

극점배치기능을 갖는 LQ제어기 설계 및 자동차 능동 현가장치 제어에의 응용

Linear Quadratic Control with Pole Placement for an Automotive Active Suspension System

최재원, 서영봉, 홍금식, 유완석

부산대학교 기계공학부 및 기계기술연구소

J. W. Choi, Y. B. Seo, K. S. Hong, W. S. Yoo

School of Mechanical Engineering and RIMT, Pusan National University

ABSTRACT

In this paper, a relation of matrix Q in the cost function to distances between the closed-loop and open-loop poles of a multi input controllable systems is studied. Futhmore, the state feedback gain with exact desired eigenvalues in the LQR is computed. The proposed scheme is applied to designing automotive active suspension control system for a half-car model and its performance is compared with the existing LQR control system design methodology.

Key Words : Eigenstructure Assignment (고유구조 지정), LQR (최적제어기법), Automotive Active Suspension (자동차 능동 현가장치)

1. 서 론

고유구조 지정(eigenstructure assignment) 문제는 일반적으로 우(right)고유구조 즉, 고유치 및 우고유벡터의 동시 지정문제를 지칭하는 것으로서, 고전적인 제어 문제에서 다루어 왔던 감쇠, 정착시간 및 모드(mode) 또는 외란 분리 특성을 현대 다변수 제어 구조에 반영시킬 수 있는 효과적인 제어방법 중 하나로 잘 알려져 있다. 그러나, 이와 같은 고유구조 지정 기법은 페루프 시스템의 고유구조를 적절히 지정함으로써 페루프 시스템의 응답 특성을 임의로 바꿀 수 있다는 장점은 제공하지만, 견실성(robustness)은 제어기 설계 과정에 직접 반영할 수 없는 구조이기 때문에 지금까지 큰 단점으로 인식되어 왔다.^[1,2]

LQR은 잘 알려진 바와 같이 시스템의 안정도-강인성을 보장하는 견실한 최적제어 설계 기법의 하나다. Dorato와 Abdallah^[3]는 LQR 설계 방법을 사용하여 이득여유(gain margin)와 위상(phase)여유가 각각 최소한 $(-6, \infty)$ db와 $(-60, 60)^\circ$ 를 가지는 결과를 제시했다. 이 기법의 경우 설계자는 페루프 시스템이 원하는 성능을 가질 때까지 LQR의 성능지수(performance index) 함수에 들어있는 상태변수 및 제어입력에 대한 가중행렬을 반복적으로 변화시키게 된다. 그러나, 요구되는 시스템의 성능 특성(또는 요구되는 페루프 시스템의 고유구조)은 가끔 LQR의 획득 가능한 부분공간(achievable subspace)에 항상 존재하는

것은 아니다. 이와 같이, LQR 기법은 전상태피드임(full state feedback)을 사용하여 페루프 시스템의 견실성은 어느 정도 보장하지만, 페루프 시스템의 고유구조는 임의로 지정할 수 없다는 단점을 가지고 있다. Innocenti와 Stanzola^[4]는 고유구조 지정법과 최적제어 설계 기법이 보장하는 획득가능한 견실 특성에 대해서 비교하였다.

최적제어기법을 이용해서 제어기를 설계하는 경우, 대수적인 행렬식을 풀어서 이득행렬을 계산하고, 이를 이용하여 페루프 시스템의 고유치와 고유벡터를 얻을 수 있다. 그러나, 반대로 고유공간정보가 주어져 있을 때, 이를 이용하여 최적제어기의 가중행렬을 추정하는 것은 상당히 어렵다.^[5]

바람직한 고유구조와 가중치행렬과의 관계에 대한 연구가 진행되었으나, 정확한 극점 배치를 얻을 수는 없었고,^[6,7,8] 고유벡터의 지정 문제는 고려되지 못했다.^[8,9,10] 그러므로, 다변수 시스템에 대한 LQR의 안정도-강인성 특성을 보장하고 정확한 고유구조를 지정할 수 있는 유용성을 가진 방법에 대한 연구가 필요하다. 시스템의 제어이득이 주어진 경우, 이러한 제어이득을 제공하는 최적제어기의 가중행렬은 제어행렬의 랭크가 상태행렬의 랭크와 같을 경우에만 결정되어진다. 하지만 대부분의 경우 제어행렬의 랭크 수는 상태행렬보다 작으므로 가중행렬을 구할 수 없다. 이런 경우 의사역(pseudo-inverse)행렬을 구성^[11]하여 가중행렬을 구하는 대신 입력행렬을 블록 제어기

(block controller) 형태^[1,2]로 변환시켜 가중행렬을 구하는 방법을 제안하여 이것을 극점배치기능을 갖는 LQ제어기라 칭하기로 한다. 이 방법은 우고유구조지정에 의한 알고리즘으로 이득행렬을 구하고 블록 행렬 형태로 페루프 고유치를 정확하게 지정하는 가중행렬을 구해내는 것이다. 따라서 이 방법을 사용하면 페루프 시스템의 고유치를 정확하게 지정하는 동시에 LQR의 Hamiltonian 행렬을 만족시키며, 나아가 고유벡터까지 고려할 수 있다.

본 논문의 2장에서는 다루고자 하는 문제를 설정하고, 3장에서는 극점배치기능을 갖는 LQ제어기 설계에 대해 자세히 기술한다. 그리고, 자동차 능동 현가장치 시스템^[13]에 대해 본 논문에서 제안하는 제어기법의 타당성과 유용성을 4장에서 고찰해 본다. 마지막으로 5장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

2. 문제의 설정

다음과 같이 주어지는 시불변 다변수 가제어 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \text{ (} n \times n \text{)}, \quad B \text{ (} n \times m \text{)}, \quad (n \geq m) \quad (2.1)$$

$$u = -Kx \quad (2.2)$$

여기서, x , u 는 n , m 차원의 상태변수, 제어입력이며 A , B 는 시스템 행렬 및 입력행렬, K 는 이득행렬이다. 이러한 시스템에 대하여 최적제어기는 다음과 같은 목적함수를 최소화 하는 제어기를 설계하는 것으로 정의된다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (2.3)$$

선형최적제어기의 이득행렬은 다음의 리카티(riccati) 행렬식으로부터 구할 수 있다.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.4)$$

$$K = R^{-1}B^T P \quad (2.5)$$

역으로 페루프 고유구조 정보가 주어졌을 때, 이 정보로부터 이득행렬을 구해낼 수 있다.^[12] 이러한 제어이득을 제공하는 최적제어기의 가중행렬을 구해보고자한다. A_c 를 페루프 시스템의 상태행렬이라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$A_c = A - BR^{-1}B^T P \quad (2.6)$$

$$BR^{-1}B^T P = A - A_c \quad (2.7)$$

위 식으로부터 $BR^{-1}B^T$ 의 랭크가 n 인 경우, 즉 제어행렬 B 의 랭크가 n 인 경우 리카티 행렬식의 해를 구할 수 있다.

$$P = (BR^{-1}B^T)^{-1}(A - A_c) \quad (2.8)$$

그러나, 대부분의 경우 B 의 랭크는 n 보다 작으며, 랭크가 n 이더라도 행렬 Q 가 양행렬 (positive definite matrix)임을 보장할 수 없다. 여기서 가중행렬 Q 는 이득행렬 K 에 의해 결정됨을 알 수 있다.^[11] 이럴 경우 의사역행렬을

구성하여 가중행렬을 구하는 대신 입력행렬을 블록 제어기 형태로 변환시키면 유용한 결과를 얻을 수 있다.

우선 입력행렬 B 가 다음과 같은 형태로 변환되는 변환행렬 T 가 필요하다. 이 경우 B 가 full 랭크가 아니거나, T 가 유일하지 않아도 문제가 되지 않는다.

$$\bar{B} \rightarrow \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

다음과 같은 과정을 통해 이 같은 변환행렬 T 를 얻을 수 있다.

$$T = [B \mid T_{\text{trans}}] \quad (2.10)$$

여기서 T_{trans} 는 $\text{rank}[T] = n$ 을 만족하는 임의의 행렬이다. T 를 사용하여, 다음과 같이 좌표계를 바꿀 수 있다.

$$x = T\bar{x} \quad (2.11)$$

그러면, 개루프 시스템은 다음과 같이 변환된다.

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad (2.12)$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

이 변환을 사용하더라도 원래 시스템의 고유치는 변환 시스템의 고유치와 같다.^[12]

3. 극점배치기능을 갖는 LQ 제어기 설계

본 장에서는 블록 제어기 형태로 변경된 시스템에 대해 상태퇴역입에 의한 우고유구조 지정기법으로 이득행렬을 구한 후, 블록 제어기의 장점을 이용해서 가중행렬 Q 를 구하는 과정을 자세히 살펴본다. 2장의 시스템 (2.12)에 상태퇴역입에 의한 제어입력 (2.2)가 인가되면 전체적인 페루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x} = (\bar{A} + \bar{B}K)x \quad (3.1)$$

상이한 공액복소수로 이루어진 집합 Λ 를 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ 이라 하자. 그러면, 위의 페루프 시스템에 대한 우고유치 문제는 다음과 같이 정의된다.^[14]

$$(\bar{A} + \bar{B}K - \lambda_i I_N)\phi_i = 0 \quad (3.2)$$

여기서, I_N 은 ($N \times N$)차원의 단위행렬이다.

우고유구조 지정 문제를 구체적으로 기술하기 위하여 우모드 행렬을 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_N] \quad (3.3)$$

우고유구조 지정문제는 요구되는 우고유구조(Λ, Φ)를 얻을 수 있도록 하는 퇴역입 이득행렬 K 를 구하는 문제이다. 문제의 기술을 위하여 다음과 같이 정의되는 행렬들을 먼저 정의한다.

$$S_{\lambda_i} = [\lambda_i I_N - \bar{A} \mid \bar{B}] \quad (3.4)$$

$$R_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

여기서, 행렬 R_{λ_i} 의 열(columns)들은 행렬 S_{λ_i} 의 영공간

의 기저를 이룬다. 그리고 $\text{rank } \bar{B}=m$ 이면 행렬 R_λ 의 부분행렬 N_λ 의 열들은 서로 일차독립이 된다.^[12] 다음 정리는 요구되는 우고유구조를 생성시킬 수 있는 이득행렬 K 의 존재를 위한 필요충분조건을 제공한다.

정리 3.1^[12] : 집합 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ 의 원소들은 상이한 공액복소수로 이루어져있다고 하자. 그러면 페루프 시스템에 대한 고유치 문제 $(A+BK) \phi_i = \lambda_i \phi_i, i=1, 2, \dots, N$ 를 만족하는 실수로 이루어진 $(m \times m)$ 차원의 이득행렬 K 가 만족하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- 1) $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\} \in C^N$ 인 일차독립인 집합이다.
- 2) 임의의 두 고유치가 $\lambda_i = \lambda_j^*$ 와 같이 공액복소수 관계를 가지면, 이에 대응하는 고유벡터들도 $\phi_i = \phi_j^*$ 와 같은 공액복소벡터 관계를 가져야한다. 여기서, 위치차 $(\cdot)^*$ 는 (\cdot) 의 공액복소수 또는 공액복소벡터를 의미한다.
- 3) $\phi_i = \text{span}\{N_i\}$

또한, K 가 존재하고 $\text{rank } \bar{B}=m$ 이면 이때 K 는 유일하게 결정되고, 위에서 정의한 부분행렬 N_λ 과 M_λ 를 이용하여 구할 수 있다.

정리 3.1에 의해 획득가능한 우고유벡터들 $\phi_i^a, i=1, \dots, m$ 는 행렬 N_λ 에서 구할 수 있으므로 이를 식으로 표현하면 다음과 같이 일차결합으로 표시된다.

$$R_\lambda = \begin{bmatrix} \phi_{i,m-1}^a & \phi_{i,m}^a \\ M_\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} (n \times m) \\ (m \times m) \end{matrix}, \phi_i^a = a_i \phi_{i,m-1}^a + b_i \phi_{i,m}^a \quad (3.6)$$

여기서 $z_i = [a_i, b_i]^T$ 는 일차결합 계수벡터들이다. 이 벡터를 정리 3.1의 조건들에 부합하도록 임의로 설정하면 획득가능한 우모드 행렬인 Φ_u 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi^a = [\phi_1^a \dots \phi_n^a], i=1, \dots, n \quad (3.7)$$

그리고 이득행렬 K 는 다음과 같이 계산된다.

$$w_i = M_\lambda z_i, W = [w_1 \dots w_n], i=1, \dots, n \quad (3.8)$$

$$K \Phi^a = W \quad (3.9)$$

여기서 λ_i 가 실수일 때는 ϕ_i^a, z_i 는 실수이고 행렬 Φ^a 는 비특이이므로 다음과 같이 구해진다.

$$K = W(\Phi^a)^{-1} \quad (3.10)$$

하지만, λ_i 가 복소수일 때는 약간의 변경을 필요로 한다.^[12] 행렬 리카티 행렬식의 해인 행렬 P 와 이득행렬 K 의 형태는 다음과 같이 가정하자.

$$K = [k_1 \mid k_2] \quad (3.11)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \mid & p_{12} \\ - & & - \\ p_{21} & \mid & p_{22} \end{bmatrix}, p_{12} = p_{21}^T, p_{22} = p_{22}^T \quad (3.12)$$

여기서 p_{11} 과 k_1 은 $(m \times m)$ 행렬이다. p_{22} 는 영향을 받지 않는 부분이다. 행렬 P 가 대칭이 되려면 p_{11} 이 최소한

대칭이어야하며, p_{11} 이 대칭이 되게 R 을 선택해야한다. 식 (3.15)와 식 (3.16)의 특수한 구조를 식 (2.5)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [k_{11} \ k_2] &= R^{-1} [I_m \mid 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [R^{-1} \mid 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \\ &= [p_{11} \mid p_{12}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$p_{11} = Rk_1, \quad p_{21} = Rk_2$$

p_{22} 는 영향을 받지 않는 부분이므로 I_m 으로 설정하면 리카티 행렬식의 유일한 해 P 는 다음과 같이 구해진다.

$$P = \begin{bmatrix} Rk_1 & Rk_2 \\ (Rk_2)^T & I_m \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

이렇게 구한 행렬 P 는 양의 정칙(positive definite)행렬임을 보장하지는 않는다. 그러므로 구해진 P 를 리카티 행렬식에 대입하는 경우 계산된 Q 가 양의 정칙행렬임을 보장할 수는 없다. 역으로 Q 가 양의 정칙행렬이면, 리카티 행렬식으로부터 P 는 양의 정칙행렬이 된다.^[11] 하지만 P 가 양의 정칙행렬일 조건은 P 가 존재할 충분조건이므로 반드시 양의 정칙행렬이 아니어도 된다.^[15]

행렬 A 와 A^T 의 부분을 다음과 같이 나누자.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \bar{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

그리고, 다음의 리카티 행렬식에 대입하여 정리하면 최종식을 얻을 수 있다.

$$Q = -\bar{A}^T P - P \bar{A} + P \bar{B} R^{-1} \bar{B}^T P \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} q_{11} &= -A_{11} p_{11} - A_{12} p_{21} - p_{11} A_{11} - p_{12} A_{21} + p_{11}^2 \\ q_{12} &= -A_{11} p_{12} - A_{12} p_{22} - p_{11} A_{12} - p_{12} A_{22} + p_{11} p_{12} \\ q_{21} &= -A_{21} p_{11} - A_{22} p_{21} - p_{21} A_{11} - p_{22} A_{21} + p_{21} p_{11} \\ q_{22} &= -A_{21} p_{12} - A_{22} p_{22} - p_{21} A_{12} - p_{22} A_{22} + p_{21} p_{12} \end{aligned}$$

이제 위의 결과가 페루프 고유치를 정확하게 지정하는 가중행렬인지 다음의 정리로 확인한다.

정리 3.2 : 다음의 경우를 만족하면 가중행렬 Q 는 고유치 지정문제에서의 이득행렬 K 와 LQR제어문제에서의 이득행렬 K 를 동시에 만족한다.

- 1) LQR Hamiltonian 시스템이 다음의 행렬로 구성된다.

$$H = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} R^{-1} \bar{B}^T \\ -Q & -\bar{A} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

- 2) Hamiltonian 행렬의 안정한 고유치가 바라는 페루프 고유치와 같다. 즉, μ_i 가 고유벡터 $[X_i^T \ A_i^T]^T, X_i \in R^n$ 에 대응되는 Hamiltonian H 의 안정한 고유치라면, μ_i 는 또한 고유벡터 X_i 에 대응되는 페루프 시스템 $(\bar{A} + \bar{B}K)$ 의 고유치이다.

증명 : (\bar{A}, \bar{B}) 는 도달가능하고, (\bar{A}, \sqrt{Q}) 가 검출가능하다고 가정하면, 바라는 페루프 시스템은 식 (3.1)과 같이 구성된다. 여기서, K 는 고유구조지정문제에서의 이득행렬이다.

우선 μ_i 를 바라는 페루프 시스템의 고유치라고 하자. 그러면, 페루프 시스템은 다음과 같이 된다.

$$(\mu_i I - \bar{A} + \bar{B}K)X_i = 0$$

여기서, X_i 는 고유치 μ_i 에 대응되는 페루프 시스템의 고유벡터이다.

그리고, LQR Hamiltonian 시스템은 다음과 표시된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

여기서 H 는 식 (3.16)의 Hamiltonian 행렬이고, λ 는 라그랑지곱수이다.

μ_i 를 H 의 안정한 고유치라고 하자. 그러면, LQR Hamiltonian 시스템은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_i \begin{bmatrix} X_i \\ \Lambda_i \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X_i \\ \Lambda_i \end{bmatrix}$$

여기서, $[X_i \ \Lambda_i]^T$ 는 고유치 μ_i 에 대응하는 H 의 고유벡터이다. 이 때, LQ 문제에서의 이득행렬은 다음과 같다.

$$K = R^{-1} \bar{B}^T \Lambda_i M_i X_i^{-1}$$

여기서, M_i 은 안정한 고유치의 대각행렬이다. 따라서, 식 (3.1)의 고유치는 H 의 안정한 고유치와 같고, 식 (3.1)의 고유벡터는 H 의 안정한 고유벡터의 위 쪽 반과 같다. 그러므로, H 행렬의 안정한 고유치가 바라는 페루프 고유치와 같다면 LQR 제어문제에서의 이득행렬 K 와 고유치 지정문제에서의 이득행렬 K 가 같다.

$$K = W \phi^0 = R^{-1} \bar{B}^T \Lambda_i M_i X_i^{-1}$$

위의 정리 3.2를 만족하지 않는다면 변환행렬 T 를 다시 설정하여야 한다. 이것은 변환행렬 T 가 유일하지 않기 때문에 생기는 문제이다.

마지막으로 원래 시스템에 대한 이득행렬과 가중행렬을 구하면 다음과 같다.

$$KT^{-1}, T^{-T}QT^{-1} \quad (3.17)$$

4. 시뮬레이션 및 검토

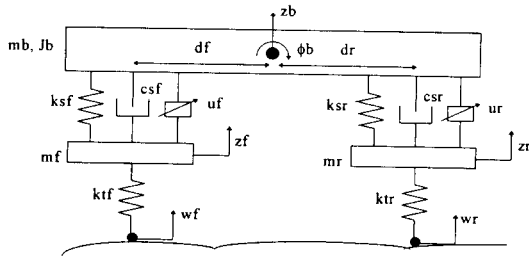


Fig. 1. A half car model

현가장치 시스템 제어의 주목적은 도로표면에 대한 적절한 조종성, 캠버 자세유지, 그리고 샤키의 구름(roll)에 대한 저항, 최소 하중 변화에 따른 타이어의 노면접촉에 대

하여 수직 추종성(compliance)을 제공하는 것이다.

이 장에서는, Fig. 1의 1/2 자동차 능동 현가장치 시스템에 노면 외란에 대해 승차감을 향상시키기 위하여 극점 배치기능을 갖는 LQ 제어를 설계하고, 기존의 표준 LQR을 적용한 결과와 비교한다. 시스템 방정식은 다음의 요소로 구성되며 상태 벡터는 다음과 같다.

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$$

여기서 각 상태들은 각각 앞바퀴 편향($x_1 = z_f - z_b - d_f \phi_b$), 뒤 바퀴 편향($x_2 = z_r - z_b + d_r \phi_b$), 앞 타이어 편향($x_3 = w_f - z_f$), 뒤 타이어 편향($x_4 = w_r - z_r$), 앞 현가장치 속도($x_5 = \dot{z}_f$), 뒤 현가장치 속도($x_6 = \dot{z}_r$), 차체의 수직가 속도($x_7 = \dot{z}_b$), 그리고 차체의 피치변화율($x_8 = \dot{\phi}_b$)을 나타낸다^[13].

시스템은 행렬 A , B 와 노면 외란 입력으로 구성된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu + E\xi$$

제어입력은 다음과 같다.

$$u = [u_f, u_r]^T$$

여기서 u_f 와 u_r 은 각각 앞과 뒤 액추에이터 명령을 나타낸다.

노면 외란 입력 $\xi = [\xi_1, \xi_2]^T = [\dot{w}_f, \dot{w}_r]^T$ 은 높이 0.1m, 폭 1m인 범퍼로 고려하였다. 이 시스템에 대한 개루프 고유치는 $\Lambda^{open} = \{-16.38 \pm 67.43j, -22.95 \pm 67.68j,$

$$-1.15 \pm 6.19j, -2.79 \pm 7.69j\}$$

차체의 승차감을 향상시키는 페루프 제어를 설계하고, 표준 LQR 방법의 결과와 비교하기 위해 먼저 표준 LQR을 사용한 상태 피드백 제어를 설계한다. 가격함수는 다음과 같이 정의한다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + \rho \cdot u^T R u) dt$$

여기서 ρ 는 가중치 인자이고, R 은 $(m \times m)$ 의 단위행렬이다. $\rho = 10^{-4}$ 일 때 J 를 최소화한다면, 가중행렬 Q 를 임의로 택하고, 피드백 이득 행렬 K 를 계산하면 다음과 같다.

$$Q = \text{diag}[10^2 \ 10^2 \ 10^{-1} \ 10^{-1} \ 10^2 \ 10^2 \ 10^6 \ 10^6],$$

$$K = \begin{bmatrix} -20 & 510 & 79460 & 70 & 590 & 50 & 77860 & 60000 \\ -590 & -20 & 2380 & 104850 & 90 & 840 & 59650 & -76320 \end{bmatrix}$$

이제, 극점배치기능을 갖는 LQ제어기 설계방법을 통해서 상태 피드백 제어 법칙을 설계해 보자. 수직가속도 성분을 줄이고 범퍼 통과 후 잔여진동을 줄이는 방향으로 바라는 페루프 고유치를 다음과 같이 각각 선정하자.

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}, \lambda_{5,6}, \lambda_{7,8}\} \\ &= [-5.38 \pm 66.43j, -8.95 \pm 67.68j, \\ &\quad -2.36 \pm 6.19j, -2.95 \pm 6.69j] \end{aligned}$$

3장에서 제안된 설계과정에 따라서, 상태 피드백 이득행렬 K 와 가중행렬 Q 를 계산하면 각각 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} 643 & 463 & -15261 & 905 & 805 & -15 & 807 & 753 \\ -1925 & 4083 & 1011 & -17015 & -6 & 974 & 661 & 830 \end{bmatrix}$$

$$Q = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0.0224 & 0.0169 & 0.4111 & -0.3263 & -0.0174 & 0.0008 & -0.0191 & -0.0099 \\ 0.0159 & -0.1268 & 0.0957 & 0.9607 & 0.0002 & -0.0207 & -0.0006 & -0.0226 \\ 0.4942 & 0.0874 & -5.2755 & 0.1664 & 0.1724 & 0.0081 & 0.1125 & 0.1111 \\ -0.3263 & 0.9523 & 0.1580 & -5.7013 & -0.0005 & 0.1796 & 0.0693 & 0.1843 \\ -0.0175 & -0.0065 & 0.1723 & 0.0079 & -0.0002 & -0.0061 & 0.0008 & 0.0013 \\ 0.0017 & -0.0207 & 0.0005 & 0.1796 & -0.0001 & -0.0007 & 0.0009 & -0.0032 \\ -0.0192 & -0.0009 & 0.1125 & 0.0693 & 0.0006 & 0.0010 & 0.0053 & 0.0026 \\ -0.0101 & -0.0233 & 0.1143 & 0.1928 & 0.0014 & -0.0032 & 0.0028 & -0.0018 \end{bmatrix}$$

제어 결과 개루프 수직가속도와 각가속도가 거의 절반으로 줄어들었다. 페루프 시스템 $\dot{x} = (A+BK)x + E\xi$ 의 응답이 표준 LQR 방법을 사용한 것과 비교되어 Fig. 2에 나타나있다.

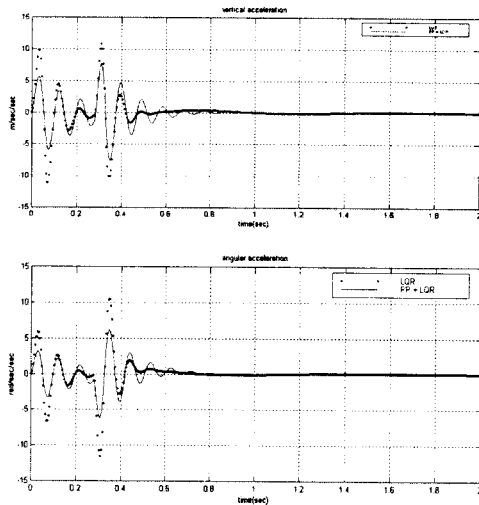


Fig 2. Closed-loop responses for the two methods (solid line : PP with LQ, dashed line : LQR)

5. 결론

일반적으로 극점배치기법은 페루프 시스템의 고유치를 적절히 지정함으로써 페루프 시스템의 응답 특성을 임의로 바꿀 수 있는 반면, 견실성은 제어기 설계 과정에 직접 반영할 수 없는 구조이다. LQR은 전상태피드백을 사용하여 페루프 시스템의 견실성은 어느 정도 보장하지만, 페루프 시스템의 고유구조는 임의로 지정할 수 없다.

본 논문에서 제안된 방법은 블록 제어기를 사용한 고유구조지정에 의한 알고리즘으로 이득행렬을 구하고 블록행렬 형태로 페루프 고유치를 정확하게 지정하는 가중행렬을 구해내는 것이다. 따라서 이 방법을 사용하면 페루프 시스템의 고유치를 정확하게 지정하는 동시에 이를 만족시키는 LQR의 가중행렬을 구해낼 수 있다.

LQR 제어기법과 비교하여서는 극점배치기능을 갖는 LQ 제어기가 더 나은 성능을 내고 이득행렬 K 가 더 작았다.

노면 외란이 있는 자동차 능동 현가장치 제어에 이 방법이 유용하고, 제어 효과와 외란 억제에 더 효과적인 제어 설계기법이며, LQR보다도 더 나은 성능을 보여주는 것으로 나타났다.

참고문헌

1. 최재원, *Control Design Methodologies Using Left and Right Eigenstructures with Applications to Flight Systems*, 서울대학교 공학박사학위 논문, 1995년 2월.
2. Choi, J. W., Lee, J. G., Kim, Y. D., Kang, T. S., "A Concurrent Eigenstructure Assignment Method by State Feedback," *Journal of Control, Automation and Systems Engineering*, Vol. 1, No. 1, September 1995, pp. 4-11.
3. Dorato, Abdallah, "Linear-Quadratic Control," Prentice Hall, Englewood Cliffs, pp. 63-75.
4. Innocenti, M., Stanzola, C., "Performance-Robustness Trade Off of Eigenstructure Assignment Applied to Rotorcraft," *Aeronautical Journal*, Vol. 94, No. 934, 1990, pp. 124-131.
5. 김희섭, 김유단, "The Study on the Relations Between LQR and Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the 11th KACC*, October 1996, pp. 1091-1094.
6. Wilson, R. F., and Cloutier, J. R., "Optimal Eigenstructure Achievement with Robustness Guarantees," *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, San Diego, USA, May 1990, pp. 952-957.
7. Broussard, J. R., "A Quadratic Weight Selection Algorithm," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-27, August 1982, pp. 945-947.
8. Harvey, C. A., and Stein, G., "Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-23, No. 3, June 1978, pp. 378-387.
9. Hiroe, T., Morimoto, T., Inoue, S. I., and Takamatsu, H., "A New Method for Selecting Weighting Matrices of LR Regulators and Its Application to an Industrial Turbine," *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas, USA, December 1993, pp. 3333-3334.
10. Fujii, T., "A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 11, November 1987, pp. 995-1003.
11. Ochi, Y., and Kanai, K., "A New Way of Pole Placement in LQR and Its Application to Flight Control," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Monterey, USA, August 1993, pp. 1295-1301.
12. Andry, A. N., Shapiro, e. Y., and Chung, J. C., "Eigenstructure Assignment for Linear Systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-19, No. 5, 1983, pp. 711-729.
13. Choi, J. W., Hong, K. S., Yoo, W. S., "Eigenstructure Assignment Methodology with Application to Automotive Active Suspension Control," *SICE '97*, July 1997, Tokushima, Japan, pp. 983-988.
14. Chen. C. T., "Linear System Theory and Design," Saunders College Publishing.
15. Ohta, H., Kakinuma, M., and Nikiforuk, P. N., "Use of Negative Weights in Linear Quadratic Regulator Synthesis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, July 1990, pp. 791-796.