<sup>(4)</sup> 그리고 Liu et al.의 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)<sup>(5,6)</sup> 등이 이러한 새로운 계산역학적 방법의 대표적인 예들이다. 이 방법들은, 앞에서 지적하였듯이, 요소망을 필요로 하지않고 단지 일정한 숫자의 절점 (particle)들만을 이용하여 문제영역을 이산화하는 공통점을 갖기 때문에 1996년에 들어서 이 각각의 방법들을 무요소 해석법 (Meshless Method) 이라고 통칭하기 시작하였다.

이 무요소 해석법들은, 요소를 도입하지 않는 공통점을 갖는 반면 각각의 방법들마다 고유한 방법으로 근사해를 정식화하는 차이점도 갖는다. EFG의 경우 각 절점에서의 해석 값들을 최소사승법을 이용하여 근사해를 구하고, RKPM은 kernel 근사를 절점들에 대하여 이산화함으로써 정식화를 시작한다. 반면, PUFEM은 유한요소법이 갖는 Partition of Unity 특성을 일반화하여, 요소에 제한을 받지 않는 일반적 Partition of Unity를 도입함으로써 형상함수를 얻는다. 또한, hp-Cloud Method는 이러한 Partition of Unity를 일반적인 함수들로 보강(Enrichment)함으로써 매우 간단한 적용 기법의 개발에 중점을 두었다. 앞의 두 방법은 처음부터 절점을 이용한 근사화에 비중을 둔 반면, 뒤의 두 방법은 유한요소법으로부터 요소망의 해체라는 접근에 초점을 맞추었다고 볼 수 있다.

이미 여러 종류의 문제들에 이러한 무요소 해석법들이 응용되었는데, 대표적인 예로써, Krysl and Belytschko<sup>(7)</sup>는 EFG를 이용하여 동전모양 균열의 동적 전파를 3차원적으로 해석하였으며 Liu et al.<sup>(8,9)</sup>은 압축성 유체 문제나 구조 음향의 문제들과 같이 고변화도(high gradient)를 갖는 문제들을 다중 스케일

RKPM 을 이용하여 효율적으로 해석하였다.

본 논문에서는 RKPM 을 이용하였으며 대변형을 일으키는 초탄성 재료를 외연적 시간 적분법을 적용하여 해석함으로써 무요소 해석법의 효율성을 보였다.

## 2. RKPM 의 정식화

RKPM 은 Lucy<sup>(10)</sup>와 Monaghan<sup>(11)</sup>에 의하여 제시된 Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)의 kernel 근사로부터 정식화가 시작된다. 유한한 영역  $\Omega$  에서 어떤 함수  $u(x)$ 의 kernel 변환은 아래와 같이 주어지는데

$$u^k(x) = \int_{\Omega} u(\tilde{x})\Phi(x-\tilde{x};a)d\tilde{V} \quad (1)$$

여기에서  $\Phi(x-\tilde{x})$ 는 kernel 함수이고  $a$ 는 완화 매개변수라 불리운다. 이 kernel 함수는, 완화 매개변수  $a$ 가 영에 접근할수록 delta 함수의 성질에 가까워지며, 이 함수를 전체 영역 대하여 적분을 취하면 1이 되는 성질을 갖는다. 그러나 이 SPH kernel 함수를 직접 이산화 할 경우에는 경계 부근에서 kernel 함수가 잘리게 되므로 위의 두번째 성질을 잃게 된다. 따라서 RKPM 은 이 SPH kernel 함수에 새로운 보정 함수를 도입하고 선형 일관성(consistency) 조건을 부여함으로써, 필요한 조건을 모두 만족시키는 새로운 재생 kernel 함수를 제안하였으며 이 재생 kernel 함수를 이용하여 근사해를 구한다. 어떠한 계산 역학적 방법이 수렴성을 갖기 위하여는 그 방법이 안정적(stable)이어야 하고 또한, 일관성 조건을 만족시켜야 한다. 이 중에서 일관성 조건은 그 방법이 취하는 근사의 형태에 의하여 결정된다<sup>(12)</sup>. 이러한 일관성 조건의 만족 여부는 또한 그 함수가 partition of unity 인가를 결정지으며, 이 조건을 만족하는 모든 방법들은 partition of unity 법이라는 하나의 커다란 범주 안에 놓이게 된다.

RKPM 에 의하여 도입되는 재생 kernel 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$K(x,\tilde{x}) = C(x,\tilde{x})\Phi(x-\tilde{x}) \\ = [C_0(x) + C_1(x) \cdot (x-\tilde{x})]\Phi(x-\tilde{x}) \quad (2)$$

여기에서 완화 매개변수  $a$ 는 표기를 생략하였고 함수  $\Phi(x-\tilde{x})$ 는 SPH kernel 함수와 동일하다. 위 식에서 보정함수  $C(x,\tilde{x})$ 는  $x-\tilde{x}$ 에 대하여 선형성을 갖는다고 가정하였다.  $u(x)=1$  그리고  $u(x)=x$  일 때의 근사값이 참값과 일치하도록 일관성 조건을 부여하면 보정함수  $C(x,\tilde{x})$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_0(x) \\ C_1(x) \end{bmatrix} = M^{-1}(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기에서  $M(x)$ 는 아래와 같이 정의되는 모멘트 행렬이고

$$M(x) = \begin{bmatrix} m_0(x) & m_1^T(x) \\ m_1(x) & m_2(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

각각의 항은

$$m_0(x) = \int_{\Omega} \Phi(x-\tilde{x})d\tilde{V} \quad (5)$$

$$m_1(x) = \int_{\Omega} (x-\tilde{x})\Phi(x-\tilde{x})d\tilde{V} \quad (6)$$

$$m_2(x) = \int_{\Omega} (x-\tilde{x})(x-\tilde{x})\Phi(x-\tilde{x})d\tilde{V} \quad (7)$$

이다. 그러므로 이산화된 재생 kernel 함수를 이용한 RKPM 근사는

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{NP} N_j(x)u_j \quad (8)$$

이고 RKPM 형상 함수는 다음과 같이 정의된다

$$N_j(x) = C(x,x_j)\Phi(x-x_j)\Delta V_j \\ = [C_0(x) + C_1(x) \cdot (x-x_j)]\Phi(x-x_j)\Delta V_j \quad (9)$$

식 (8)에서  $NP$ 는 전체 절점들의 갯수를 의미한다.

위의 근사법이 결정되면 이 후 지배 방정식으로부터 다음의 행렬 방정식을 구하는 과정은 유한요소법과 유사하다.

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} + f^{int} = f^{ext} \quad (10)$$

외연적 시간 적분을 위해 집중 질량 행렬을 사용하면

$$M_I = \int_{\Omega} \rho N_I I dV \quad (11)$$

로 주어지는데 위에서  $I$ 는 단위 행렬이다. 또한 내력 벡터와 외력 벡터는 아래와 같다.

$$f_I^{int} = \int_{\Omega} \sigma(\nabla N_I) dV \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_h} t_i^{ext} = \int_{\Gamma_h} N_i t dS + \int_{\Omega} N_i b dV \quad (13)$$

위의 식에서  $t(x, t)$ 는 트랙션 벡터이다.  $\rho$ ,  $b$ ,  $\sigma$ 는 각각 밀도, 물체력 그리고 Cauchy 응력이다.

위의 행렬 방정식을 프로그래밍할 때 가장 중요한 점은 아래 첨자  $I$ 가 필수 경계를 제외한 전체 절점을 의미한다는 것이다. 즉, 매 시간마다 전체 절점에 대한 루프만 필요하고 요소 connectivity와 같이 요소망에 의한 과정은 필요하지 않은 것이 RKPM 과 같은 무요소 해석법의 특징이다.

### 3. 예제

초탄성 재료의 대변형 해석을 위한 RKPM의 효율성을 보이기 위하여 본 장에서는 두 가지의 예제를 다루었다. 먼저, 초탄성 재료를 표현하기 위하여 Fried 와 Johnson<sup>(13)</sup>의 수정된 Mooney-Rivlin 모델을 채택하였다. 이 모델에 의하면 초탄성 재료의 변형을 에너지 밀도함수  $W$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$W = C_1(I_1 - 3I_3^{1/3}) + C_2(I_2 - 3I_3^{2/3}) + \frac{1}{2}\lambda(\ln I_3)^2 \quad (14)$$

여기에서 물질상수들은 각각  $C_1=18.35$  (psi),  $C_2=1.468$  (psi),  $\lambda=1.468 \times 10^3$  (psi)로 주었다. 그리고  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ 는 좌, 우 Cauchy-Green 변형텐서인  $G$ 와  $C$ 의 스칼라 불변량(invariant)들이다. 이  $W$ 함수로부터 다음과 같은 Cauchy 응력을 구할 수 있다.

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{I_3}} [(C_1 + I_1 C_2)G - C_2 G^2 - (C_1 I_3^{1/3} + 2C_2 I_3^{2/3} - \lambda \ln I_3)I] \quad (15)$$

본 장의 예제들에서 재료의 밀도는  $\rho=1.4089 \times 10^{-4}$  (slug)로 주었고 시간 적분법으로는 중앙 차분법을 이용하였다.

첫번째 예제는 평면 변형률 압축 (plane strain compression) 문제로서 전체 절점수는 2601개이며 시간 간격은  $\Delta t=2.5 \times 10^{-7}$  (sec)이다. 윗면의 절점들은  $5.0 \times 10$  (sec)의 속도로 일정하게 내려오게 하였고 수평 방향으로 움직이지 않게 구속하였다. 재료의 크기는  $[1.0 \times 2.0]$ (in)이다. 또한, 아래면은 수평 방향으로의 미끄러움을 허락하였으며 좌, 우면은 아무런 구속 조건을 주지 않았다. 몇 가지 시간에서의 변형 상태와 유효응력의 분포 형태를 Fig. (1)-(2)에 보였다. 윗면의 모서리 부분에서 응력의 고 변화도(high gradient)가 생김을 볼 수 있다.

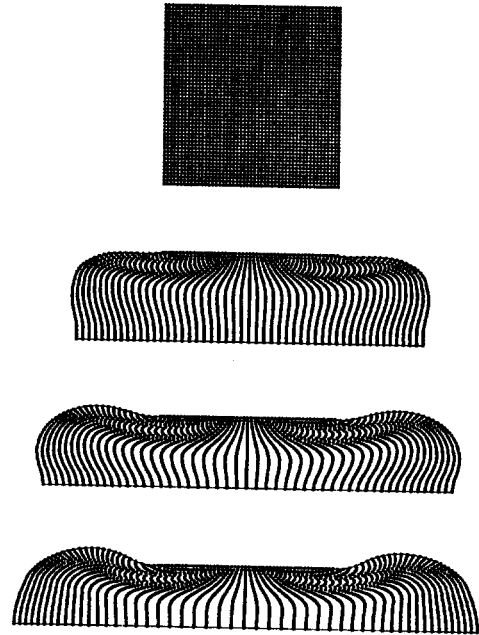


Fig. (1) 평면 변형률 압축 문제의 변형 결과

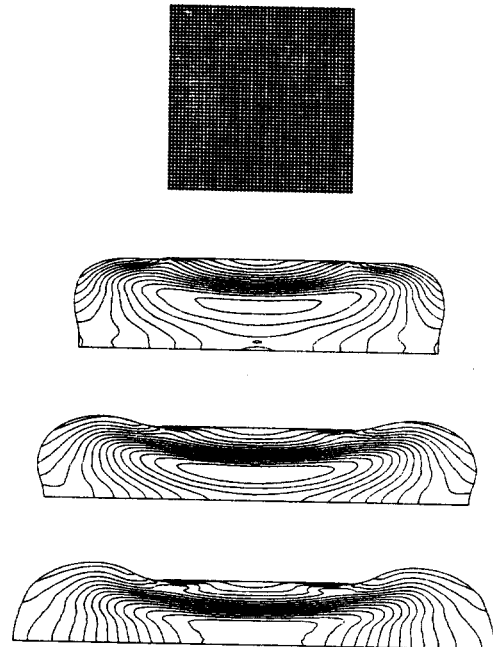


Fig. (2) 평면 변형률 압축 문제의 유효응력 분포

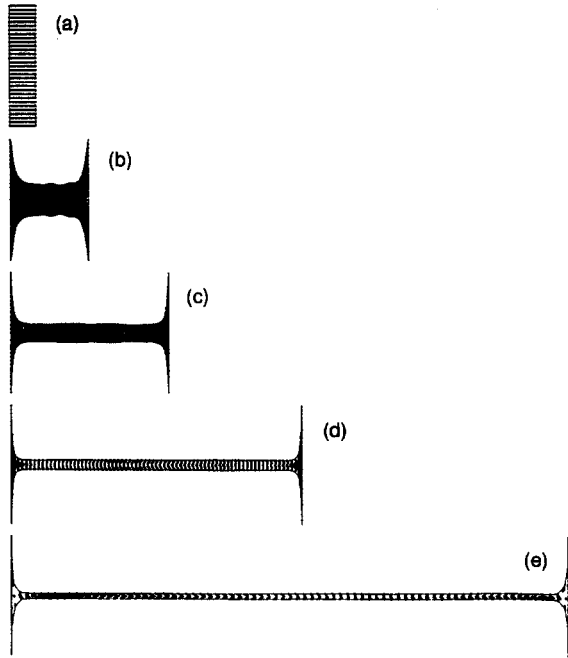


Fig. (3) 평면 변형을 인장 문제의 변형 결과

두번째 예제는 평면 변형을 인장 (plane strain tension) 문제로서 재료의 크기는  $[0.1 \times 0.2](in)$  이고 결점의 수는 2511 개이며  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-8}(sec)$ 이다. 이 경우에는 좌측면을 고정시키고 우측면을  $5.0 \times 10^2 (in/sec)$ 로 잡아당기는 경우이다. 위와 아래 면은 구속하지 않았다. 몇 가지 시간에서의 변형의 결과를 fig.(3)에 보였다. 그림에서 수평 방향 축과 수직 방향의 축의 크기는 서로 무관하다.

#### 4. 결론

무요소 해석법의 한 형태인 RKPM 을 이용하여 초탄성 재료의 대변형 해석을 시도하였다. 요소를 도입하지않는 무요소 해석법의 고유한 특성 때문에 심하게 변형을 일으키는 대변형 문제들을 해석할 때 매우 효율적으로 사용될 수 있음을 보였다. 그러나 계산 시간이 상대적으로 오래 걸리는 단점 등은 앞으로 개선되어야 할 사항으로 지적될 수 있다.

#### 참고문헌

1. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element Free Galerkin Methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
2. I. Babuska and J. M. Melenk, "The Partition of Unity Finite Element Method, Univ. of Maryland, Technical Note BN-1185, 1995.

3. C. A. Duarte and J. T. Oden, "hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary Value Problems", TICAM Report, 95-05, 1995.
4. E. Onate, S. Idelson, T. Fischer and O. C. Zienkiewicz, "A Finite Point Method for Analysis of Fluid Problems", presented in 9th Int. Conference on Finite Elements in Fluids, Venezia, Italy, October 15-21, 1995.
5. W. K. Liu, J. Adee and S. Jun, "Reproducing Kernel Particle Methods for Elastic and Plastic Problems", Advanced Computational Methods for Material Modeling, eds. Benson, D. J. and Asaro, R. A., AMD 180 and PVP 268, ASME, pp. 175-190, 1993.
6. W. K. Liu, S. Jun and Y. Zhang, "Reproducing Kernel Particle Methods", International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.
7. P. Krysl and T. Belytschko, "Application of the Element Free Galerkin Method to the Propagation of Arbitrary 3D Cracks", submitted to International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997.
8. W. K. Liu, S. Jun, D. T. Sihling, Y. Chen and W. Hao, "Multiresolution Reproducing Kernel Particle Method for Computational Fluid Dynamics", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 25, pp. 1391-1415, 1997.
9. W. K. Liu, Y. Chen, S. Jun, J. S. Chen, T. Belytschko, C. Pan, R. A. Uras and C. T. Chang, "Overview and Application of the Reproducing Kernel Particle Methods", Archives of Computational Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 3-80, 1996
10. L. Lucy, "A Numerical Approach to Testing The Fission Hypothesis", A. J., Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.
11. J. J. Monaghan, "An Introduction to SPH", Comp. Phys. Comm., Vol. 48, pp. 89-96, 1988.
12. T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl, "Meshless Methods : An Overview and Recent Developments", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 3-47, 1996.
13. I. Fried and A. R. Johnson, "A Note on Elastic Energy Density Function for Largely Deformed Compressible Rubber Solid", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 69, pp. 53-64, 1988.