

Hamrock & Dowson의 타원접촉 EHL 유막두께식에 대한 고찰

박 태 조 (경상대학교)

1. 서 론

볼이나 로울러 베어링과 같은 구름베어링(Rolling bearing), 각종 기어(Gear) 및 캠(Cam) 기구 등과 같은 집중하중을 받는 기계요소에서의 윤활영역을 탄성유체 윤활(Elastohydrodynamic lubrication : EHL)이라고 부른다. EHL이 실질적으로 중요한 이유는 이와 같은 기계요소가 장시간 성공적으로 운전하기 위해서 필수적으로 필요한 최소유막의 크기를 결정하는 것이다[1-3]. 1886년, 레이놀즈에 의하여 유체윤활의 기본방정식이 확립된 이후에 기어의 윤활기구에 대한 관심이 집중되었다. 초기에는 경계윤활상태로 운전되는 것으로 추정하였지만 상당한 시간이 경과한 이후에도 기어잇면의 기계가공자국이 그대로 남아 있고 상당한 정도의 마멸이 없다는 사실에서 기어잇면이 유막으로 서로 분리되어 있을 것이라는 생각을 갖게 되었다. 그러나, 20세기 중반에 이르기까지 많은 연구자들의 집중적인 노력에도 불구하고 이에 대한 만족할 만한 결과가 제시되지 못하였다. 기어가 윤활유의 유체동력학적인 작용에 의하여 유막으로 분리되어 있다는 사실은 1950년대에 이르러 실험적으로 겨우 확인되었지만, 이 결과는 기어에서 직접 측정된 것이 아니라 Disk machine를 이용하여 간접적으로 추정된 결과였다. 기어와 같이 집중하중을 받는 기계요소에서는 아주 좁은 면적을 통하여 하중이 전달되므로 여기에서 유막두께를 직접 측정하는 것이 거의 불가능하기 때문이다. 따라서, 다양한 조건에 대한 EHL 상태하에서의 유막크기를 쉽게 예측하기 위해서는 이론해석에 의존할 수 밖에 없는 실정이다.

한편, EHL이 일반적인 유체윤활과는 다른 점은 유막내에서 발생하는 아주 높은 유체압력에 의하여 윤활면이 탄성변형됨과 아울러 윤활유의 점도가 급격히 증가하는 것이다. 따라서, EHL 문제의 이론해석을 위해서는 유체윤활의 지배방정식인 레이놀즈 방정식 뿐만 아니라 발생압력에 의한 윤활면의 탄성변형과 윤활유의

점도변화까지 동시에 고려해야 된다. 그러나, 지배방정식 자체의 강한 비선형성으로 인하여, 1959년, Dowson & Higginson[4]이 역방법(Inverse method)이라는 새로운 해석방법으로 선접촉(Line contact) 문제를 해석하기 이전에는 이에 대한 완전한 해가 구해지지 않았다. 이들의 성공적인 연구수행 이후에, EHL에 대한 집중적인 연구가 현재까지 계속되고 있으며 그 결과로 제시된 유막두께식은 수치해석을 직접 수행하지 않고서도 집중하중을 받는 기계요소에서의 유막크기를 쉽게 추정할 수 있으므로 베어링의 설계 등에 널리 이용되고 있다[5]. 특히, Hamrock & Dowson[6] (이하 H-D라고 표기함)은 볼 베어링과 일반형태의 기어에서 주로 발생하는 타원접촉(Elliptical contact) 문제를 반복법으로 수치해석하였으며, 해석결과인 유막두께자료를 사용하여 타원접촉문제에 대한 유막두께식을 제시하였다. 한편, Park & Kim[7]은 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 동일한 문제의 해석에 처음으로 적용하였으며 해석결과가 H-D의 결과에 비하여 물리적으로 타당할 뿐 아니라 정확함을 밝혔다. 또한, 이들은 동일한 수치해석방법을 사용하여 프로파일링을 한 원통형 로울러 등에서 발생하는 유한한 길이의 선접촉문제를 성공적으로 해석하였다. Chittenden 등[8]은 H-D와 동일한 수치해석방법을 사용하고 그들의 결과를 그대로 추가하여 보다 일반적인 조건의 타원접촉문제에 대한 새로운 유막두께식을 제안하였다. 그러나, H-D와 Chittenden 등의 이러한 유막두께식은 실험결과와 상당한 차이를 보이고 있다[9]. 이는 수치해석과 실험조건이 서로 다른 것에 크게 기인하겠지만 수치해석의 정확성에도 일부 원인이 있을 것으로 추정할 수 있다. 그러므로, 타원접촉 EHL 상태하의 유막두께를 정확하게 예측할 수 있는 새로운 유막두께식이 요구된다.

본 논문에서는 해석결과가 보다 정확한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 타원접촉 EHL 문제를

수치해석하고 H-D의 수치해석결과 및 그들의 유막두께 식과 비교하고자 한다. 또한, 본 논문의 결과는 타원접촉 EHL 문제에 적용할 수 있는 보다 정확하고 일반적인 유막두께식을 구하기 위한 기초자료로 사용하고자 한다.

2. 지배방정식

Fig.1과 같이 윤활유가 Hertz 접촉타원의 단축방향으로 유입하는 경우에 유막내의 압력을 지배하는 레이놀즈 방정식은 다음식과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12u \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} h) \quad (1)$$

여기서, u 는 구름방향으로의 평균속도이다.

한편, EHL 상태에서는 압력에 따라서 윤활유의 점도가 급격히 변화할 뿐 아니라 밀도도 변화하므로 이를 모두 고려해야 된다. 점도와 밀도에 대한 압력의 관계를 수식으로 표현하면 각각 다음의 식(2), 식(3)과 같다.

$$\bar{\eta} = \eta_o \exp \left[\left\{ \ln(\eta_o) + 9.67 \right\} \left\{ -1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^2 \right\} \right] \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \rho_o \left[1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서, p 와 η_o 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이며 Z 는 윤활유에 대한 Roelands의 계수이다.

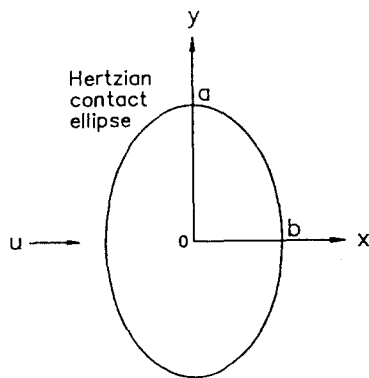


Fig.1 Contact ellipse and coordinate system.

EHL 상태에서의 유막은 다음식과 같이 정의할 수 있다[8].

$$h(x, y) = h_o + h_g(x, y) + h_d(x, y) \quad (4)$$

여기서, h_o 는 상수이고, h_g 는 변형되지 않은 상태에서 윤활면의 기하학적 형상에 의한 유막이며 h_d 는 발생압력에 의하여 탄성변형되는 량이다.

유막내에서 발생하는 유체압력의 합은 지지하중과 동일하므로 다음식과 같이 나타내어진다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (5)$$

3. 무차원화

지배방정식을 무차원화하는 것이 수치해석을 간편하게 하고 결과정리를 효율적으로 할 수 있으므로 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} X &= x/b, & Y &= y/a, & H &= h/R_x, & P &= p/E \\ \rho &= \bar{\rho}/\rho_o, & \eta &= \bar{\eta}/\eta_o, & U &= \eta_o u / ER_x, & k &= a/b \\ W &= w/ER_x^2 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, E 는 베어링면의 유효탄성계수로서 단위는 [GPa]이며, k 는 Hertz 접촉타원의 타원비로 타원체의 주목물반경 R_x, R_y 와 다음식과 같은 관계가 있다[6].

$$k = 1.03 \left(\frac{R_x}{R_y} \right)^{0.64} \quad (7)$$

따라서, 식(1)-식(5)의 무차원형태는 각각 다음의 식(8)-식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) \\ = 12U \frac{b}{R_x} \frac{\partial}{\partial X} (\rho H) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\eta = \exp \left[\left\{ \ln(\eta_o) + 9.67 \right\} \left\{ -1 + (1 + 5.1EP)^2 \right\} \right] \quad (9)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (10)$$

$$H(X, Y) = H_o + H_x(X, Y) + H_d(X, Y) \quad (11)$$

$$W = \frac{kb^2}{R_x^2} \int \int P dX dY \quad (12)$$

한편, 윤활유의 구름방향 출구측에서 적용되는 레이놀즈 경계조건식의 무차원화된 형태는 다음식과 같다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (13)$$

4. 수치해석

EHL 상태에서의 레이놀즈 방정식은 비선형성이 아주 강하기 때문에 수치해석이 쉽지 않다. 특히, 타원점촉문제와 같은 3차원 문제에서는 윤활유의 측면유출(Side leakage)도 고려해야 되므로 해석방법의 사용에 많은 제한이 뒤따르게 되어 지금까지 4가지 정도의 수치해석방법이 적용되었을 뿐이다[10]. 본 논문에서는 수치해석과정이 체계적이고 해석결과가 정확한 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 지배방정식을 수치해석하고 그 결과를 H·D의 결과와 비교하고자 한다.

불균일한 격자제에 대한 식(8)의 유한차분형태는 다음식과 같다

$$f_{i,j} = \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) + \frac{(\Delta X_{i-1} + \Delta X_i)}{k^2 (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) \right.$$

$$\left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \right\}$$

$$- 12U \frac{b}{R_x} (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j})$$

$$= 0 \quad (14)$$

$$(i=2, \dots, M_j, \quad j=2, \dots, N-1)$$

윗식은 비선형성이 아주 강하여 수치해석시에 수렴에 도달하기가 아주 어렵기 때문에 이를 효과적으로 해석하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음식과 같이 나타내어진다.

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} \right)^n (P_{k,l}^{n+1} - P_{k,l}^n) + \left(\frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_o} \right)^n (H_o^{n+1} - H_o^n) + f_{i,j}^n = 0 \quad (15)$$

$$(i, k = 2, \dots, M_j, \quad j, l = 2, \dots, N-1)$$

한편, 식(12)는 다음식으로 표현된다.

$$W = \sum_{i=1}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{i,j} \Delta A_{i,j} \quad (16)$$

여기서,

$$\Delta A_{i,j} = \frac{kb^2}{4R_x^2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (17)$$

식(15)와 식(16)에서 미지수의 수와 식의 수가 같으므로 쉽게 풀 수 있다. 따라서, 식(15)와 식(16)을 행렬식으로 표현하면 다음식과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{2,2}}{\partial P_{2,2}} & \frac{\partial f_{2,2}}{\partial P_{2,3}} & \dots & \frac{\partial f_{2,2}}{\partial P_{M,N-1}} & \frac{\partial f_{2,2}}{\partial H_o} \\ \frac{\partial f_{2,3}}{\partial P_{2,2}} & \frac{\partial f_{2,3}}{\partial P_{2,3}} & \dots & \frac{\partial f_{2,3}}{\partial P_{M,N-1}} & \frac{\partial f_{2,3}}{\partial H_o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{M,N-1}}{\partial P_{2,2}} & \frac{\partial f_{M,N-1}}{\partial P_{2,3}} & \dots & \frac{\partial f_{M,N-1}}{\partial P_{M,N-1}} & \frac{\partial f_{M,N-1}}{\partial H_o} \\ \Delta A_{2,2} & \Delta A_{2,3} & \dots & \Delta A_{M,N-1} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} P_{2,2} \\ P_{2,3} \\ \vdots \\ P_{M,N-1} \\ H_o \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} g_{2,2} \\ g_{2,3} \\ \vdots \\ g_{M,N-1} \\ W \end{bmatrix}^n \quad (18)$$

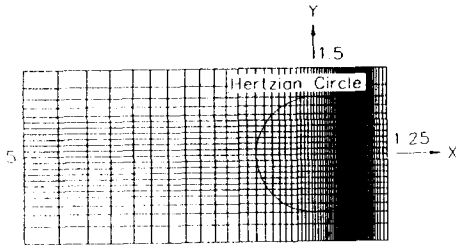


Fig.2 An example of grid structure used.

여기서,

$$g_{i,j} = \sum_k \sum_l \frac{\partial f_{i,j}}{\partial P_{k,l}} P_{k,l} + \frac{\partial f_{i,j}}{\partial H_0} H_0 - f_{i,j} \quad (19)$$

수치계산은 다음식으로 정의되는 계산오차 Er 이 10^{-5} 이하에 도달할때 까지 식(19)를 반복계산한다.

$$Er = \frac{\sum \sum |P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n|}{\sum \sum P_{i,j}^{n+1}} \quad (20)$$

Fig.2는 수치계산시에 사용한 격자계의 한 예를 나타낸 것으로서 접촉중양부에서는 윤활유 충분조건(Flooded condition)이 되도록 하기 위하여 계산영역의 경계는 가능하면 넓게 잡았다. 보다 상세한 수치해석방법과 과정은 참고문헌[10]에 제시되어 있다.

5. 결과 및 고찰

본 논문에서는 사용재료에 관련된 무차원변수의 값을 $G=4522$ 로 고정하고 Hertz 접촉타원의 타원비 k , 무차원 속도변수 U 및 무차원 하중 W 를 변화시켜 EHL 상태에서의 압력분포와 유막두께를 수치해석으로 구하였다.

Fig.3과 Fig.4는 $k=1$, $U=1.8 \times 10^{-12}$, $W=2 \times 10^{-7}$ 인 경우의 유막내에서 발생하는 압력의 등압선과 유막의 등고선을 각각 나타낸 것으로서 그림에서 + 기호는 윤활을 고려하지 않은 상태에 대한 Hertz 접촉원의 중심을 나타낸다. Fig.3과 Fig.4의 구름방향 출구측에는 EHL에서의 대표적인 특징들인 압력 Spike와 유막수축(Fluid film constriction)이 발생함을 각각 보여주고 있다. 특히, Fig.4에는 타원접촉 EHL에서의 가장 특징적인 현상인 말발굽모양의 유막형상이 아주 뚜렷하며 두개의 Side lobe도 발생하고 있다. 이와같은 유막형상으로 인하여

타원접촉의 기계요소가 아주 큰 하중을 지지하면서도 경계윤활이 아닌 유체윤활상태로 운전될 수 있는 것이다.

다음의 결과는 본 논문의 수치해석방법으로 구한 유막두께를 H-D가 사용한 수치해석방법으로 구한 유막두께와 이들이 제시한 유막두께식과 비교하여 나타낸 것이다. Fig.5는 타원비 k , Fig.6은 무차원 속도변수 U , Fig.7은 무차원 하중 W 의 변화에 대한 유막내의 최소유막두께 H_m 및 Hertz 접촉타원의 중심에서의 유막두께 H_c 의 변화를 각각 나타낸 것이다. H-D는 그림에 작은 원으로 나타낸 유막두께자료를 사용하여 다음의 식(21) 및 식(22)으로 표현되는 타원접촉의 EHL에서의 유막두께식을 발표하였다[6].

$$H_m = 3.63 U^{0.68} G^{0.49} W^{-0.073} (1 - e^{-0.68k}) \quad (21)$$

$$H_c = 2.69 U^{0.67} G^{0.53} W^{-0.067} (1 - 0.61e^{-0.73k}) \quad (22)$$

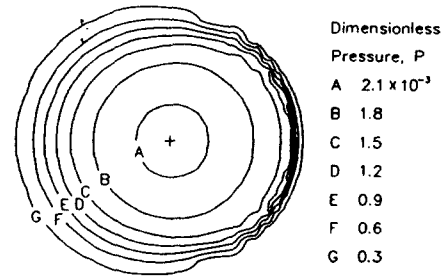


Fig.3 Contour plots of dimensionless pressure. $k=1$, $U=1.8 \times 10^{-12}$, $W=2 \times 10^{-7}$, $G=4522$

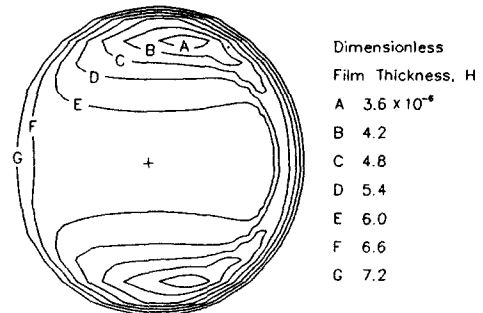


Fig.4 Contour plots of dimensionless film thickness. $k=1$, $U=1.8 \times 10^{-12}$, $W=2 \times 10^{-7}$, $G=4522$

한편, Chittenden 등[8]은 윤활유가 접촉타원에 임의방향으로 유입하는 경우에도 적용할 수 있는 보다 일반적인 조건에도 적용할 수 있는 새로운 유막두께식을 발표하였다.

이상의 그림에서, 본 논문에서 구한 유막의 크기는 단순하게 직선적으로 연결한 것이지만 H-D의 결과에 비하여 유막에 대한 자료의 편차가 상대적으로 아주 작으며, 특히, 무차원 하중에 대한 수렴범위는 훨씬 크다는 것을 알 수 있다. 특히, 본 논문에서의 수치해석결과는 H_m 과 H_c 모두에서 H-D의 유막두께식과 약간씩의 차이를 보이며 특히, 하중변화에 대한 H_c 의 차이는 상당히 크게 나타나고 있다. 참고문헌[10]에는 본 논문의 방법으로 구한 해석결과가 H-D가 제시한 유막형상에 비하여 물리적으로 타당하다는 것은 밝혀져 있다. 또한, H-D는 수치계산시의 경계와 격자의 수를 고정시킴에 따라서 유막의 차이가 발생하지만 본 논문에서는 이러한 영향이 발생하지 않도록 하였다. Chittenden 등의 유막두께식도 H-D의 유막두께자료와 수치해석방법을 그대로 사용하였기 때문에 결과식의 정확성이 떨어질 수 밖에 없는 실정이다. 따라서, 본 논문에서 구한 정확한 수치해석결과를 사용하면 H-D나 Chittenden 등의 유막두께식에 비하여 실험결과에 보다 잘 일치하는 정확한 유막두께식을 구할 수 있을 것으로 생각되며 이를 위해서는 추가적인 연구가 요구된다.

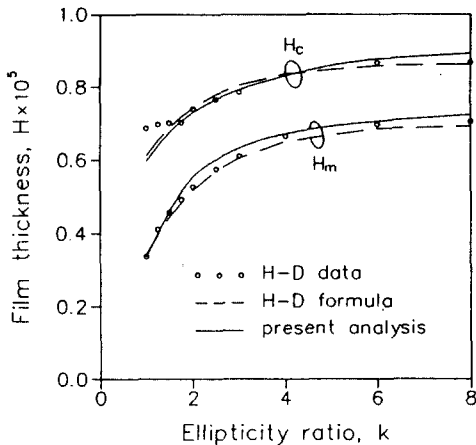


Fig.5 Comparison of film thickness variation with ellipticity ratio. $U=1.683 \times 10^{-12}$, $W=1.106 \times 10^7$, $G=4522$

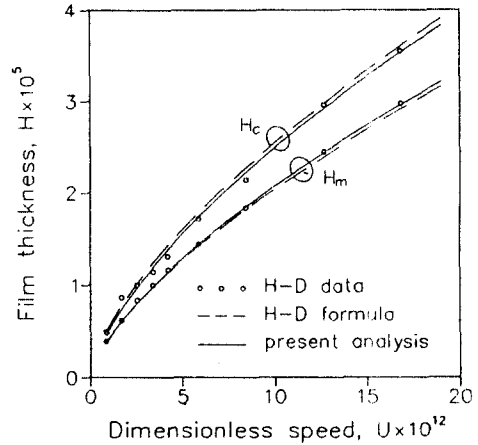


Fig.6 Comparison of film thickness variation with dimensionless speed. $k=6$, $W=2 \times 10^7$, $G=4522$

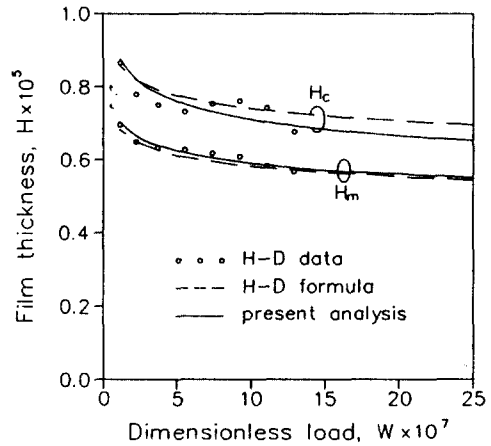


Fig.7 Comparison of film thickness variation with dimensionless load. $k=6$, $U=1.683 \times 10^{-12}$, $G=4522$

6. 결론

본 논문에서는 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 사용하여 타원접촉 EHL 문제를 수치해석하고 그 결과를 H-D의 해석결과 및 그들의 유막두께식과 비교하였다. 최소유막의 크기 뿐만 아니라 중앙부의 유막두께도 H-D의 결과와 차이를 보이며, 특히, 하중변화에 대한 중앙부 유막두께는 상당히 크게 차이를 나타내고 있다. 따라서, 본 논문에서 구한 정확한 수치해석결과를 사용하면 H-D나 Chittenden 등의 유막두께식에 비하여

EHL 상태에서의 유막두께를 보다 정확하게 예측할 수 있는 새로운 유막두께식을 제시할 수 있을 것으로 생각되며 이를 위해서 추가적인 연구가 요구된다.

참고문헌

1. Skurka, J.C., Elastohydrodynamic Lubrication of Roller Bearings, J. of Lub. Tech., Vol.92, pp.281~291, 1970.
2. Danner, C.H., Fatigue Life of Tapered Roller Bearings under Minimal Lubricant Films, ASLE Trans., Vol.13, pp.241~251, 1970.
3. Tallian, T.E., Rolling Bearing Life Modifying Factors for Film Thickness, Surface Roughness and Friction, J. of Lub. Tech., Vol.103, pp.509~520, 1981.
4. Dowson, D. and Higginson, G.R., Elastohydrodynamic Lubrication, SI ed., Pergamon Press, 1977.
5. Holmberg, K., A Survey of Application of EHL on Machine Elements, Tribology Int., pp.121~131, 1982.
6. Hamrock, B.J. and Dowson, D., Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 1 : Theoretical Formulation, J. of Lub. Tech., Vol.98, pp.223~229, 1976. Part 2 : Ellipticity Parameter Results, Vol.98, pp.375~383, 1976., Part 3 : Fully Flooded Results, Vol.99, pp.264~276, 1977.
7. Park, T.J. and Kim, K.K., A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts, WEAR, Vol.136, pp.299~312, 1990.
8. Chittenden, R.J., Dowson, D., Dunn, J.F. and Taylor, C.M., A Theoretical Analysis of the Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.387, pp.245~294, 1985.
9. Chittenden, R.J., Dowson, D. and Taylor, C.M., Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol.200, 207~226, 1986.
10. Park, T.J., A Numerical Analysis of the 3-Dimensional Elastohydrodynamic Lubrication Problem, Ph.D. Thesis, KAIST, 1990.