

# End - Mill 절삭계의 파라미터 모델링에 관한 연구

## A study of the Modeling of Parameters in End-Mill System

백대균(안동공전 기계과), 김희술(영남대 기계과)

### Abstract

This paper presents a new method to obtain parameters of end-mill cutting system. For high speed milling and precision surface finish, we have to predict the deflection of tool and the critical depth of cut. The cutting system can be modeled to a vibratory system to obtain the deflection of tool and the critical depth of cut. A new method of the modeling of one degree of freedom system was developed using bisection method, ARMA(Autoregressive Moving average) and impact test.

### 1. 서론

최근 금형가공에서 생산성을 높이고 납기를 단축하기 위하여 고속밀링 가공을 추구하고 있다. 고속밀링가공은 제품을 단시간에 정밀하게 가공하는 것이 목적이다. 고속밀링을 이루기 위해서는 고속절삭을 위한 스피들, 정확한 이송운동 기구와 NC Controller 등이 필요하다.

또한, 채터가 발생하지 않는 절삭 조건에서 절삭을 수행해야하고, 절삭력의 크기에 따라 발생하는 공구의 처짐량을 정확하게 예측하여 공구경로를 보정해야한다. 그러나 고속밀링에 가장 많이 사용되고 있는 End-Mill은 외팔보의 구조를 이루고 있으므로 강성이 부족하여 채터를 발생시키고 공구가 처지게 되어 공작물의 가공 정밀도를 저하시킨다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위하여 국내, 외에서 많은 연구를 수행하고 있다[1-6].

이러한 국내, 외 연구결과를 살펴보면 밀링 절삭 시스템을 1자유도 진동계로 모델링하여 채터와 공구 처짐 문제를 연구하고 있다. 그러나 연구의 가장 기본이 되고 핵심이 되고 있는 절삭시스템의 파라미터를 구하는 방법은 미진한 상태이다. 주로 많이 채택하고 있는 가진기를 이용하는 방법은 실험장비가 많이 필요하고 시간이 많이 걸리며 정확도가 떨어진 다. 또한, 구조물의 크기에 따라 가진기의 크기가 달라져야한다는 큰 불편함을 안고 있다.

본 연구에서는 고속밀링가공에서 채터 해석과 공구의 처짐량을 예측하기 위하여 절삭시스템을 쉽게 모델링할 수 있는 새로운 방법을 개발하고자 한다. 충격해머와 가속도 센서를 이용하여 End-Mill을 진동계로 모델링하는 방법이다. 가속도 신호와 충격력을 입력하면 1자유도 진동계의 질량, 감쇠상수, 스프

링상수를 바로 구할 수 있는 방법을 개발하고자 한다.

### 2. 이론해석

#### 2.1 ARMA모델

시스템이 선형미분방정식이면 ARMA(Autoregressive Moving Average) 모델로 시스템을 모델링할 수 있고 시스템의 고유진동수와 감쇠비를 구할 수 있다[7].

이산계(Discrete system)에서 샘플링 구간  $\Delta$ 로 획득한 데이터로부터 선형미분방정식을 차분방정식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_n B^n) X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_m B^m) a_t \quad (2.1)$$

$$E[a_t] = 0; \quad E[a_t a_{t-k}] = \delta_k \sigma_a^2 \quad (2.2)$$

여기서

$a_t$ 는 이산백색잡음

$\delta_k$ 는 Kronecker delta function

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  the autoregressive, and

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  the moving average parameters

식 (2.1)을 ARMA(n,m)모델이라 부른다. 시스템의 자유도가 n일 때 차분방정식은 ARMA(2n,2n-1)로 모델링할 수 있다[7]. 식 (2.1)을 전달함수형태로 다시 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X_r = \frac{\theta_m(B)}{\varphi_n(B)} a_r$$

$$= \frac{1 - \theta_1 B - \dots - \theta_m B^m}{1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_n B^n} a_r$$

(2.3)

이 모델의 특성들은 아래의 특성방정식에 의하여 나타난다.

$$\lambda^n - \varphi_1 \lambda^{n-1} - \varphi_2 \lambda^{n-2} - \dots - \varphi_n = 0$$

(2.4)

샘플링 구간이  $\Delta$ 일 때, 감쇠비(Damping ratio)  $\xi$ , 그리고 고유진동수(Natural frequency)  $f_n$ 은 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$\xi = \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2 + 4 [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*}})]^2}}$$

(2.5)

$$f_n = \frac{1}{2\pi\Delta} \sqrt{\frac{[\ln(\lambda_i \lambda_i^*)]^2}{4} + [\cos^{-1}(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \lambda_i^*}})]^2}$$

(2.6)

여기서  $\lambda_i, \lambda_i^*$ 는 Complex Conjugate Roots이며,  $f_n$ 은 고유진동수(Hz)이다.

## 2.2 1자유도 진동계의 시스템 규명

진동계에 충격해머로 충격력을 가진하면 그 시스템은 고유진동수로 진동하면서 시스템의 감쇠비로 진동이 줄어들게 된다. 충격력을 가진하여 가속도 신호를 획득하여 ARMA모델에 적용하면 식 (2.5)과 식 (2.6)로부터 시스템의 고유진동수와 감쇠비를 구할 수 있다.

충격실험에서 구해진 고유진동수, 감쇠비, 충격력으로부터 1자유도계는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 구하고자 하는 시스템의 운동방정식은 다음과 같다고 가정하자.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \delta(t)$$

(2.7)

식 (2.7)에서 보는 것과 같이 구하려고하는 1자유도계의 파라미터는 3개  $m, c, k$ 이다. 식 (2.7)과 같이 구성된 진동계에 충격해머를 가진하면 충격력과 가속도 신호를 획득할 수 있다. 획득한 가속도 신호로

부터 고유진동수( $f_n$ )와 감쇠비( $\xi$ )를 구한다.

ARMA모델에서 구한 시스템의 특성치는 2개이고 구하고자 하는 파라미터는  $m, c, k$  3개이다.

그러나 충격력을 이용하면  $m, c, k$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. ARMA모델에서 구해진 고유진동수와 감쇠비로 1자유도계 운동방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \delta(t)$$

(2.8)

식 (2.7)과 식 (2.8)은 고유진동수와 감쇠계수는 서로 같고, 가진실험에 사용된 충격력  $\delta(t)$ 에 대하여 진폭만 다르게 나타난다. 식 (2.8)은 구하려고 하는 진동계와 특성치는 같으나 시스템을 완전히 모델링한 것은 아니다. 식 (2.8)에 실제 진동계에서 추정할 수 있는 질량보다 충분히 작은 임의의 값  $m_0$ 을 곱하면 다음과 같다.

$$m_0\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n m_0\dot{x}(t) + \omega_n^2 m_0x(t) = \delta(t)$$

(2.9)

식 (2.7)의 실험에서 측정된 충격력  $\delta(t)$ 와 동일한 값을 식 (2.9)에 가진하여 실험과 동일한 샘플링 주파수로 가속도를 수치해석할 수 있다. 식 (2.9)에서 수치해석한 가속도 신호의 RMS(Root Mean Square)값과 식 (2.7)의 실험에서 측정된 가속도 신호의 RMS값을 서로 비교한다. 수치해석한 가속도 신호의 RMS값이 더 크면  $m_0$ 을 더 크게 증가하여 다시 수치해석하여 측정치와 비교한다. 질량을 크게 할 수록 가속도는 점점 더 감소할 것이다. 이와같은 방법으로 서로 비교한 RMS값이 어떤 공차안에 있으면 식 (2.7)과 식 (2.9)는 거의 같게 된다. 따라서 구하고자 하는 1자유도계의  $m, c, k$ 를 구할 수 있다.

식 (2.9)에서 질량을 크게 증가할 수록 수치해석한 가속도 신호의 RMS는 선형적으로 감소하므로 위와 같은 시행착오법은 Bisection method[8]를 이용하면 손쉽게 해결할 수 있다. 이러한 1자유도계의 모델링 방법을 간략히 나타내면 다음과 같다.

(1) 먼저 Bisection method에 적용하기 위하여 구하려고 하는 시스템의 질량  $m$ 보다 충분히 작은 값  $m_1$ 과 충분히 큰 값  $m_2$ 을 가정하고 임의의 공차값  $t_0$ 를 결정한다.

(2) 측정된 가속도를 ARMA(2,1)에 적용하여 시스

탐의 고유진동수와 감쇠비를 구한다.

(3)  $m_0 = (m_1 + m_2)/2$ 로 질량을 정하고 (2)에서 구한 고유진동수와 감쇠비로 식 (2.9)와 같이 운동방정식을 구성한다. 실험에서 측정된 충격력과 같은 값을 운동방정식에 가진하여 Wilson- $\theta$  법으로 실험에 사용된 것과 똑같은 샘플링 시간으로 가속도를 수치해석한다.

(4) 실험에서 측정된 가속도 신호의 RMS값  $R_{exp}$ 와 (3)에서 수치해석한 가속도 신호의 RMS값  $R_{sim}$ 을 각각 구한다.

(5) 만약  $|R_{exp} - R_{sim}| > t_0$ 이면 다음 단계 (6)으로 간다. 만약  $|R_{exp} - R_{sim}| < t_0$ 이면  $m = m_0$ ,  $c = 2\xi \omega_n m_0$ ,  $k = \omega_n^2 m_0$ 로 시스템의 계수를 결정하고 모델링 절차를 중지한다.

(6) 만약  $R_{sim} > R_{exp}$ 이면  $m_1 = m_0$ 로 하여 단계 (3)으로 다시 돌아간다. 만약  $R_{sim} < R_{exp}$ 이면  $m_2 = m_0$ 로 하여 단계 (3)으로 다시 돌아간다.

위와 같이 모델링 절차가 끝나면 구해진 m, c, k로부터 가속도 신호를 수치해석하여 RMS값을 구하고 FFT를 수행한 후 실험에서 측정된 가속도 신호의 결과와 비교하여 타당성을 검증한다.

### 3. 1자유도계 모델링의 시뮬레이션

본 연구에서 제시한 모델링 방법의 타당성을 검증하기 위하여 알고 있는 1자유도 진동계에 대하여 2장에서 나타난 절차를 시뮬레이션 하고자 한다. 먼저 질량을 5 (kg), 감쇠상수를 20 (N·s/mm), 스프링 상수를 4000 (N/mm)으로 가정하여 알고 있는 1자유도계 운동방정식을 세우면 다음과 같다.

$$5 \ddot{x}(t) + 20 \dot{x}(t) + 4000 x(t) = \delta(t) \quad \text{-----}(3.1)$$

식 (3.1)에 충격력 1(N)을 가진하여 가속도를 Wilson- $\theta$  법으로 시뮬레이션 하였다. 이 때 사용된 샘플링 시간은 0.005초로서 Nyquist 샘플링 시간 0.0176초보다는 더 짧게 선택하였다. 샘플링 시간은 Nyquist 샘플링 시간보다 짧게 선택하면 ARMA 모델 계수의 정확성이 높아지므로 고유진동수와 감쇠비의 신뢰도가 높아진다. 데이터 개수는 FFT 해석을 위해서 1024개로 선택하였다. 식 (3.1)의 가속도 신호를 시뮬레이션하여 Fig.1에 나타내었고 FFT를 수행하여 Fig.2에 나타내었다.

이 시뮬레이션한 가속도 신호와 충격력을 이용하

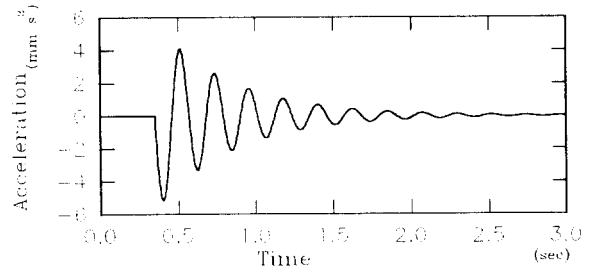


Fig.1 The acceleration of a vibratory system.

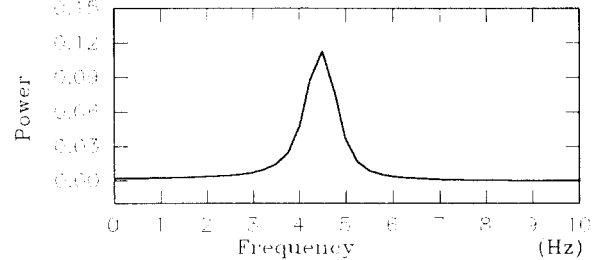


Fig.2 The FFT of the acceleration.

여 2장의 모델링 절차를 수행하여 m, c, k를 구하여 식 (3.1)과 비교하면 다음과 같다. Fig.1의 가속도 신호를 ARMA(2,1)에 적용하여  $\varphi_1=1.9605$ ,  $\varphi_2=0.9803$ ,  $\theta_1=0.0044$ 를 구하고 이 계수로부터 식 (2.5)와 식 (2.6)으로부터 고유진동수 4.5078(Hz)와 감쇠비 0.0702를 각각 구하였다. 식 (3.1)로부터 이론적으로 구한 고유진동수( $f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ )는 4.5016이고, 감쇠계수( $\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ )는 0.0707이다.

ARMA계수로부터 구한 시스템의 특성치와 이론적으로 구한 특성치는 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. ARMA(2,1)계수로부터 구한 고유진동수와 감쇠계수를 이용하여 시스템의 운동방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\ddot{x}(t) + 3.9766 \dot{x}(t) + 802.2177 x(t) = \delta(t) \quad \text{-----}(3.2)$$

식 (3.1)과 식 (3.2)는 같은 시스템 특성치를 가지고 있으나, 충격력 1(N)에 대해 가속도의 크기만 서로 다르다. 이러한 사실은 식 (3.1)을 질량 5로 나누어 보면 알 수 있다.

2.2절에 나타난 것과 같이 Bisection method를 이용하기 위하여 우리가 가정할 수 있는 질량보다 충분히 작은 값  $m_1 = 0.001$ 로 정하고 충분히 큰 값

$m_2 = 1000$ 으로 각각 선정하였다. 공차값은 너무 작게 잡으면 수렴하지 못하고 너무 크게 잡으면 정확도가 떨어진다. Fig.2의 가속도 신호의 RMS값이 0.8928이다. 본 시뮬레이션에서는 공차값을 원가속도 신호의 RMS값의 0.01 %인  $t_0 = 0.0089$ 로 설정하였다. 위와 같이 초기조건을 설정하고 2.2절의 절차에 따라 프로그램을 수행한 결과 12번의 반복수행에  $m_0 = 5.0059$ 로 수렴하였다. 이  $m_0$ 값을 식 (3.2)에 곱하면 다음과 같다.

$$5.0059 \ddot{x}(t) + 19.9064 \dot{x}(t) + 4015.7737 x(t) = \delta(t) \quad (3.3)$$

모델링이 완성된 식 (3.3)과 원시스템 방정식 (3.1)을 비교해보면 거의 일치함을 알 수 있다.

#### 4. 실험장치 및 방법

바이스위에 Fig.3과 같이 엔드밀과 콜릿척을 물리고 가속도계를 각각 부착한다. 충격해머로 엔드밀을 가진하여 충격력을 증폭기로 증폭하여 A/D 변환기를 통하여 컴퓨터에 저장하고, 동시에 가속도계의 신호를 증폭하여 A/D변환기를 통하여 컴퓨터에 저장하였다.

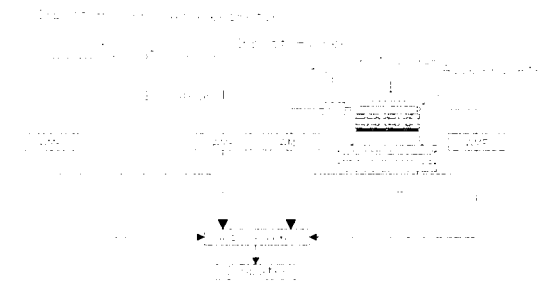


Fig.3 Experimental Set-up.

밀링 머신의 스피indle는 강체로 볼 수 있으므로 절삭중에 절삭력의 의한 공구 처짐은 콜릿척과 엔드밀에서 발생한다. 따라서 바이스위에 콜릿척을 고정하고 충격해머로 가진하여 콜릿척의 가속도신호를 분석하였고, 바이스위에 엔드밀을 고정하고 충격해머로 가진하여 엔드밀의 가속도 신호를 분석하였다.

#### 5. 실험결과 및 고찰

밀링 절삭과정중에 가장 공구처짐이 많이 발생하고 진동이 심한 부분은 엔드밀이다. 엔드밀의 파라미터를 구하기 위해 바이스위에 직경 12mm 볼엔드

밀을 길이 80mm로 고정하고 충격실험을 수행하였다. Fig.3과 같이 충격해머를 볼엔드밀 끝부분에 가진하여 충격력과 가속도를 측정하였다. 측정된 가속도는 Fig.4에 나타내었고, FFT한 결과는 Fig.5에 나타내었다. 이 때 측정된 충격력은 157(N)이었다.

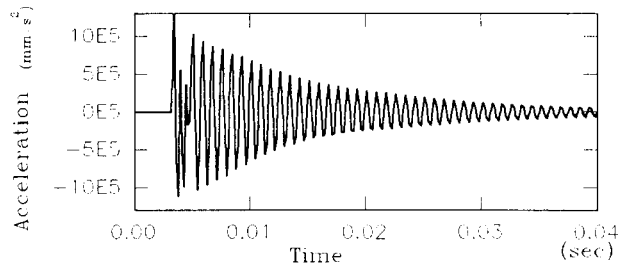


Fig.4 The acceleration of a end-mill.

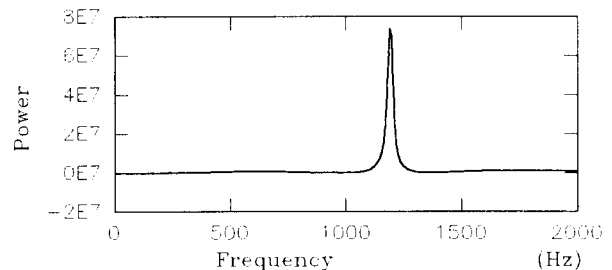


Fig.5 The FFT of the acceleration.

Fig.4의 가속도를 ARMA(2,1)모델에 적용하여 식 2.5와 식2.6으로 고유진동수와 감쇠 계수를 구하였다. 구해진 ARMA계수와 고유진동수, 감쇠계수는 Table 1과 같다.

Table 1. Parameters of experimental data of end-mill

ARMA parameters	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$
Natural Frequency( $f_n$ )	0.6175	-0.9670	-0.0052
Damping Ratio( $\zeta$ )	1195(Hz)		
	0.013		

구해진 고유진동수와 감쇠계수로 식 (2.8)과 같이 운동방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\ddot{x}(t) + 195.2 \dot{x}(t) + 5.6370064E7 x(t) = \delta(t) \quad (5.1)$$

완전한 운동방정식을 구하기 위해 2.2절과 같이 Bisection Method를 실행하였다. 최소 질량은 0.1(Kg)으로 하였고 최대 질량은 100(Kg)으로 설정하고 공차값  $t_0$ 를 0.001로 설정하여 수행한 결과 반복회수 17번에 다음과 같이 엔드밀 절삭계를 모델링

하였다.

$$0.9 \ddot{x}(t) + 175.8 \dot{x}(t) + 5.0705698E7 x(t) = \delta(t) \quad (5.2)$$

모델링한 파라미터의 타당성을 검증하기 위하여 실험에서 측정된 값과 동일한 157(N)을 식 (5.2)에 가진하여 가속도를 Willson- $\theta$  법으로 수치해석하여 Fig.6에 나타내고 가속도를 FFT하여 Fig.7에 나타내었다. Fig.6의 가속도 신호를 ARMA(2,1)모델에 적용하여 구한 ARMA(2,1)계수, 고유진동수, 감쇠계수를 Table 2에 나타내었다. Table 1과 Table 2를 비교해보면 오차가 별로 없음을 알 수 있다.

Table 2. Parameters of simulated data

ARMA parameters	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$
	0.6192	-0.9676	-0.0266
Natural Frequency( $f_n$ )	1194(Hz)		
Damping Ratio( $\zeta$ )	0.013		

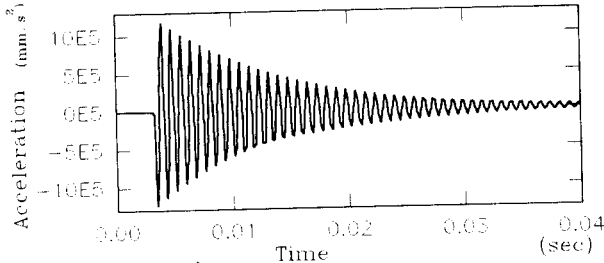


Fig.6 The acceleration of the modeled system.

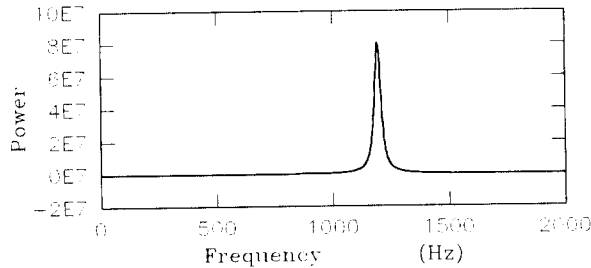


Fig.7 The FFT of the acceleration.

실험결과와 모델링 결과를 비교해보기 위해 Fig. 4와 Fig.6의 가속도 신호를 Fig.8에 비교하여 나타내었고, Fig.5와 Fig.7의 FFT신호는 Fig.9에 나타내었다. 모델링 결과와 실험 데이터가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

콜릿척의 시스템 파라미터를 구하기 위해 Fig.3과 같이 콜릿척의 끝에 가속도 센서를 붙이고 충격해머로 가진하여 가속도를 측정하였다. 측정된 가속도

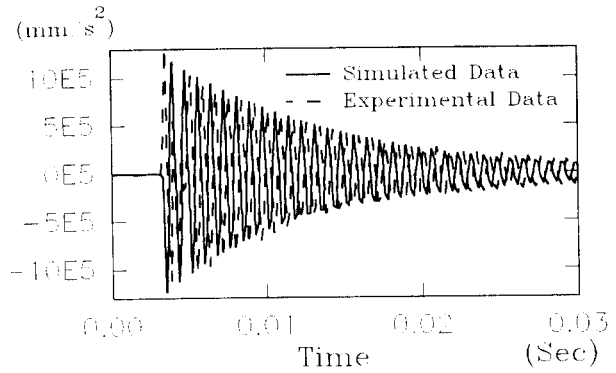


Fig.8 The Comparison of accelerations

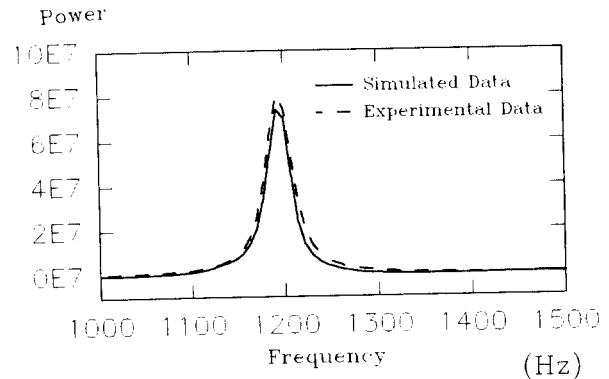


Fig.9 The comparison of FFT.

로 엔드밀과 동일한 방법으로 파라미터를 모델링하였다. 콜릿척의 ARMA계수, 고유진동수, 감쇠계수는 Table 3에 나타내었다. 이 결과로부터 Bisection Method에 적용하여 구한 콜릿척의 운동방정식은 식 (5.3)과 같다.

Table 3. Parameters of a collect chuck.

ARMA parameters	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$
	0.2871	-0.8367	-0.4287
Natural Frequency( $f_n$ )	1352(Hz)		
Damping Ratio( $\zeta$ )	0.063		

$$14.8 \ddot{x}(t) + 15844.0 \dot{x}(t) + 1.0691667E9 x(t) = \delta(t) \quad (5.3)$$

실험에서 측정된 값과 동일한 충격력 1194 (N)을 식 (5.3)에 가진하여 가속도를 수치해석하였다. 실험에서 측정된 가속도와 식 (5.3)으로부터 구한 결과를 비교하여 Fig.10에 나타내었고, FFT결과를 Fig.11에 비교하여 나타내었다.

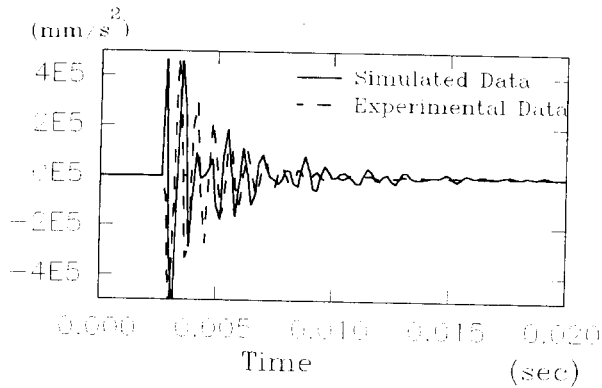


Fig.10 The acceleration of a collet chuck.

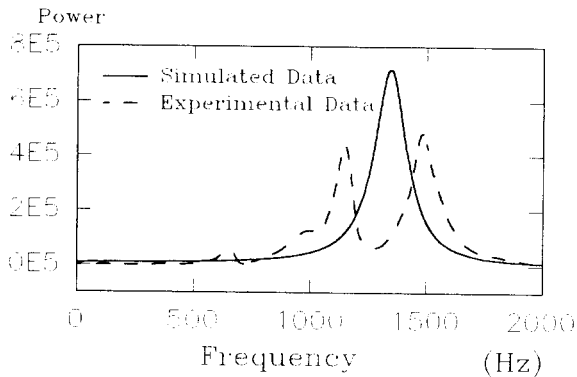


Fig.11 The FFT of a collet chuck.

그림에서 보는 것과 같이 콜릿척은 형상이 복잡하고 몇 개의 부품으로 이루어져 완전한 1자유도계의 특성은 나타나지 않고 있다. 그러나 콜릿척의 특성을 식 (5.3)과 같이 간단히 1자유도계로 모델링하여 보였다.

엔드밀의 모델링 결과인 식 (5.2)와 콜릿척의 모델링 결과인 식 (5.3)을 비교해보면 다음과 같다. 감쇠상수뿐만 아니라 스프링 상수도 콜릿척이 훨씬 크다. 단순히 채터를 무시하고 공구처짐량을 절삭력 100(N)에 대해 산술적으로 계산해보면 엔드밀은 18  $\mu\text{m}$ 이고, 콜릿척은 0.7  $\mu\text{m}$ 이다. 따라서 본 연구에서는 공구처짐은 대부분이 엔드밀에서 발생하는 것을 알 수 있다. 그러나 깊은 밀링가공에서는 콜릿척이 길어지므로 콜릿척의 처짐과 채터도 무시할 수 없다.

## 6. 결론

본 연구에서는 밀링가공에서 채터 해석과 공구의 처짐량을 예측하기 위하여 절삭시스템을 쉽게 모델링할 수 있는 새로운 방법을 개발하였다. 기존의 모델링하는 방법은 가진기를 이용하기 때문에 많은 실

험장비와 시간을 필요로 한다. 본 연구는 간단한 실험장비로 한 번의 데이터로 절삭시스템을 모델링할 수 있다. 가속도 신호와 충격력을 입력하면 1자유도 진동계의 질량, 감쇠상수, 스프링상수를 바로 구할 수 있는 방법이다.

End-Mill공구뿐만 아니라 1자유도계로 가정할 수 있는 각종 공구와 척의 파라미터를 쉽게 구할 수 있다. 이와 같은 방법으로 공구제작회사에서는 1자유도계의 특성을 나타내는 공구와 척의 시스템 파라미터를 공급할 수 있다. 따라서 본 연구의 결과를 이용하여 고속가공에서 공구처짐량을 예측하여 CAM가공에서 공구경로를 보정할 수 있고 또한, 절삭계의 파라미터로부터 밀링가공의 한계절삭깊이를 예측할 수 있다.

본 연구에서 개발한 시스템 모델링방법은 동작기계에 적용할 수 있을 뿐만 아니라 각종 구조물의 시스템 파라미터를 구하는데 유용하게 이용할 수 있다. 특히 정밀기계의 미세 구조물의 시스템 파라미터를 구하는데 유용하게 이용될 수 있을 것으로 기대한다.

## 7. 참고문헌

1. S. Smith, J. Tlustý, "Stabilizing Chatter by Automatic Spindle Speed Regulation", Ann. of CIRP, Vol.41, 1992.
2. J. Tlustý, "High Speed Machining", Ann. of CIRP, Vol.42, pp.733-738, 1993.
3. D. Montgomery, Y. Altintas, "Mechanism of Cutting Force and Surface Generation in Dynamic Milling", ASME J. of Eng. for Ind., vol.113, pp.160-168, 1991.
4. M. A. Elbestawi, F. Ismail and K. M. Yuen, "Surface Topography Characterization in Finish Milling", Int. J. Mach. Tools Manuf., Vol.34, No.2, pp.245-255, 1994.
5. 이신영, 김성걸, 이장무, "금형 가공기의 엔드밀 가공 및 구조 동특성 해석", 한국정밀공학회지, 제14권 제3호, 1997.
6. 백대균, 고태조, 김희술, "정면밀링가공에서 표면조도 모델 개발", 한국정밀공학회지 제12권 제12호, 1995.
7. S.M. Wu and S.M. Pandit, *Time Series and System Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, 1983.
8. Curtis F.G. and Patrick O.W., *Applied Numerical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.