

불충분한 작동기를 가진 기계시스템의 진동적제어: 평균화기법을 통한 제어 설계

Vibrational Control of an Underactuated Mechanical System : Control Design Using the Averaging Method

이강렬* (부산대 대학원), 홍금식 (부산대 기계공학부), 이교일(서울대 기계설계학과)

K. R. Lee, K. S. Hong (Department of Mechanical Engineering, Pusan National University)

K. I. Lee (Department of Mechanical Design and Production Engineering, Seoul National University)

ABSTRACT

An open loop vibrational control of underactuated mechanical systems with amplitude and frequency modulations is investigated. The underactuated systems considered in the paper are assumed to have free joints with no brake. The active joints are positioned first by a linearizing control, and then periodic oscillatory inputs are applied to them to move the remaining free joints to their desired states. A systematic way of obtaining averaged systems for the underactuated systems with oscillatory vibrations is developed. A complete solution to the open loop control strategy in terms of determining amplitudes and frequencies for general system is still under investigation. However, a specific control design for 2R manipulator which is obtained through the averaged system is demonstrated.

Key Words: averaging(평균화), feedback linearization(피드백 선형화), open loop control(개루프제어), underactuated manipulator(불충분한 작동기의 매니플레이터), vibrational control(진동적제어)

1. 서 론

불충분한 작동기를 가진 기계시스템(underactuated mechanical system)이란 시스템이 보유하고 있는 자유도(degrees of freedom)보다 작동기(actuator)의 수가 작은 시스템을 말한다. 그러므로, 자유조인트(free joint)를 가진 매니플레이터는 제어입력의 수가 일반화된 좌표계(generalized coordinates)의 수보다 적기 때문에 불충분한 작동기를 가진 시스템으로 분류된다.

최근에 불충분한 작동기를 가진 기계시스템의 제어는 센서나 작동기의 수를 줄이는 관점에 있어서 뿐만 아니라 위험한 지역에서 작동하고 있는 매니플레이터의 대한 신뢰도를 높이는 관점에서 많은 연구가 이루어지고 있다. 특히 우주공간에서 작동하는 로봇의 경우 작동기에 고장이 발생할 경우에 대비한 제어가 중요하게 다루어지고 있다.

능동조인트(active joint)는 작동기에 의해 완전히 제어되는 조인트로 정의하고, 수동조인트(passive joint)는 작동기는 없지만 브레이크가 있는 조인트로 정의하며, 자유조인트는 작동기뿐만 아니라 브레이크도 없는 조인트로 정의한다. 불충분한 작동기를 가진 시스템이란 수동조인트 또는 자유조인트를 가진 시스템으로 정의한다.

진동적제어(vibrational control)란 평균값이 영(average zero)인 고주파수의 진동입력을 시스템에 가함으로써 시스템의 동특성이 정성적으로 변화하도록 하는 제어기법을 말한다. 역진자의 경우에 지지점(support point)에 수직으로 빠른 진동(vertical oscillation)을 가함으로써 안정화 할 수 있다는 연구결과[2]로부터 시작되어, 유한차원 선형시스템

(linear finite dimensional system)에 대한 연구가 소개되었고, 1980년도에는 비선형시스템에 대한 연구가 이루어 졌다. 이러한 이론은 또한 포물형 편미분방정식(parabolic partial differential equations), 시간지연 미분방정식(functional differential equations)으로까지 확장되었다[1,3,5].

최근에 자유조인트를 가지는 매니플레이터를 제어하기 위해 주기적 진동(periodic oscillations)을 응용한 논문이 발표되었다[6]. 능동조인트는 수동조인트 다이내믹스에 있어서 변하는 시스템 파라미터(varying parameters)로써 간주될 수 있다. 그러므로, 능동조인트의 주기적인 움직임은 수동조인트에 진동적제어(vibrational control)를 제공한다. Suzuki 외 2인은 Poincare map을 기초로한 개루프제어를 소개했다[6]. De Luca 외 2인은 멱영근사법(nilpotent approximation)과 반복제어(iterative control)를 사용하는 개루프제어를 소개했다[4].

본 논문에서는 상미분방정식에서의 평균화기법을 입력의 미분항까지 포함된 시스템으로 확장하였다. 또한, 불충분한 작동기를 가진 시스템에 적용하여 체계적인 평균화된 방정식을 얻는 방법을 제시하였다. 마지막으로 자유조인트를 가지는 2링크 매니플레이터를 평균화된 시스템을 이용하여 주기입력의 진폭과 진동수를 조절하여 원하는 위치로 제어하였다.

2. 미분방정식 및 피드백선형화

조인트 변수가 q^1, \dots, q^n 인 자유도 n 인 개루프 기계 시스템을 고려한다. 각각의 조인트는 자유도가 1이며, 각

그림 1은 평면 2링크 매니퓰레이터를 보여주고 있다[6]. θ_1 을 능동조인트의 각변위, θ_2 를 자유조인트의 능동조인트에 대한 상대 각변위로 두자. 라그랑지 방정식을 이용하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M_{11}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + M_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + C_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \tau$$

$$M_{12}(\theta_2)\ddot{\theta}_1 + M_{22}(\theta_2)\ddot{\theta}_2 + C_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 0$$

여기서 $M_{11}(\theta_2) = m_1s_1^2 + m_2l_1^2 + m_2s_2^2 + 2m_2s_2l_1 \cos \theta_2 + I_1 + I_2$

$$M_{12}(\theta_2) = m_2s_2^2 + m_2s_2l_1 \cos \theta_2 + I_2, \quad M_{22} = m_2s_2^2 + I_2$$

$$C_1(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = -m_2s_2l_1 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$C_2(\theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 2m_2s_2l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2$$

이다. 상기의 시스템을 선형화할때에 가제어성(controllability)이 만족하지 않음을 주목한다.

위 식을 부분 피드백선형화를 하면

$$\ddot{\theta}_1 = u \quad (19a)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -(1+n \cos \theta_2)\dot{\theta}_1 - n(\dot{\theta}_1)^2 \sin \theta_2 \quad (19b)$$

이 얻어진다. 여기서 $n = m_2l_1s_2 / (m_2s_2^2 + I_2)$ 는 상수이다. 능동조인트 θ_1 을 적당한 선형/비선형 제어 알고리즘에 의해 원하는 위치로 옮겼다고 가정한다.

이제, 자유 조인트에 대한 부분만 고려하면 된다. $\dot{\theta}_1$

과 $\dot{\theta}_2^2$ 는 θ_2 다이내믹스에서 파라미터로서 작용하고 있다. $x_1 = \theta_2$, $x_2 = \dot{\theta}_2$ 라고 두면 상태방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(1+n \cos x_1)\dot{\theta}_1 - n \sin x_1 (\dot{\theta}_1)^2$$

$\theta_1 = -\frac{\alpha}{\omega} \cos \omega t$ 의 주기 진동함수를 도입한다. 그러면 다음과 같은 상태방정식으로써 식을 나눌 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -n \sin x_1 (\alpha \sin \omega t)^2 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \cos \omega t (1+n \cos x_1) \end{bmatrix} \quad (20)$$

식 (20)의 두 번째 항으로 부터 생성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \cos t (1+n \cos x_1) \end{bmatrix} \quad (21)$$

이 생성방정식의 일반적인 해는

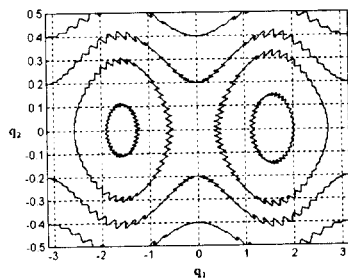


Fig. 3

Fig. 3 Trajectories of Transformed System (21) ($\alpha = 0.5$, $\omega = 4\pi$)

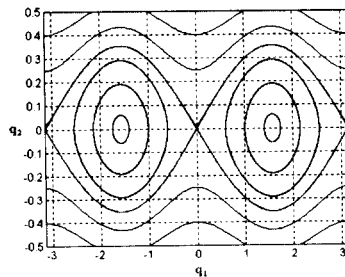


Fig. 4

Fig. 4 Phase Portraits of Averaged System (23) ($\alpha = 0.5$, $\omega = 4\pi$)

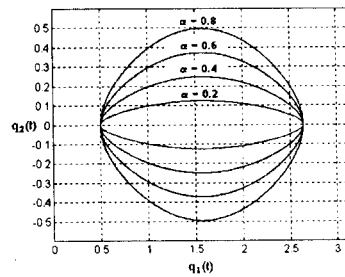


Fig. 5

Fig. 5 Phase Portraits of the Averaged System with Different α 's ($\omega = 4\pi$, I.C.: $\theta_2(0) = 0.5$, $\dot{\theta}_2(0) = 0$)

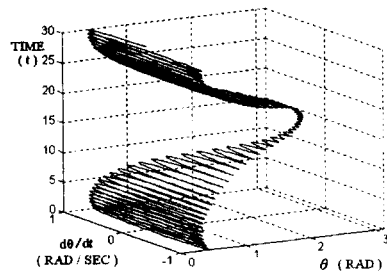


Fig. 2 Trajectories of Original System (19)

($\alpha = 0.5$, I.C.: $(\theta, \dot{\theta}) = (0.5, 0)$)

$$h(t, c) = \begin{bmatrix} h_1(t, c) \\ h_2(t, c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 - \alpha(1+n \cos c_1) \sin t \end{bmatrix}$$

이다. 따라서, 생성방정식의 일반해를 이용한 변환을 통해 다음과 같은 상태방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 - \alpha(1+n \cos q_1) \sin \omega t \\ n \alpha \sin q_1 \sin \omega t (-q_2 + n \alpha \cos q_1 \sin \omega t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$\tau = \omega t$ 인 느린 시간척도에서 $q(t) = z(\tau)$, $\epsilon = 1/\omega$ 처럼 상태변수를 바꾸면 식 (22)는 다음과 같이 변환된다.

$$\dot{z}_1(\tau) = \epsilon [z_2 - \alpha(1+n \cos z_1) \sin \tau] \quad (23)$$

$$\dot{z}_2(\tau) = \epsilon n \alpha \sin z_1 \sin \tau (-z_2 + n \alpha \cos z_1 \sin \tau)$$

마지막으로 식 (23)의 오른쪽 부분을 시간에 대해 평균화하면 다음과 같은 평균화된 시스템을 구할 수 있다.

$$\dot{y}_1 = \epsilon y_2 \quad (24)$$

$$\dot{y}_2 = \epsilon \frac{n^2 \alpha^2}{4} \sin 2y_1$$

4.2 시뮬레이션 및 제어

그림 2는 일정한 주기함수 $\theta_1 = 0.5 \sin(4\pi t)$ 를 능동조인트에 가하였을 때의 자유조인트의 각변위 θ_2 과 각속도 $\dot{\theta}_2$ 를 시간에 대해 시뮬레이션하였다. 그림 3과 그림 4는 각각 변환된 시스템 방정식 (22)와 평균화된 시뮬변 방정식 (24)에서 다양한 초기조건에 대한 궤적을 보여주고 있다. 그림 5는 진동수가 일정한 주기입력에 따른 진폭을 주었을 때의 평균화된 시스템의 궤도를 나타내고 있다.

동기가 부착된 m 개의 능동조인트와 $l = n - m$ 개의 작동기가 없고 브레이크도 없는 자유조인트가 있다고 가정한다. 또한, 능동조인트 및 자유조인트의 변위를 모두 측정 가능하다고 가정한다.

능동조인트에 대해 $q_1 \in R^m$, 자유조인트에 대해 $q_2 \in R^l$ 의 상태로 배열하여 운동방정식을 구하면

$$M_{11}\ddot{q}_1 + M_{12}\ddot{q}_2 + C_1(q, \dot{q}) + G_1(q) = f \quad (1)$$

$$M_{21}\ddot{q}_1 + M_{22}\ddot{q}_2 + C_2(q, \dot{q}) + G_2(q) = 0 \quad (2)$$

이 얻어진다. 여기서 $q = [q_1^T \ q_2^T]^T$ 이고, 벡터 함수 $C_1(q, \dot{q}) \in R^m$ 와 $C_2(q, \dot{q}) \in R^l$ 는 코리올리(Coriolis)와 구심력(centripetal terms)에 대한 항이고, 벡터 함수 $G_1(q) \in R^m$ 와 $G_2(q) \in R^l$ 는 중력에 대한 항이며, $f \in R^m$ 는 능동조인트의 m 개 작동기에 대한 일반화된 힘의 입력을 나타낸다.

부분 피드백 선형화를 하기 위해 식 (2)를 고려한다. 행렬 M_{22} 는 이고 역행렬이 존재하는(invertible) $l \times l$ 양한정 행렬(positive definite matrix)이다. 따라서, \ddot{q}_2 에 대해 식 (2)를 풀면

$$\ddot{q}_2 = -M_{22}^{-1}(M_{21}\ddot{q}_1 + C_2 + G_2) \quad (4)$$

이 된다. 식 (4)를 식 (1)에 대입하면

$$\overline{M}_{11}\ddot{q}_1 + \overline{C}_1 + \overline{G}_1 = f \quad (5)$$

이 얻어진다. 여기서 $\overline{M}_{11} = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$,

$\overline{C}_1 = C_1 - M_{12}M_{22}^{-1}C_2$, $\overline{G}_1 = G_1 - M_{12}M_{22}^{-1}G_2$ 이다.

그러므로, 부분 피드백 선형제어기는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$f = \overline{M}_{11}u + \overline{C}_1 + \overline{G}_1 \quad (6)$$

여기서 $u \in R^m$ 는 부가적인 제어입력으로써 정의된다. 부분 피드백선형화한 후 새로운 제어입력 u 를 사용한 미분방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q}_1 = u \quad (7)$$

$$M_{22}\ddot{q}_2 + C_2 + G_2 = -M_{21}u \quad (8)$$

식 (7)에서 보듯 부가적 제어입력 u 와 능동조인트 상태벡터 q_1 의 미분방정식은 선형이나 전체 상태벡터 q 를 고려했을 때 단지 부분적 선형화가 이루어졌음을 알 수 있다.

3. 평균화기법

평균화기법(averaging method)은 시변시스템의 다이내믹스를 시불변시스템(평균화된 시스템)으로 근사화함으로써 정성적 해석을 가능하게 해주는 점근적인 방법이다. 이러한 시불변시스템은 원래의 시변시스템을 표준형태(standard form)로 변환한 뒤 평균화기법을 적용하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 능동조인트를 원하는 위치로 제어한 이후, 이 능동조인트에 주기함수를 주어 자유조인트를 원하는 위치로 보낼시에 나타나는 시변시스템에 적용된다. 능동조인트에 가하는 입력이 주기함수 입력이므로 각 능동조인트는 각 주기가 끝나면 원래의 위치로 되돌아오게 된다. 주기함수가 존재할 때 시스템이 시변시스템이기 때문에 입력의 진폭 및 진동수를 결정하는데 있어 평균화된 시불변시스템으로 계산될 수 있다.

다음과 같은 비선형시스템을 고려한다.

$$\dot{x} = X(x, \lambda, \lambda) \quad (9)$$

여기서 $X: R^n \times R^m \times R^m \rightarrow R^n$; $x \in R^n$ 은 상태벡터이며, $\lambda \in R^m$ 은 진동을 주는 시스템 파라메타이고, $\dot{\lambda} = d\lambda/dt$ 이다.

식 (9)에 다음과 같은 진동입력을 가한다.

$$\lambda(t) \rightarrow \lambda_0 + \gamma(t), \quad \gamma(t) = \alpha f(\omega t) \quad (10)$$

여기서 λ_0 와 α 는 상수이고, $\gamma(t)$ 평균값이 영인 값을 가지는 주기 벡터함수이다. 이 때 식 (9)는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{x} = X(x, \lambda_0 + \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \quad (11)$$

식 (11)을 다음과 같이 두 항으로 나눌 수 있다고 가정한다.

$$\dot{x} = X_0(x, \gamma(t)) + \omega X_1(x, v(t)) \quad (12)$$

여기서 $X_0(x, \gamma(t)) = X_0(x, \lambda_0 + \gamma(t))$, $v(t) = d\gamma(t)/dt$ 이다.

식 (12)를 $\dot{x} = \epsilon f(x, t)$ 와 같은 표준형태로 나타내기 위해 식 (12)에서 오른쪽 부분의 두 번째 항을 생성방정식(generating equation)으로 다음과 같이 이용한다.

$$\dot{x} = X_1(x, v(t)) \quad (13)$$

$h(t, c): R \times R^n \rightarrow R^n$ 을 식 (13)의 일반해라고 두자. 이 해는 $v(\cdot)$ 와 $t \geq t_0$ 에 대해 주기적인 해이다. $c \in R^n$ 는 초기조건 $x(t_0) \in \Omega \subset R^n$ 로부터 유일하게 결정된다.

표준형태로 변환하기 위해 다음과 같은 새로운 변수 $q(t)$ 를 도입한다.

$$x(t) = h(t, q(t)). \quad (14)$$

그러면

$$\dot{q}(t) = \left[\frac{\partial h(\omega t, q(t))}{\partial q} \right]^{-1} X_0(h(\omega t, q(t)), \alpha f(\omega t)) \quad (15)$$

식을 유도함을 알 수 있다. $z(\tau) = q(t)$, $\epsilon = 1/\omega$ 와 같이 변환하고 $\tau = \omega t$ 처럼 느린 시간척도로 변환을 했을 때 다음과 같은 표준형태를 얻을 수 있다.

$$\dot{z}(\tau) = \epsilon \left[\frac{\partial h(\tau, z(\tau))}{\partial z} \right]^{-1} X_0(h(\tau, z(\tau)), \alpha f(\tau)) \quad (16)$$

마지막으로 평균화된 시스템은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{y} = \epsilon \overline{Y}(y) \quad (17)$$

이때

$$\overline{Y}(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial h(\tau, y)}{\partial y} \right]^{-1} X_0(h(\tau, y), \alpha f(\tau)) d\tau$$

4. 2링크 매니플레이터에의 응용

4.1 자유조인트를 가진 평면 2링크 매니플레이터

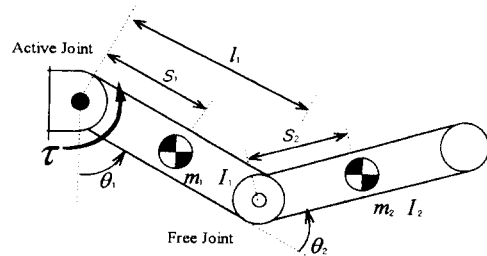


Fig. 1 A planar 2R manipulator

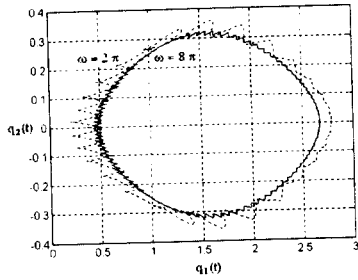


Fig. 6

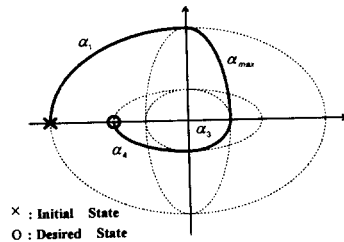


Fig. 7

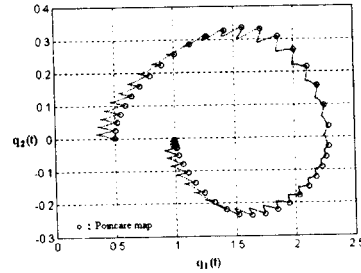


Fig. 8

Fig. 6 Trajectory of the Original System with different ω 's. ($\alpha = 0.5$)

Fig. 7 Control Strategy

Fig. 8 Control to a Desired Position $(0.5, 0) \rightarrow (1.0, 0)$ ($\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.5$)

이 시뮬레이션에서 진폭을 변화면서 원하는 궤도 또는 정해진 상태를 지나는 궤도를 설계할 수 있음을 알 수가 있다. 그림 6은 진폭이 일정할 때 일정한 초기조건이 주어졌을 때, 진폭을 다르게 함으로써 나타나는 변화를 보여주었다. 이 시뮬레이션에서 주기입력 함수의 진동수를 충분히 크게 한다면 같은 초기조건에서 평균화된 시불변방정식의 궤도가 시변방정식의 궤도를 대신할 수 있음을 잘 나타내고 있다.

초기상태가 $(0.5, 0)$ 이고, 원하는 상태가 $(1.0, 0)$ 일 때 제어를 한다. 모든 진폭 및 진동수 조절은 θ_1 이 원하는 위치에 왔을 때 적용한다. 제어전략은 그림 7과같이 나타낼 수 있다. 시스템에 임의의 진동수 ω 와 진폭 α_1 이 적용된 후 상대각변위 θ_2 가 $\pi/2$ 보다 같거나 클 때, 제어시간을 줄이기 위해 시스템에 줄 수 있는 최대한 큰 진폭으로 바꾸어 준다 ($\alpha_1 \rightarrow \alpha_{max}$). 주기입력이 끝나는 순간의 상대각변위 θ_2 가 그전의 상대각변위보다 작으면 다시 진폭을 처음 주어진 진폭 α_1 보다 상대적으로 작게 잡는다. 이는 원하는 상태로 도달할 때의 진폭을 충분히 작게 해주기 위해 하는 단계이다 ($\alpha_{max} \rightarrow \alpha_3$). 상대각변위 θ_2 가 다시 $\pi/2$ 지점을 지났을 때, 원하는 상태로 도달할 수 있도록 적절한 진폭으로 변화시켜준다. 이러한 진폭조절은 평균화된 시스템(24)에서 구할 수 있다.

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(y_2^2 - y_{2d}^2)}{n^2(\cos^2 y_{1d} - \cos^2 y_1)}}$$

마지막으로 주기입력이 끝난 상태가 원하는 상태에 근접했을 때 진동수를 증가시킴으로써 점근적으로 원하는 상태에 점근적으로 도달할 수 있도록 하였다. 원하는 상태 주변에 왔을 때 주파수를 증가시켜줘야 하는 이유는 만약 원하는 상태를 지나쳤을 경우에 결코 원하는 상태로 돌아오지 않는다는 것이다. 만약 원하는 상태를 지나쳤다면 다시 처음과 같은 제어를 다시 해야 한다. 따라서, 원하는 목표 상태 주변에서 충분히 진동수를 증가시켜줌으로써 원하는 상태를 지나지 않게 해야한다. 그림 8은 이와같은 제어전략을 이용한 시뮬레이션이다.

5. 결론

본 논문은 자유조인트가 있는 불충분한 작동기를 가진 기계시스템의 개루프 진동적제어에 대하여 연구하였다. 능동조인트를 부분 피드백선형화를 사용하여 원하는 위치로 움직이고 난 뒤, 이 능동조인트에 주기적인 진동을 가함으로써 남아있는 자유조인트를 원하는 위치에 점근적으로 도달하도록 제어를 하였다. 또한, 입력에 대한 미분항이 존재하는 시스템에 대해 생성방정식을 통한 평균화된 방정식을 체계으로 구하는 방법을 제시하였다. 자유조인트를 가지는 불충분한 작동기를 가진 시스템에 제어하는 것은 어려운 점이 많지만, 본 논문에서는 제안한 진동적제어는 이러한 시스템을 제어하는 좋은 대안이 될 수 있다.

참고 문헌

1. J. Bentsman, and K. S. Hong, "Transient Behavior Analysis of Vibrationally Controlled Nonlinear Parabolic Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-38, pp. 1603~1607, 1993.
2. Bogolyubov, N. N., and Mitropolsky, Y. A., *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, 2nd Ed., Gordon & Breach Publishers, New York, 1961
3. B. Lehman, J. Bentsman, S. V. Lunel, and E. I. Verriest, "Vibrational Control of Nonlinear Time Lag Systems with Bounded Delay Averaging Theory, Stabilizability, and Transient Behavior," *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-39, pp. 898~912, 1994.
4. A. De Luca, R. Mattone, and G. Oriolo, "Stabilization of Underactuated robot: Theory and Experiments for a Planar 2R Manipulator *Proceedings IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 3274~3280, 1997.
5. K. S. Hong, and J. Bentsman, "Stability Criterion for Linear Oscillatory Parabolic Systems," *ASME J. Dynamic systems, Measurement and Control*, Vol. 114, No. 1, 175~178, 1992.
6. T. Suzuki, and Y. Nakamura, "Control of Manipulators with Free-joints via the Averaging Method," *Proceedings IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2998~3005, 1997.