

복합재료 적층판내의 응력과 해석에 관한 연구

The Analysis of Stress Wave of Composite Materials

이 혁*(전남대.원), 황갑운(전남대), 조규종(전남대)

H. Lee*(Graduate School, Chonnam Nat.Univ.), G.W. Hwang, K.Z. Cho(Chonnam Nat.Univ.)

ABSTRACT

Recently years, there has been considerable interest in analysis of stress under shock wave. Stress wave is important problem for mechanical device and structural design. This paper was studied to develop the finite element program to analysis single materials and composite materials. This paper is studied for the stress wave propagation of single materials and predicted reflection of stress wave in materials. The developed program was able to analysis of stress wave propagation of composite materials and describe reflection of stress wave at contact surface.

Key Words : finite element (유한 요소), composite materials(복합 재료), reflection(반사)

1. 서 론

최근 충격하중을 받는 기계 장치 및 구조물의 응력 분포 양상에 관한 관심이 증가하고 있다. 충격 하중이 고체 표면에 작용하면 응력파가 생성되어 전달되게 된다. 이 응력파가 경계면에 도달하면 반사 및 굴절등을 일으켜 정하중을 받는 구조물의 거동 양상과 다르게 나타난다. 따라서 안전설계를 위해서는 충격 문제의 연구는 매우 중요하다. 따라서 단일 재료의 충격파에 대한 거동뿐만이 아니라 여러 재료를 사용한 접합 재료 및 적층 재료의 충격하중에 대한 연구가 필요하다. 여기서는 복합 재료중에서도 단순 적층 재료의 충격하중에 대한 거동을 연구하였다. 우선 충격하중을 받는 단일 부재와 복합 적층 부재의 거동은 다음과 같은 차이점이 있다.

첫째, 복합적층 부재는 서로 다른 물성치를 가지므로 재료의 적층 경계면에서 단일 부재와는 다른 응력파 전달 양상이 나타난다.

둘째, 재료의 접합면에서 또다른 충격파에 반사와 간섭이 일어나 복합적인 파동의 전파 양상이 일어나며 응력파의 전파 속도가 달라진다.

요즘의 거의 모든 구조물이 다중 재료를 사용하여 만들어지고 있다. 이러한 복합 적층

재료는 응력을 받는 면과 그 반대면에서 굴절과 반사가 일어날뿐만 아니라 접합 경계면에서도 그와 같은 현상이 생겨 단일 재료에 비해 더 복잡한 전파 전달 현상이 일어나므로 이에 대한 유한 요소 해석 및 검증이 반드시 필요한 실정이다.

2. 본 론

1. 이론적 해석

1-1. 2차원 응력파의 전파

2차원 응력파의 전파는 임의의 시간 t_1 에서 t_2 로 평행이동한다. 응력파 선단 법선 방향 여현이 $\cos \theta = l, \sin \theta = m$ 이면 응력 선단은,

$$lx + my = p \tag{1}$$

$$y = -\frac{l}{m}x + \frac{p}{m} \tag{2}$$

형태가 된다. 따라서, 응력파가 p 의 방향으로 진행한다면 임의의 시간 t 일 때 응력파 함수는 $\varphi = f(p - ct) = f(lx + my - ct)$ 가 된다.

이를 t 에 대해 두 번 미분하면 방향에 무관한

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{4}$$

이 되고 이 식은 2차원 응력파의 지배방정식이 된다.[1]

응력파의 전파속도 c 는

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5)$$

1-2. 2차원 응력파 지배방정식의 이론해

Fig. 1과 같은 균질한 평판이 충격 하중을 받게 되면, 응력파는 평판내에서 임의의 방향으로 전파한다. 평판내의 힘의 평형을 고려하면 내력(internal force)과 입자의 질량을 가지고 있는 관성력은 아래식과 같이 구성된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (6)$$

초기조건과 경계조건을 고려하여 정해(exact solution)는 다음과 같이 구할수 있다.

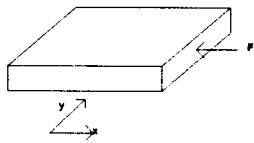


Fig. 1 Diagram of 2-dimensional solution domain

이론해는 $\phi(x,y,t)$ 의 함수 형태가 되고 독립 변수 u, z 를 도입하면

$$v = lx + my + ct, \quad z = lx + my - ct \quad (7)$$

로 쓸 수 있고 도함수로 표시하면 식(8)과 같이 된다.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = l, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = l, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = m, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = m$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -c \quad (8)$$

식 (7), (8)을 식(6)에 대입하여 계산하면

$$\begin{aligned} & (l^2 + m^2) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (9)$$

가 된다.

따라서 해가 존재하기 위해서는 $l^2 + m^2 = 1$,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial z} = 0 \text{인 조건을 동시에 만족시켜야 한다.}$$

응력파 선단의 법선 방향 여현은 $\cos \theta = l$, $\sin \theta = m$ 이 되므로 l, m 은 반경이 1인 원주상의 값을 가지고 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial v \partial z} = 0$ 을 v 와 z 에 대해

두 번 적분하면 2차원 응력파 전파에 대한 지배방정식의 정해를 얻을수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \varphi(z) + \psi(v) \\ &= \varphi(lx + my - ct) + \psi(lx + my + ct) \end{aligned} \quad (10)$$

응력파의 진행 방향은 $l^2 + m^2 = 1$ 의 관계로부터 $l = \cos \theta, m = \sin \theta$ 이므로, 응력파 선단은 c 의 속도로 응력파 선단의 법선 방향으로 평행 이동함을 뜻한다.

초기속도가 $g(x)$ 값을 갖는다면, $\phi(x, y, t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \frac{1}{2} [f(lx + my + ct) \\ &+ f(lx + my - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{lx + my - ct}^{lx + my + ct} g(s) ds \end{aligned} \quad (11)$$

평면에 전파되는 응력파 강도는

$$\iint_{S_1} I_1 \cdot n \, dS_1 = \iint_{S_2} I_2 \cdot n \, dS_2 \quad (12)$$

임의의 시간 t 일 때 응력파의 강도를 I , 면적을 S 라하고 시간이 $t + \Delta t$ 이면 $I_{t+\Delta t}, S_{t+\Delta t}$ 라 하면,

$$I_{t+\Delta t} = I_t \frac{S_t}{S_{t+\Delta t}} \quad (13)$$

로 된다. 따라서, 응력파가 전파된 면적이 시간에 따라 변하므로 응력파의 강도는 전파된 면적에 반비례하게 된다.

2. 유한 요소 수식화

2-1. 2차원 응력파의 유한 요소 수식화

지배방정식은 앞에서 언급한 바와 같이

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ &= k_{tt} \phi \end{aligned} \quad (14)$$

외부에서 준 하중을 고려해주면, 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - f - k_{tt} \phi = 0 \quad (15)$$

Fig.2 와 같은 국소 좌표계 $\xi - \eta$ 를 생각하면, 4개의 절점을 갖는 다음과 같은 형상함수를 만들 수 있다.

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (16)$$

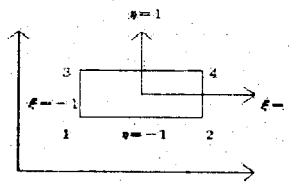


Fig. 2 Finite element discretization 가속도에 의한 관성에 대한 행렬식은

$$k_{iii} = \int_{\Omega^e} k_{ii} N_i N_i dx dy$$

$$= \int \int_{\Omega^e} k_{ii} N_i N_i t \det J d\xi d\eta \quad (17)$$

탄성에 의해 강성으로 표현되는 강성 행렬은

$$k_{ij} = t \det J \int \int_{\Omega^e} (C)^T [E] (C) d\xi d\eta \quad (18)$$

외부 하중에 의한 하중 벡터는

$$R_{ii} = \int \int_{\Omega^e} f N_i t \det J d\xi d\eta$$

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, t) N_i \quad (19)$$

가 된다.

2-2. 시간 미분에 대한 유한 요소 해석

이중 음함수 해법은 시간에 따라 변하는 유한요소 수식을 표현하는데 가장 효과적인 방법으로 임의의 n번째 시간에서 평형 조건을 만족하면

$$[K_n](\phi)_n + [K](\phi)_n + \{R(t)\}_n = \{0\} \quad (20)$$

이 된다. 본 연구에서는 수치해석의 정확도를 결정하는 Δt 에 무관한 수렴성이 좋은 Newmark- β 방법을 이용하여 유한요소 수식을 변위만의 항으로 표현하였다.

임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서 평형 방정식은 다음과 같이 된다.

$$[K_n](\phi)_{t+\Delta t} + [K](\phi)_{t+\Delta t} = (F)_{t+\Delta t} \quad (21)$$

임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서 속도와 변위를 구해서 식(21)에 대입하면

$$[K^*](\phi)_{t+\Delta t} = (F^*)_{t+\Delta t} \quad (22)$$

$$[K^*] = [K] + \frac{4}{\Delta t^2} [M] : \text{유효강성행렬}$$

$$(F^*)_{t+\Delta t} = (F(t+\Delta t)) + [K_n]$$

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2} (\phi)_t + \frac{4}{\Delta t} (\dot{\phi})_t + (\ddot{\phi})_t \right) : \text{유효하중벡터}$$

해를 구하기 위해 다음과 같은 계산과정을 수행하면 된다.

첫째, 물성치 영역 XL, XY(좌표계)을 결정

둘째, $[K_n], [K]$ 를 구한다

셋째, Initial $(\phi)_0, (\dot{\phi})_0, (\ddot{\phi})_0$ 를 정한다

넷째, 시간증분 Δt 와 변수 β, γ 를 정한다

다섯째, $[K^*]$ 를 구한다.

여섯째, 경계조건을 만족하도록 $[K^*]$ 갱신

일곱째, 유효 하중 벡터 $(F^*)_{t+\Delta t}$ 를 구한다.

여덟째, 경계조건을 만족하도록 $(F^*)_{t+\Delta t}$ 를 갱신한다.

아홉째, 임의시간 $t + \Delta t$ 에서 변위 $(\phi)_{t+\Delta t}$ 를 구한다.

열째, 임의의 시간 $t + \Delta t$ 에서 속도와 가속도를 구한다.(Taylor 급수 전개)

3. 유한 요소 해석

3-1. 유한 요소 모델링 및 해석 조건

Case	치수	구성 재료
1	200mm×200mm	A
2	200mm×200mm	A + B

영역	탄성 계수:Kg/cm ²	밀도:Kg/sec ² /cm ³
A	1000	1.0×10 ⁻¹¹
B	4000	1.0×10 ⁻¹¹

Table 1. Material properties of plane

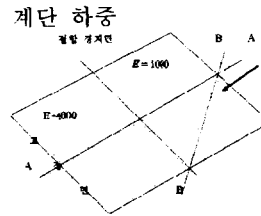


Fig. 3 모델의 물성 영역 표시

Element의 크기:10mm×10mm ($t=10$ mm)

Element숫자:400개, node개수:441개

하중 조건: 1kg의 계단 하중

$$\Delta t = \frac{l}{c} = \frac{1}{2.000E6} = 0.5 \times 10^{-7} \text{ sec}$$

Newmark 상수는 $\beta=1/2, \gamma=1/4$ 를 사용하였다.[4]

3. 결 론

1. 이론 해석 및 유한 요소 해석 결과

매질에 대한 응력파의 종,횡방향 속도를 구해보면 아래와 같다.

$$A \text{ 영역} : c_a = \sqrt{E_a / \rho_a} = 10^7 \text{ cm/sec}$$

$$B \text{ 영역} : c_b = \sqrt{E_b / \rho_b} = 2.0 \times 10^7 \text{ cm/sec}$$

Case 1의 경우 Fig.4에서 볼수 있듯이 하중 선상의 종파와 하중선과 45°각도로 진행되는 전단파를 명확히 볼수 있었다. 그리고 전단파는 종파의 속도보다 느린데 이론 해석에서와 같이 약 1/2의 속도를 보였다. K.Shimomura & K. Date에 수행한 실험 결과[5]를 보면 이러한 전단파의 속도가 잘 일치하는 것을 알수 있었다. 그리고 Fig.6에서 볼수 있듯이 시간이 지남에 따라 응력파가 진행된 면적에 반

비례하여 응력파의 강도가 감소하는 모습을 명확히 볼수 있었다.

Case 2의 경우 Fig.5에서 볼수 있듯이 역시 하중선과 45°각도로 진행되는 전단파를 명확히 볼수 있었다. 그리고 17×10^{-7} sec에서는 예상했듯이 접촉 경계면에서 명확한 응력파의 반사와 투과가 일어나고 있었다. 그리고 반사된 파와 뒤이어 진행되는 파가 경계면 근처에서 간섭을 일으켜 응력파 강도가 Case 1에 비해서 증가하는 모습을 볼수 있었다. Fig.5, 7을 보면 Case 2의 B영역으로 응력파가 투과하면서 거의 2배의 속도로 전파됨을 볼수 있었다. 이는 B영역의 E(탄성계수)값이 A에 비해 상대적으로 높아서 식(13)의 관계에 의하여 전파 속도가 증가한 결과로서 이론 해석치와 거의 일치했다.

Case 2의 접촉 경계면 근처에서의 응력파 집중을 알아보기위해 경계면으로 인한 응력파 증가율을 Table. 2에 나타내었다.

17×10^{-7} sec에 오히려 48% 감소하는 이유는 재질 B에 의해 응력파가 빨리 전파되어버린 뒤이므로 오히려 Normal한 Case 1에 비해 응력파 집중이 적다,

Time	응력파증가율(Case1에 비해)
12×10^{-7} sec	17% 증가
17×10^{-7} sec	48% 감소

Table. 2 Case2의 접촉 경계면에서의 응력파 증가율

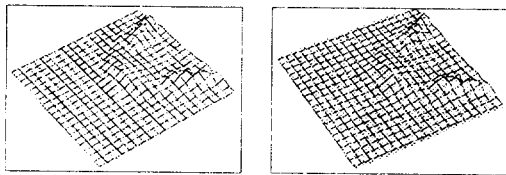
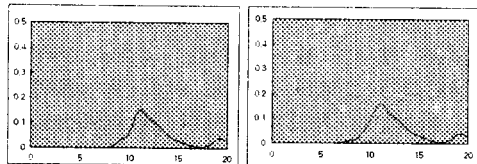
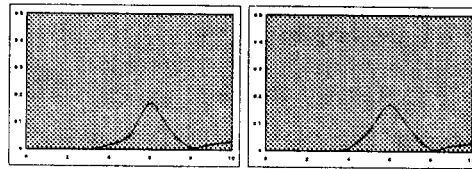


Fig. 4 Case 1의 응력파의 전파 양상 (12×10^{-7} sec) Fig. 5 Case 2의 응력파의 전파 양상 (12×10^{-7} sec)



하중선방향(A-A)



전단파 방향(B-B)

Fig. 6 Case 1의 응력파의 Fig. 7 Case 2의 응력파의

강도 (12×10^{-7} sec)

강도 (12×10^{-7} sec)

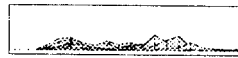
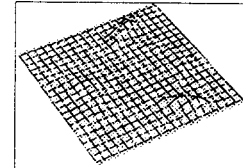
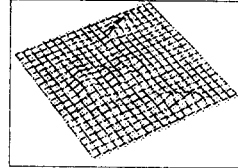
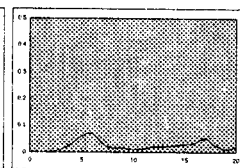
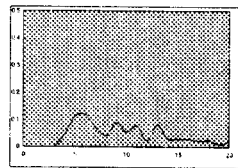
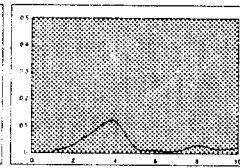
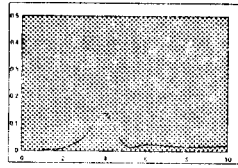


Fig. 8 Case 1의 응력파의 전파 양상 (17×10^{-7} sec)

Fig. 9 Case 2의 응력파의 전파 양상 (17×10^{-7} sec)



하중선방향(A-A)



전단파 방향(B-B)

Fig. 10 Case 1의 응력파의 Fig. 11 Case 2의 응력파의

강도 (17×10^{-7} sec)

강도 (17×10^{-7} sec)

참고 문헌

1. W.Gough and J.P.G "Vibration and Waves." John Wiley&Sons, 1983, pp.66-82
2. N.M. Newmark. "A Method of Computation for Structural Dynamics." J.Eng.Mech.Div.ASCE, Vol.85 1959, pp.67-94
3. R.W.Clough, "Numerical Integration of the Equation of Motion," Univ. of Alabama Press, Huntsville, Ala., 1973
4. 황갑운, "균열이 있는 평면내의 응력파 전파에 관한 유한 요소법적 해석" 전남대학교 대학원 박사학위 논문, 1994
5. Keiichi Shimimura and Kazuhiro Date. "Simulation of Acoustic Emission by Visualization Technique," The Japanese Society for NDI, 1988, pp.133-139