

금속 성형 공정의 준정적 변형 예측을 위한 외연적 시간 적분 유한 요소법의 적용성 연구

유 요한*, 양 동열
(한국과학기술원 기계공학과)

1. 서론

소재의 손실을 최소화로 줄이면서 원하는 형상의 제품을 가공하는 가장 기본적인 금속 가공 방법은 금형을 이용하는 금속성형(metal forming)이다. 금속 성형 공정 해석에 많이 사용되는 유한요소해석 방법에는 내연적 시간 적분 방법(implicit time integration method)을 사용한 탄소성 해석(elastic-plastic analysis), 강소성 해석(rigid-plastic analysis) 방법 등이 주로 이용되어 왔다. 특히 강소성 유한 요소법[1]은 탄소성 유한 요소법에 비하여 변형 증분량을 크게 잡을 수 있어 계산 시간이 짧아지고 해의 수렴성이 좋다는 장점때문에 금속 성형 공정의 해석에 주로 많이 사용되어져 왔다.

외연적 시간 적분 유한 요소법(explicit time integration finite element method) [2]은 고속 충돌, 폭발 현상 등 재료의 고속 변형 거동을 해석하기 위하여 1970년대 이후 구미 각국에서 연구되어 왔다. 최근에는 자동차 충돌 해석[3], 고속 성형 공정 해석[4,5] 등에 효과적으로 적용되었으며 박판성형(sheet metal forming)[6-8]이나 체적물의 금속성형(bulk metal forming)[9] 시 준정적 거동(quasi-static response)의 예측에 적용하려는 연구가 이루어지고 있다.

본 논문에서는 준정적 금속 성형 문제 해석에 대한 외연적 시간 적분 유한 요소법의 적용성을 평가하기 위하여 변형모드가 복잡한 박판 튜브(thin-walled tube)의 좌굴문제를 해석하여 변형과정이 이론 및 실험결과와 비교적 잘 일치하는지 살펴보기로 한다. 또한 준정적 금속 성형 문제 해석에 외연적 시간 적분 유한 요소법을 사용할 때 계산 시간을 줄이기 위하여 많이 사용되는 가압속도 조절법(loadng velocity control technique)의 타당성을 평가하기 위하여 박판 튜브와 중실 실린더(solid cylinder)의 변형 속도에 따른 변형 모드의 변화를 비교 관찰하여 기하학적 형상에 따른 가압속도 조절법의 적용 가능 여부를 분석하여 보겠다.

2. 외연적 시간 적분 유한 요소법

외연적 시간 적분 유한 요소법[4,5]에서는 내연

적 시간 적분 유한 요소법과는 달리 전체 강성 행렬을 계산하지 않고 매시간 단계마다 요소 응력으로부터 각 절점의 절점력(nodal force)을 계산한 후 각 절점의 집중 질량에 대한 접촉 조건(contact condition)을 만족하는 가속도를 구하고 외연적 시간 적분을 통하여 다음 시간 단계의 각 절점에서의 속도와 변위를 직접 계산한다. 계산된 변위와 속도로 부터 각 요소들의 변형 구배(deformation gradient)와 속도 구배(velocity gradient)를 구하여 변형률 분포를 계산한 후 주어진 구성 방정식(constitutive equation)에 대입하여 각 요소에 대한 응력을 구하게 된다. 이렇게하여 한 시간 단계의 해석이 종결되면 각 요소의 응력 상태로 부터 각 절점의 내력(internal force)을 계산하여 외부에서 가해진 외력(external force)과의 차이로 부터 각 절점의 새로운 절점력을 계산할 수 있다. 이 절점력을 바탕으로 각 절점에 대한 가속도를 구하면 다시 외연적 시간 적분을 통하여 다음 시간 단계의 각 절점에서의 속도와 변위를 계산할 수 있다. 이와같은 계산을 원하는 시간까지 반복하여 수행하면 최종 해석 결과를 얻을 수 있게 된다.

본 논문에서 사용된 구성 방정식은 von Mises 항복조건과 등방경화(isotropic hardening)에 기초를 둔 탄소성 모델(elastic-plastic model)이며 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \right)^n \quad (1)$$

여기서 $\bar{\sigma}$ 는 등가 응력(equivalent stress), $\bar{\epsilon}$ 는 등가 소성변형률(equivalent plastic strain), σ_0 는 항복 응력(yield stress), ϵ_0 는 기준 변형률(reference strain), n 은 가공경화지수(hardening exponent)이며 ϵ_0 는 σ_0/E 로 취하였다. 이 때 E 는 영률(Young's modulus)이다.

3. 금속 성형 해석에 대한 적용성

3.1 준정적 문제에 대한 적용성

준정적 금속 성형 문제에 대한 외연적 시간 적

본 유한 요소법의 적용성을 평가하기 위하여 변형모드가 시편의 형상에 민감하게 의존하는 박판 튜브의 좌굴 문제를 해석하여 Kunogi의 이론 해석 결과 [10] 및 Biswas와 Travis등의 실험 결과[11]와 비교하여 보았다. 계산에 사용된 시편 크기는 Biswas와 Travis가 실험에 사용한 시편 크기와 동일하게 취하였으며 외경 D_o 는 12.7mm, 내경 D_i 는 8.7mm, 튜브 벽 두께 t 는 2mm이다. 한편 시편의 높이 H_o 는 외경에 대한 높이의 비가 1, 2, 3의 값을 가지도록 각각 12.7mm, 25.4mm, 38.1mm로 잡았다. 계산에 사용된 격자 구조는 외경에 대한 높이의 비가 1인 경우를 예로 나타내면 Fig. 1과 같다. 상부 금형은 일정한 속도로 내려오고 하부 금형은 일정한 위치에 고정시켜 계산을 수행하였으며 금형과 시편사이의 Coulomb 마찰계수 값은 0.05를 사용하였다. 해석 모델의 좌우는 대칭이지만 상하는 하중 가압속도의 차이 때문에 비대칭 거동을 보일수 있으므로 해석 모델의 우측 반만을 실제 계산에 사용하였다. 변형과정이 준정적이 되도록 상부 금형의 하강 속도는 세경우 모두 1m/sec.로 충분히 작게 선택하였다. 계산조건을 정리하여 Table 1의 case 1, case 2, case 3에 나타내었다. 한편 계산에 사용된 재료 상수값은 Table 2에 나타내었다. Kunogi의 해석 결과를 시편 외경에 대한 높이의 비가 1, 2, 3인 경우에 대하여 그림으로 정리하면 Fig. 2와 같다. 외경에 대한 높이의 비가 1, 2, 3의 값을 가질때 각각 1개, 2개, 3개 식의 배불림 형태(barreled profile)를 가지면서 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있다. Biswas와 Travis의 실험 결과를 나타낸 Fig. 3를 보면 외경에 대한 높이의 비가 1, 2인 경우 Kunogi의 해석 결과와 실험 결과가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 그러나 외경에 대한 높이의 비가 3인 경우 시편이 외경에 비해 너무 길어져서 측면 좌굴(lateral buckling)에 민감해지므로 Kunogi의 해석 결과와의 일치여부는 확인하기 어려웠다.

외연적 시간 적분 유한 요소법을 이용한 해석 결과를 정리하여 각 시편의 초기 높이에 대한 압하율이 50%가 될 때까지 계산된 변형 형상을 Fig. 4, Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. 외경에 대한 높이의 비가 1로 높이가 낮은 시편(Fig. 4)의 경우 배불림 형태가 이미 압하량 16.7%에서 생성되어 그 후 계속 성장되는데 반해 시편의 높이가 높아지면 배불림 형태가 갖추어지는 시기가 점차 늦어져서 외경에 대한 높이의 비가 2인 시편(Fig. 5)의 경우 압하량 16.7%에서 형태를 갖추기 시작하여 압하량 33.3%에서 뚜렷한 배불림 형태를 갖추게 되며 외경에 대한 높이의 비가 3인 시편(Fig. 6)의 경우 압하량 16.7%에서는 배불림 형태를 거의 갖추지 못하고 압하량 33.3%에서부터 배불림 형태를 갖추기 시작하여 압하량 50.0%에서 완벽한 형태를 갖추게 된다. 또한 모든 경우에서 가압 속도 차이 효과에

의한 시편 상부와 하부의 비대칭 변형 경향은 현저하게 발견되지 않았다. 각 경우의 최종 변형 형상은 배불림의 형상이나 갯수를 비교해 볼 때 해석 결과 및 실험 결과와 매우 잘 일치하며 이로부터 외연적 시간 적분 유한 요소법이 변형 모드가 비교적 복잡하고 민감한 박판 튜브의 준정적 변형 과정을 잘 묘사할 수 있다는 사실을 알 수 있다.

3. 2 준정적 문제 해석을 위한 가압속도 조절법의 타당성 검토

금속 성형 공정 해석시 일반적으로 계산시간을 줄이기 위하여 많이 사용되는 방법은 가압 속도 조절 방법이다. 그러나 가압 속도 조절 방법의 적용시 가장 큰 어려움은 속도 조절이 가능한 영역의 결정이 쉽지 않다는 점이다. 현재 사용되는 기준은 내부 변형 에너지에 대한 운동 에너지의 비율이 5% 이내가 되도록 하는 방법과 전체 해석 시스템의 최저 진동 주기를 구하여 전체 해석 시간이 최저 진동 주기의 10배 이상이 되도록 하는 방법[8] 등이다. 그러나 후자의 방법을 적용하기 위해서는 전체 해석 시스템의 모우드 해석을 수행하여 최저 진동 주기를 미리 구해야 한다는 단점이 있다.

본 논문에서는 가압 속도 조절법의 적용성을 평가하기 위하여 시편의 기하학적 구속 정도가 다른 박판 튜브 시편과 중실 실린더 시편에 대하여 변형 속도를 변화시켜가며 해석을 수행한 후 변형된 형상 및 내부 변형 에너지에 대한 운동 에너지의 비율 등에 대한 검토를 토대로 가압 속도 조절법의 타당성을 검토하기로 한다.

기하학적 구속 정도가 작은 시편의 경우, 가압 속도 조절이 최종 해석 결과에 미치는 효과를 살펴보기 위하여 외경에 대한 높이의 비가 3인 박판 튜브 시편의 상부금형의 하강 속도를 10m/sec. 로 하여 계산을 수행하였다. 계산조건은 Table 1의 case 4에 나타내었다. 모든 계산 조건은 case 3과 같고 상부금형의 하강 속도만 10배 증가시켰다. 해석 결과를 정리하여 시편의 압하율이 50%가 될 때까지 계산된 변형 형상을 Fig. 7에 나타내었다. 준정적 해석(Table 1의 case 3) 결과를 살펴보면 압하량 16.7%일때 거의 배불림 형태없이 균일한 변형 모드를 보이거나 상부금형의 하강 속도를 10배 증가시키면 압하량 16.7%에서 뚜렷한 배불림 형태가 시편의 아래와 위 끝단 부근에서 대칭적으로 발생된다. 변형이 진행되어 압하량이 33.3%에 이르면 준정적 해석인 경우 3개의 배불림 형태가 발생되나 위 금형의 하강속도를 10배 증가시킨 경우 앞서 생성된 끝단 부근의 2개의 배불림 형태가 성장을 계속하여 배불림의 갯수 및 형태에서 큰 차이를 보인다. 특히 아래쪽 좌굴부위의 변형 속도보다 윗쪽 좌굴부위의

변형 속도가 빠른것을 발견할 수 있으며 결과적으로 가압 속도 차이 효과에 의한 시편의 상부와 하부의 비대칭 변형 경향이 현저한 것을 알 수 있다. 압하량 42% 일 때 윗쪽 좌굴 부위의 변형이 심화되어 시편의 상부와 하부의 비대칭 변형 경향이 극대화되는 것을 볼 수 있다. 이후 윗쪽 좌굴 부위의 곡률 증가에 따른 강성의 증가 때문에 윗쪽 좌굴 부위에는 더 이상 변형이 진행되지 않고 아래쪽 좌굴 부위 부근에 변형이 집중되어 압하량 50%일 때의 전체 변형 형상은 Fig. 7의 (d)와 같이 얻어진다. 변형 속도가 다른 두 시편의 최종 변형 형상 Fig. 6의 (c)와 Fig. 7의 (d)를 비교해 보면 두 경우의 변형 양상이 크게 다른 것을 알 수 있다. 배볼림의 형상 및 갯수가 다르며 시편의 상부와 하부의 대칭성에도 차이가 난다. 이상의 사실로부터 박판 튜브와 같이 시편의 기하학적 구속 조건이 상대적으로 작은 문제의 경우 가압 속도 차이에 따른 변형 모드의 변화가 심하므로 가압 속도 조절법에 의하여 변형재료의 준정적 거동을 예측하려고 시도하는 경우 세심한 검토가 요구된다는 것을 알 수 있다.

기하학적 구속 정도가 큰 시편의 경우, 가압 속도 조절이 최종 해석 결과에 미치는 효과를 살펴보기 위하여 외경에 대한 높이의 비가 3인 중실 실린더 시편을 상부 급형 하강 속도를 10m/sec.로 하여 계산을 수행하였다. 계산 조건은 Table 1의 case 5에 나타내었다. 모든 계산조건은 case 4와 같고 시편의 형상만 박판 튜브에서 중실 실린더로 변경하였다. 해석 결과를 정리하여 시편의 압하율이 50%가 될 때까지 계산된 변형 형상과 등가 소성 변형률의 분포를 Fig. 8에 나타내었다. 압하율 16.7%일 때 (Fig. 8의 (a)) 시편의 끝단 부근에서 마찰효과에 의한 영향으로 변형률이 큰 것을 제외하면 대체로 균일한 변형이 진행되고 있는 것을 알 수 있다. 압하율이 증가하여도 같은 경향을 보이며 최종적으로 압하율 50%가 되면 0.8 정도의 균일한 등가 소성 변형률 값을 가진다. 이때 전 변형과정을 걸쳐 모든 등가 소성 변형률 값의 분포가 상하 대칭으로 나타나므로 시편 상부와 하부의 하중 가압 속도의 차이에 의한 영향은 거의 없는 것으로 보인다. 그러나 압하율 16.7%일 때 시편의 중앙부에서 등가 소성 변형률값이 0.2인 등곡선의 형태는 약간 다르며 이것은 초기에 가압 속도의 영향이 다소 존재한다는 것을 암시하지만 최종 변형 양상에는 거의 영향을 미치지 못한다.

기하학적 구속 정도가 큰 시편의 경우, 가압 속도 증가가 최종 해석 결과에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 외경에 대한 높이의 비가 3인 중실 실린더 시편을 상부 급형 하강 속도를 20m/sec.로부터 100m/sec.까지 변화시켜 계산을 수행하였다. 계산조건은 Table 1의 case 6부터 case 9에 나타내었다. 가압 속도를 20m/sec.로 증가시키면 압

하율 33.3%까지 하중의 가압 속도 차이에 의한 비대칭 변형 경향을 다소 보이지만 압하율 50%에 이르면 거의 대칭 변형 경향을 보여준다. 즉, 가압 속도 조절에 의하여 시편의 최종적인 준 정적 거동을 예측할 수 있다. 그러나 Fig. 8의 (c)와 Fig. 9의 (c)를 비교하면 변형된 격자 모양은 차이가 없으나 등가 소성 변형률의 분포는 약간 차이를 보이고 있다. 가압 속도를 50m/sec.로 증가시킨 해석 결과 (Fig. 10)을 살펴보면 전 변형과정에 걸쳐 변형된 격자 모양과 등가 소성 변형률의 분포가 상하 대칭인 것을 알 수 있다. 그러나 등가 소성 변형률의 분포 양상은 가압 속도가 10m/sec. (Fig. 8), 20m/sec. (Fig. 9)일 때와 다르다는 것을 알 수 있다. 즉 변형된 시편의 외곽 형태는 비슷하지만 국부적인 분포는 달라 가압 속도 조절에 의하여 시편의 최종적인 준 정적 거동을 예측하는 것이 다소 무리가 있다는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 가압 속도를 100m/sec.로 증가시킨 해석 결과 (Fig. 11)을 살펴보면 더욱 확실히 알 수 있다. Fig. 11의 (a)를 보면 시편의 상하 부위가 대칭적으로 변형되지 않고 상부에서 하부로 변형이 전파되고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 상부와 하부 사이의 가압 속도 차이가 크기 때문에 생긴 관성 효과(inertia effect)에 기인한다. 시편의 상부에서 전파되어온 변형파는 급형 하부에서 반사되어 다시 위로 전파되며 (Fig. 11의 (b)) 압하율 50%에서 Fig. 11의 (c)와 같은 결과를 얻는다. 이 경우 변형된 시편의 외곽 형태는 준 정적 해석 결과와 유사하지만 등가 소성 변형률 분포는 완전히 상하 비대칭으로 준 정적 해석 결과와 전혀 달라 가압 속도 조절에 의하여 시편의 준 정적 거동을 예측하는 것이 불가능하다는 것을 알 수 있다. 기하학적 구속 조건이 큰 경우 20m/sec. 정도까지는 가압 속도 조절에 의하여 준 정적 거동 예측이 가능하다는 것을 알 수 있다. 또한 50m/sec.는 Table 2에서 제시된 재료 상수 값으로부터 구한 재료의 탄성과 속도 (elastic wave velocity) 5.2km/sec.의 약 1%에 해당되고 20m/sec.는 약 0.4%에 해당되므로 기하학적 구속 조건이 큰 경우 해당 재료 탄성과 속도의 0.4% 정도까지 가압 속도 조절의 통하여 준 정적 거동을 예측할 수 있고 1% 정도 까지도 가압 속도 조절을 통하여 근사적으로 준 정적 거동을 예측할 수 있다고 판단된다. 또한 대부분의 금속 성형 공정은 밀폐된 금형 안에서 가압 성형되어 기하학적 구속 조건이 매우 큰 경우에 해당되므로 탄성과 속도의 1%까지 가압 속도를 조절하여도 큰 무리없이 준 정적 거동을 효율적으로 예측할 수 있을 것으로 생각된다.

Fig. 12는 Table 1의 case 4, case 5, case 6의 계산을 정리하여 압하율에 따른 내부 변형 에너지 (internal deformation energy)에 대한 운동에너지 (kinetic energy)의 비율을 도시한 것이다. case 4(박판 튜브, 10m/sec.)의 경우, 초기에는 내부 변형 에너지에 대한 운동에너지 비율이 100% 정도이나 그 후 서서히 감소하여 압하율 25% 정

도에서는 10% 이하의 값을 가진다. 그러나 압하율 42%의 변형진행후 뒷쪽 좌굴부위의 변형 성장에 의하여 발생된 소성 힌지(plastic hinge)때문에 내부 변형 에너지에 대한 운동에너지의 비율이 급격히 증가하는 시점이 있다. 이와 같은 내부 변형 에너지에 대한 운동에너지 비율의 급격한 증가 현상은 가압 속도 조절시 좌굴 등의 국소 변형(local deformation)에 의하여 전혀 다른 준정적 거동을 나타낼 때 동반되는 현상으로 가압 속도 조절이 잘못되었다는 단서를 제공한다. case 5(중공 실린더, 10m/sec.)의 경우 case 4보다 약간 낮은 값을 가지며 규칙적으로 내부 변형 에너지에 대한 운동에너지의 비율이 감소하여 최종적으로 압하율 50%에서는 5% 정도의 값을 가진다. case 6(중공 실린더, 20m/sec.)의 경우도 case 5보다 3배 내지 4배 정도 큰 값을 가지지만 규칙적으로 서서히 내부 변형 에너지에 대한 운동 에너지의 비율이 감소하여 최종적으로 압하율 50%에서는 20% 정도의 값을 가지게 된다. Fig. 14 에서 알수 있는 것은 내부 변형에너지에 대한 운동에너지의 비율이 준정적 거동을 예측할 수 있는 가압 속도 조절의 범위를 결정하는 절대적인 기준이 될 수 없다는 것이다. case 4의 경우 최종상태에서 내부 변형에너지에 대한 운동에너지의 비율이 10% 미만이었지만 준정적 변형 거동을 정확히 예측하지 못하였으나 case 6의 경우 내부 변형에너지에 대한 운동에너지의 비율이 20% 이상이었지만 준정적 변형 거동을 정확히 예측하였다는 것이다.

4. 결론

준 정적 금속 성형 해석 문제에 대한 외연적 시간 적분 유한 요소법의 적용성을 평가하기 위하여 변형 모드가 복잡한 박판 튜브의 좌굴 문제를 해석한 결과 최종 변형 형상에서 배플림의 형상이나 갯수를 비교해 볼 때 이론적 해석 결과 및 실험 결과와 매우 잘 일치하며 결과적으로 외연적 시간 적분 유한 요소법이 변형모드가 비교적 복잡하고 민감한 박판 튜브의 준 정적 변형 과정을 잘 묘사할 수 있다는 사실을 보였다. 또한 준 정적 금속 성형 문제 해석에 외연적 시간 적분 유한 요소법을 적용할 때 계산 시간을 줄이기 위하여 많이 사용되는 가압속도 조절법의 타당성을 평가하기 위하여 박판 튜브와 중공 실린더의 상부 가압 속도를 다르게 변화시켜 가며 해석을 수행하여 변형 속도에 따른 변형 모드의 변화를 비교 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다. 금속 성형 공정의 준 정적 해석을 가압 속도 조절법을 이용하여 수행하는 경우 시편의 기하학적 구속 정도에 따라 가압 속도 조절법을 이용해서 얻어진 변형결과와 준정적 변형 거동이 같아지는 내부 변형 에너지에 대한 운동에너지의 비율이 달라지므로 일률적인 기준을 정하는 것은 바

람직하지 않고 기하학적 구속 정도에 따라 기준을 변화시켜 주는 것이 계산 시간 단축과 해석 정확도 향상이라는 두가지 측면을 고려해 볼때 효과적이다. 즉 기하학적 구속이 작은 경우 내부 변형에너지에 대한 운동에너지의 비율이 낮아지도록 가압속도를 낮게 조절하고 기하학적 구속이 큰 경우 비율이 높아지도록 가압 속도를 높게 조절하는 것이 좋다.

5. 참고 문헌

- [1] S. Kobayashi, S. I. Oh and T. Altan, "Metal forming and the finite element method", Oxford University Press, New York, 1989.
- [2] D. J. Benson, "Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 99, pp. 235-394, 1992.
- [3] Z. H. Zhong, "Finite element Procedures for contact - impact problems", Oxford University Press, p. 316, 1993.
- [4] 유요한, 정동택, "엑스플리시트 시간 적분 유한 요소법을 이용한 고속 성형 해석(1)", 대한기계학회 논문집, 제 15권, 제1호, pp. 1-10, 1991.
- [5] 유요한, 정동택, "엑스플리시트 시간 적분 유한 요소법을 이용한 고속 성형 해석(2)", 대한기계학회 논문집, 제 15권, 제5호, pp. 1552-1562, 1991.
- [6] A. Honecker and K. Mattiasson, "Finite element procedures for 3D sheet forming simulation", in Proc. NUMIFORM '89 ed. E.G. Thompson et. al. , Fort Collins, Balkema, pp. 457-463, 1989.
- [7] K. Mattiasson et. al. , "Evaluation of a dynamic approach using explicit integration in 3D sheet forming simulation", in Proc. NUMIFORM '92 ed. Chenot et. al. , Rotterdam, Balkema, pp. 55-67, 1992.
- [8] A. M. Prior, "Applications of implicit and explicit finite element techniques to metal forming", J. Mater. Process Technol. , Vol. 45, pp. 649-656, 1994.
- [9] H. Bauer, "FE-Simulation of the production-process of builded camshafts", in Proc. NUMIFORM '92 ed. Chenot et. al. , Rotterdam, Balkema, pp. 592-600, 1992.
- [10] M. Kunogi, Rep. Sci. Res. Inst. (Tokyo), 30, 2, pp. 63-92, 1954.
- [11] S. Biswas and F. W. Travis, "Deformation Patterns of annular rings of varying geometry subject to static and dynamic axial compression", Int. J. Mach. Tool Des. Res. Vol. 11, pp. 235-249, 1971.

Table 1. Conditions of computation

Computation case no.	Diameter D_0 (mm)	Height H_0 (mm)	H_0/D_0	Type of specimen	Die velocity V (m/sec)	Friction coefficient
1	12.7	12.7	1	Tube	1.0	0.05
2	12.7	25.4	2	Tube	1.0	0.05
3	12.7	38.1	3	Tube	1.0	0.05
4	12.7	38.1	3	Tube	10.0	0.05
5	12.7	38.1	3	Solid	10.0	0.05
6	12.7	38.1	3	Solid	20.0	0.05
7	12.7	38.1	3	Solid	50.0	0.05
8	12.7	38.1	3	Solid	100.0	0.05

Table 2. Material coefficients for computation

Material model	Material coefficients	
Elastic-plastic material model	Yield stress	$\sigma_0 = 1.03$ (GPa)
	Reference strain	$\epsilon_0 = 0.0049$
	Strain hardening exponent	$n = 0.005$
	Young's modulus	$E = 210.3$ (GPa)
	Poisson's ratio	$\nu = 0.29$
	Density	$\rho = 7.8$ (g/cm ³)

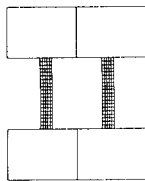


Fig. 1. Undeformed mesh for case 1

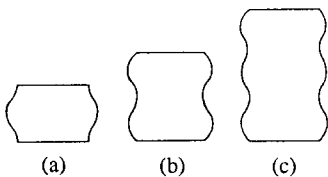


Fig. 2. Profiles of the buckled thin-walled tubes, after Kunogi [10]
 (a) $H_0/D_0 = 1$, (b) $H_0/D_0 = 2$, (c) $H_0/D_0 = 3$

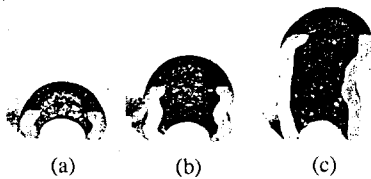


Fig. 3. Experimental results of the buckled thin-walled tubes, after Biswas Traves [11]
 (a) $H_0/D_0 = 1$, (b) $H_0/D_0 = 2$, (c) $H_0/D_0 = 3$

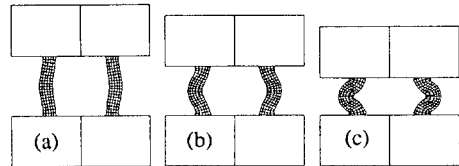


Fig. 4. Deformed mesh of case 1

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

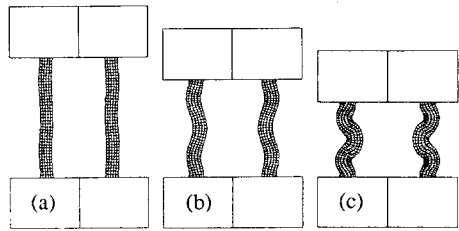


Fig. 5. Deformed mesh of case 2

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

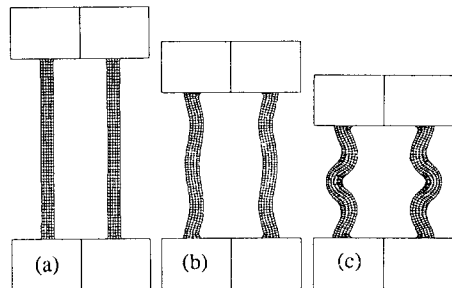


Fig. 6. Deformed mesh of case 3

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

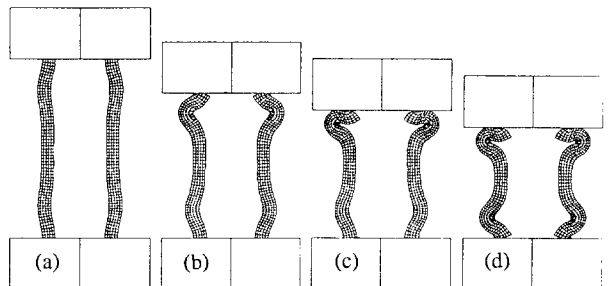


Fig. 7. Deformed mesh of case 4

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 42.0 %
- (d) At the height reduction of 50.0 %

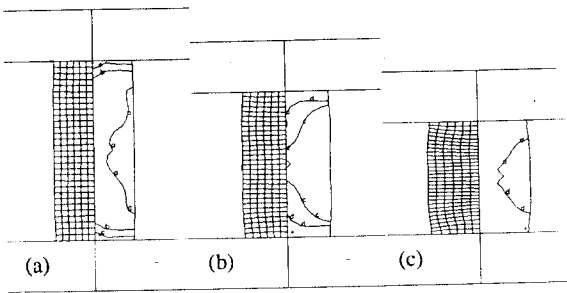


Fig. 8. Deformed mesh and equivalent plastic strain distribution of case 5 (contour level : $a=0.2$, $b=0.4$, $c=0.6$, $d=0.8$)

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

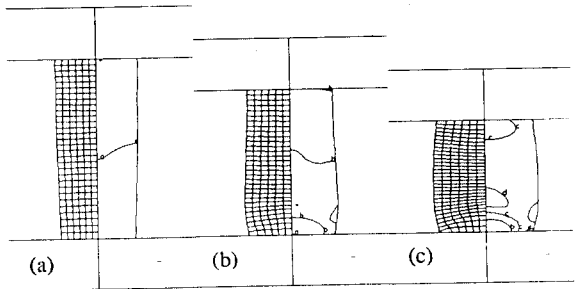


Fig. 11. Deformed mesh and equivalent plastic strain distribution of case 8 (contour level : $a=0.2$, $b=0.4$, $c=0.6$, $d=0.8$)

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

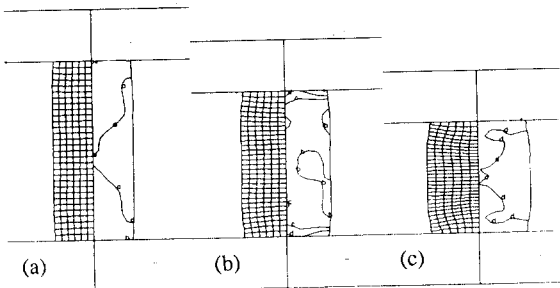


Fig. 9. Deformed mesh and equivalent plastic strain distribution of case 6 (contour level : $a=0.2$, $b=0.4$, $c=0.6$, $d=0.8$)

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %

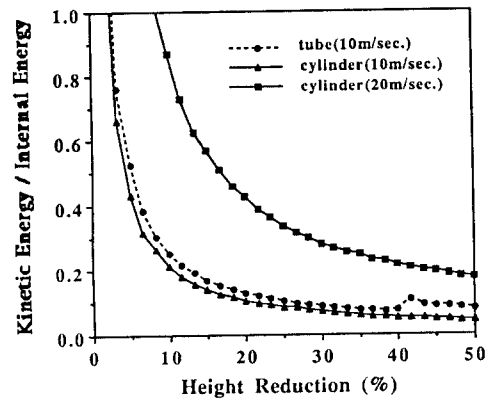


Fig. 12. Energy ratio plot of case 4, case 5 and case 6.

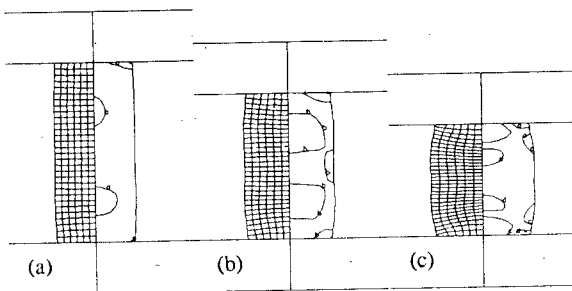


Fig. 10. Deformed mesh and equivalent plastic strain distribution of case 7 (contour level : $a=0.2$, $b=0.4$, $c=0.6$, $d=0.8$)

- (a) At the height reduction of 16.7 %
- (b) At the height reduction of 33.3 %
- (c) At the height reduction of 50.0 %