

2차원 표층밀도분류에 대한 난류모델의 비교연구
A Comparative Study of Turbulence Models
for Buoyant Surface Jet

김기홍¹, 함계운², 박준일³, 허계영³

1. 서론

수표면에 방출되는 표층밀도분류는 그 상하의 경계층으로서 자유수표면과 성층계면에 지배를 받기 때문에 자유난류 특유의 전단류효과와 성층안정효과가 공존하는 특이한 흐름이다. 따라서 흐름은 밀도차에 기인하는 부력을 받으며, 부력에 의한 성층화는 연직방향의 난류운동을 억제하므로 주위수와의 혼합을 방해한다. 안정성층장에 있어서의 난류운동의 억제효과는 밀도류의 거동을 예측하는 데 매우 중요한 요소이며, 성층효과를 표현하기 위해서는 성층계면에 있어서의 난류수송에 대한 이해가 필요하다.

표층밀도분류의 유동은 운동량타월영역, 천이영역 및 부력타월영역으로 나눌 수 있다. 운동량이 흐름을 지배하는 근방영역에서는 충분히 발달한 난류상태로서 흐름이 자기보존적이지만 유효방향으로 갈수록 부력이 흐름의 특성에 큰 영향을 미치면 연직방향의 유체이동 및 난류혼합이 억제되어 간접적으로 수평방향의 퍼짐이 촉진되므로 흐름의 자기상사성은 더 이상 성립되지 않으며, 또한 경계조건이 복잡하게 되면 유속의 상사성을 기본으로 하는 적분모델의 적용이 불가능하게 된다. 이러한 유동을 해석 또는 계산함에 있어서 문제가 되는 것은 난류수송의 표현이다. 난류의 변동성분을 표시하는 데 있어서 Boussinesq의 와동점성계수를 사용하는 대표적인 $k-\epsilon$ 모델은 스칼라량 k 및 ϵ 으로부터 와동점성계수를 산정하므로 난류의 비등방성을 감안하지 못하는 결함이 있다. 그 때문에 Reynolds 응력모델에 의하여 Reynolds 응력, 난류 열/질량 플럭스 등 스칼라량 수송방정식을 직접 해석할 필요가 있지만 방정식의 수가 많아지고, 또한 계산이 용이하지 않을뿐만 아니라 대량의 계산시간을 필요로 한다. 그러므로 Reynolds 응력모델의 기본적인 특성을 유지하도록 하면서 방정식계를 대수적인 표현으로 간략화시킨 대수응력모델을 이용한 난류유동장의 해석이 현재 활발히 시도되고 있다.

표층밀도분류의 기초방정식에 있어서 난류운동으로 발생하는 난류응력 플럭스항을 해석하기 위해서 와동점성 모델 중에서 대표적 모델인 $k-\epsilon$ 모델을 적용하여 수치해석을 하고, 중간¹⁾의 실험결과와 비교하여 그 특성을 고찰하였다. 그리고, 대수응력모델을 적용하여 프로그램을 작성하고, 수치해석한 결과를 실험결과와 비교함으로써 수치모델로서의 적용성을 검증한 후, 표층밀도분류의 흐름특성을 파악하고자 하였다.

2. 난류모델

표층방류밀도분류에 대한 기초방정식의 정식화는 다음과 같은 가정조건을 도입한다. 유체는 비압축성이고, 밀도는 보존물질의 농도에 비례하며, 흐름의 연직방향의 가속도와 레이놀즈응력은 중력가속도에 비하여 충분히 작다. 또한, Boussinesq의 근사가 성립하며, 레이놀즈수가 큰 난류장을 대상으로 한다. 유체에 작용하는 체적력은 중력뿐이다.

2차원 표층밀도분류의 흐름을 지배하는 기초방정식은 앞에서의 가정조건과 더불어 질량, 운동량 및 스칼라량의 보존법칙에 의하여 다음과 같이 표현된다.

연속방정식

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

운동방정식

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{uw}) \tag{2}$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \tag{3}$$

¹ 경상대학교 토목공학과 강사
² 경상대학교 토목공학과 교수
³ 대전대학교 토목공학과 조교수

확산방정식

$$\frac{\partial B}{\partial t} + U \frac{\partial B}{\partial x} + W \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{ub}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{wb}) \quad (4)$$

여기서, U, W 는 각각 x, z방향의 평균유속, P는 평균압력, ρ 는 밀도, ρ_a 는 기준밀도(주위수밀도), $\Delta\rho$ 는 밀도차, g는 중력가속도, B는 평균부력으로서 $B = (\rho_a - \rho)g/\rho_a = \Delta\rho g/\rho_a \geq 0$ 로 정의되며, b는 부력 parameter B의 난류의 변동성분이다. 좌표계는 방류구의 중심축상의 평균수면에 원점을 취하고 흐름방향을 x축, 연직상향을 z축으로 취한다.

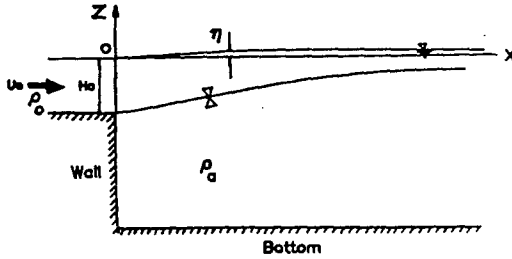


Fig.1 Coordinate system and boundaries.

k-ε 2-방정식 모델에서는 흐름장의 국소등방성을 가정하여 식 (2) 중의 레이놀즈응력 $-\overline{uw}$ 및 식 (4) 중의 부력플럭스 $-\overline{wb}$ 는 각각 다음 식으로 표현된다.

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \quad (5)$$

$$-\overline{wb} = \Gamma_t \frac{\partial B}{\partial z} \quad (6)$$

여기서, ν_t 는 와동점성계수, Γ_t 는 와동확산계수이며 다음과 같이 표현된다.

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad \Gamma_t = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \quad (7)$$

여기서, C_μ 는 실험상수(0.09)이다. 난류운동에너지 k 및 점성소산을 ε에 대한 방정식을 유도하여 모델화한 2차원 표층밀도분류의 k-ε모델 방정식은 다음의 식 (8), (9)과 같다.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + W \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P_r + G_r - \epsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_r - C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon^2}{k} + C_{\epsilon 3} \frac{\epsilon^2}{k} G_r \quad (9)$$

여기서, $P_r = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$, $G_r = -\overline{wb} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial B}{\partial z}$

$\sigma_k, \sigma_\epsilon, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 3}$: 실험상수, σ_t : 난류 Schmidt 수

편미분방정식을 대수방정식으로 바꾸어도 그 방정식의 기본적인 성질을 유지하도록 하여 편미분방정식을 단순화시킨 것이 대수용력모델이다. 대수용력모델의 근거는 난류 용력플럭스 수송방정식에서 종속변수들의 경사는 변화율, 이류항 및 소산항에만 나타나는 이러한 항들의 경사가 모델근사에 의하여 소거되면 편미분방정식은 대수식으로 변환된다. 이 대수식에 경계층근사를 적용하면 2차원 표층밀도분류에 대한 난류변동량은 식 (10)~(15)과 같이 간략화한 식으로 표현된다.

$$\overline{w^2} = \frac{2}{3} k \left\{ C_1 - 1 + \frac{P_r + G_r}{\epsilon} (C_2 - 2C_2 C_2' f_w) + \frac{G_r}{\epsilon} (3 - C_2 - 2C_3 + 2C_2 C_2' f_w) \right\} \left\{ C_1 + 2 C_1' f_w + \frac{P_r + G_r}{\epsilon} - 1 \right\}^{-1} \quad (10)$$

$$\overline{u^2} = \frac{2}{3} k \left\{ \frac{P_r}{\epsilon} (3 - 2C_2 - 2C_2 C_2' f_w) + C_1 - 1 + \frac{3}{2} C_1' f_w \frac{\overline{w^2}}{k} \right\} \cdot \left(C_1 + \frac{P_r + G_r}{\epsilon} - 1 \right)^{-1} \quad (11)$$

$$\overline{uw} = -C_4 \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\overline{w^2}}{k} \left\{ 1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' f_w - (1 - C_{2b}) \frac{1 - C_{3b}}{C_{1b}} \alpha \beta \right\} \cdot \left(C_1 + \frac{3}{2} C_1' f_w + \frac{1 - C_3}{C_{1b}} \beta \right)^{-1} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (12)$$

$$\overline{wb} = -\frac{1}{C_{1b}} \frac{k}{\epsilon} \overline{uw} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{C_{2b} - 1}{C_{1b}} \overline{w^2} \alpha \beta \frac{\partial U}{\partial z} \quad (13)$$

$$\overline{wb} = -\alpha \frac{\overline{w^2} k}{\epsilon} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (14)$$

$$\overline{b^2} = -\frac{\overline{wb} k}{\epsilon} C_R \frac{\partial B}{\partial z} \quad (15)$$

여기서, $P_r = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2$, $G_r = -\overline{wb} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)$

$$\alpha = (C_{1b} + C_{1b}' f_w + 2(1 - C_{3b}) C_R \beta)^{-1}, \quad \beta = -\frac{k^2}{\epsilon^2} \frac{\partial B}{\partial z}$$

대수용력모델(ASM)에서는 k - ϵ 모델에서와 같이 k 와 ϵ 의 수송방정식은 식 (10) 와 (11) 을 이용한다. 그러나, 확산항에 관한 모델상수 σ_k , σ_ϵ 에 관해서는 Daly와 Harlow의 제안에 따라 다음과 같이 보정한다.

$$\sigma_k = \frac{\omega}{C_k}, \quad \sigma_\epsilon = \frac{\omega}{C_\epsilon} \quad (16)$$

$$\text{여기서, } \omega = \frac{1 - C_2 + \frac{3}{2} C_2 C_2' f_w - (1 - C_{2b}) \frac{(1 - C_3)}{C_{1b}} \alpha \beta}{C_1 + \frac{3}{2} C_1' f_w + \frac{(1 - C_3)}{C_{1b}} \beta}$$

왜냐하면 σ_k , σ_ϵ 의 값은 성층효과 및 자유수표면(혹은 벽면)으로 접근함에 따라 영향을 받기때문에 k 및 ϵ 의 확산이 와동점성계수 ν_t 그 자체에 비례하는 것이 아니라 $(\overline{w^2}/k) \times (k^2/\epsilon)$ 에 비례하도록 σ_k , σ_ϵ 의 값을 보정한다. 벽면의 존재가 난류특성에 미치는 영향은 벽면 전단력의 효과가 부가되는 것으로서 자유수표면이 난류특성에 미치는 영향과 유사하다고 생각할 수 있다. Gibson과 Launder에 의하여 제안된 압력변형 상관항에 있어서 벽면수정모델을 확장한 Celik과 Rodi의 방법을 사용한다. Celik과 Rodi는 벽면감쇠함수 f_w 를 자유수표면에 확장한 자유수표면 감쇠함수 f_s 를 다음과 같이 제안했다.

$$f_s = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{C_w \epsilon} \cdot \frac{1}{z_n + 0.04 \frac{k_s^{\frac{3}{2}}}{\epsilon_s}} \quad (17)$$

여기서, k_s , ϵ_s 는 자유수표면에서의 k 와 ϵ 값이며 z_n 는 자유수표면에서 수직방향으로 측정된 거리이다. 식 (17) 은 자유수표면에서 보정효과가 감소한다는 것을 나타낸다. σ_t 에 관해서는 국소적인 성층안정도를 나타내는 경사형 Richardson 수의 함수로서 표현되는 다음 식 (18) 을 사용한다.

$$\sigma_t = \frac{\omega}{\alpha} \quad (18)$$

3. 수치계산

1) 계산조건

수치실험을 하기 위해서 Fig 2 와 같이 염수를 가득 채운 길이 400cm, 깊이 120cm의 2차원 수조에 담수를 표층으로 방류하는 밀도분류이다. 방류조건은 中辻의 실험을 참고하였다. 격자망은 유동특성에 따라서 격자간격은 $\Delta x = 6.0 \sim 22.0\text{cm}$, $\Delta z = 0.5 \sim 10.0\text{cm}$ 로 부등간격 격자망을 사용하였으며 수평방향으로 34개 연직방향으로 21개의 격자로 분할하였다. 이산화 시간간격으로 CFL (Courant, Friedrichs and Lewy) 안정조건으로부터

$\Delta t=0.020\text{sec}$ 로 하였다. 또 가중평균 parameter인 θ 의 값은 수렴성을 촉진하기 위하여 $\theta=0.9$ 를 사용하였다.

Table 1. Conditions of numerical calculation

Case	$U_0(\text{cm/sec})$	$H_0(\text{cm})$	$\rho_0(\text{kg/m}^3)$	F_{a0}
1	10.0	2.5	1003.75	3.3
2	10.0	2.5	1001.14	6.0
3	10.0	2.5	1000.50	9.0

(2) 계산결과 및 고찰

계산은 $k-\epsilon$ 모델의 수치해석결과와 대수용력모델(ASM)에 의한 결과를 비교, 검토하여 $k-\epsilon$ 모델의 한계를 확인하고 ASM의 적용성을 고찰하였다.

방류구 수심으로 무차원화한 유하방향의 각 지점 $x/H_0 = 4$, $x/H_0 = 40$ 에서 방류구의 유속 U_0 와 방류구의 평균부력 B_0 로 각각 무차원화한 연직방향의 평균유속 및 평균부력의 분포를 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내고 있다. $x/H_0 = 4$ 는 운동량타월영역을 대표하고 $x/H_0 = 40$ 는 유하방향에 따른 부력타월영역을 나타낸다. Fig. 3은 $k-\epsilon$ 모델에 의한 해석결과로서 운동량 타월영역에서는 유동특성은 잘 표현되고 있지만 확산이 타월한 하류영역에서 유동특성은 연직 하방향으로 과도한 확산이 발생하여 실험치와 상당한 차이를 보이고 있다. 특히 그 경향은 평균부력의 분포에서 뚜렷하게 나타난다. 이것은 $k-\epsilon$ 모델이 난류운동의 비등방성을 고려하지 못하기 때문이며 와동점성계수의 값이 2개의 스칼라 k 및 ϵ 만으로 계산되어 모든 방향성을 고려하지 않는 것이 원인이다.

Fig. 4는 ASM에 의한 계산결과로서 운동량타월영역뿐만 아니라 부력타월영역에서도 부력을 받는 밀도류의 유동특성을 잘 재현하고 있다. 특히 $k-\epsilon$ 모델에 비하여 부력이 지배적인 하류부에서의 유동특성을 잘 나타내고 있으며 평균부력의 분포특성은 실험치와 잘 일치되고 있다. ASM은 밀도분류의 특성 즉, 경계조건으로서 자유수표면의 영향과 밀도차로 인하여 발생하는 밀도경계면에서의 성층화를 정확히 고려하므로써 자유수표면에 의한 난류운동의 감쇠효과와 부력효과를 잘 나타낸다.

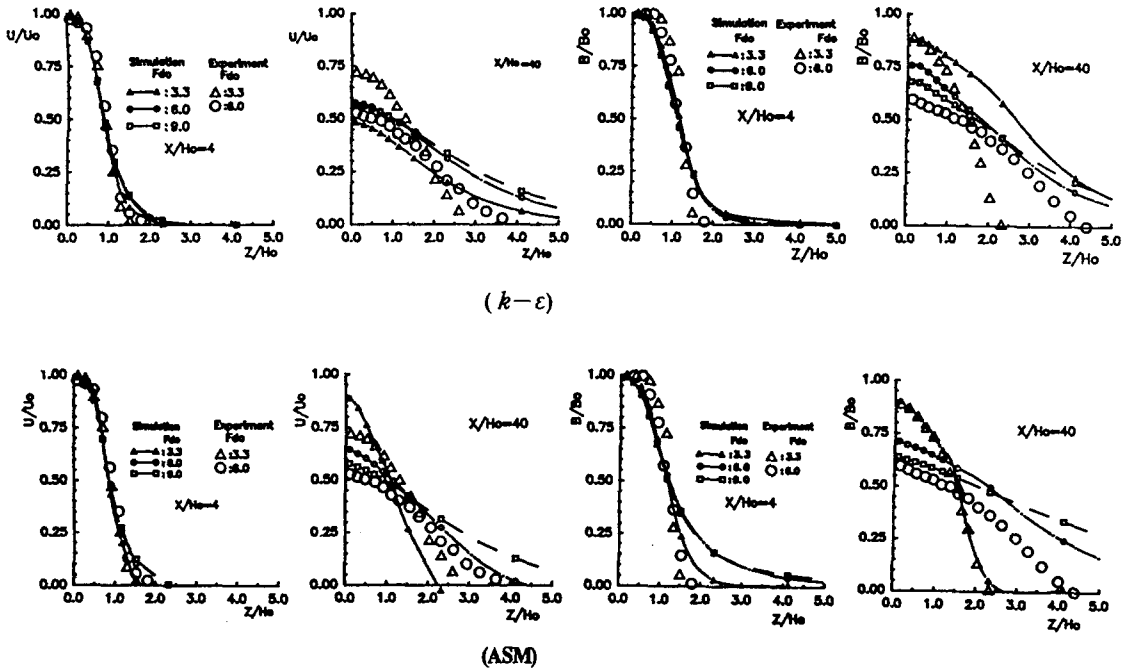


Fig. 2 Vertical distribution of mean velocity and mean buoyancy.

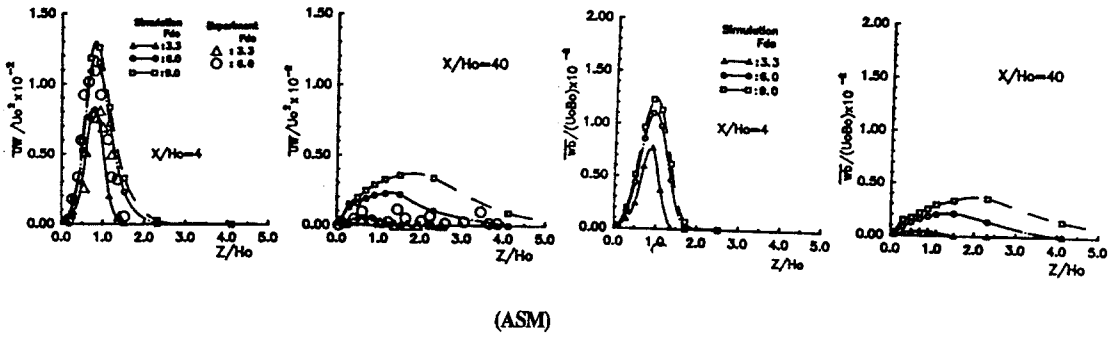
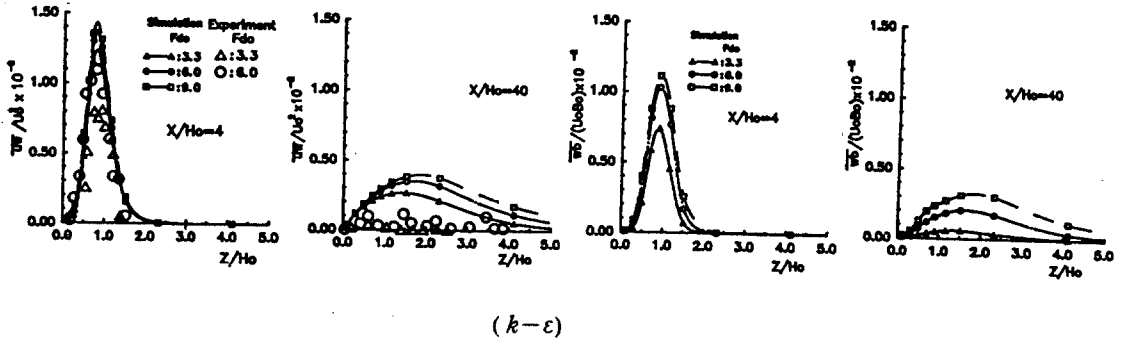


Fig. 3 Vertical distribution of Reynolds stress and turbulent buoyancy flux.

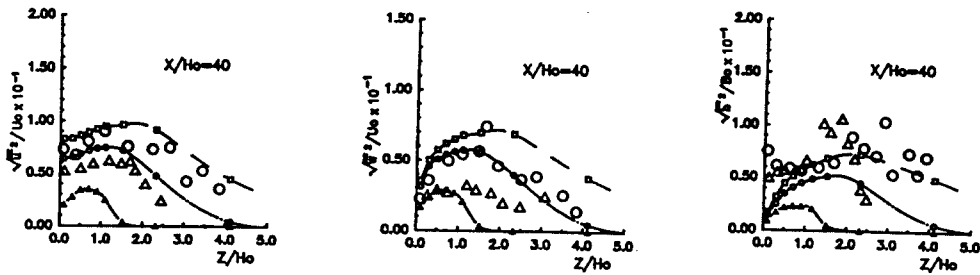


Fig.4 Vertical distribution of turbulence intensity $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$ and $\sqrt{w'^2}$ (ASM).

4. 결론

본 연구에서는 표층으로 방류되는 2차원 밀도류의 유동특성을 파악하기 위하여 $k-\epsilon$ 모델과 대수응력모델을 비교연구하고 수치실험을 행하여 얻어진 중요한 결론은 다음과 같다.

- 1) 운동량이 탁월한 영역에서는 $k-\epsilon$ 모델에 의한 수치계산결과가 실험결과와 잘 일치하고 있으나, 하류로 疏下하여 부력이 운동량보다 탁월하게 되는 영역에서는 실험치와 계산결과는 다소 큰 차이를 나타낸다. 이러한 결과는 $k-\epsilon$ 모델이 난류의 등방성을 가정하고 있기 때문에 난류가 非等方的으로 되는 영역에서는 난류량을 정확하게 나타내지 못하기 때문인 것으로 판단된다.
- 2) 난류에너지의 수치를 비교하여 분석한 결과에 의하면 밀도차가 큰 밀도류장에서는 경계층근사를 적용하는 것이 타당하지만, 균질분류 및 밀도차가 작은 밀도류장에 있어서는 경계층근사의 적용이 계산의 정밀도 면에서 불충분하다는 것을 알 수 있었다. 이것은 흐름방향의 확산이 유동에 미치는 영향에 따른 것으로 보인다. 이것으로부터 밀도차가 큰 수평흐름에서는 경계층근사를 적용하는 것이 수학적 모델을 한층 단순화할 수 있고 계산시간의 면에 있어서도 경제적이지만, 밀도차가 작은 수평흐름에서 경계층근사로는 흐름장을 타당하게 나타낼 수 없다는 것을 확인할 수 있었다.
- 3) 난류의 비등방성을 고려하여 부력이 탁월한 영역에서의 흐름을 더욱 정확하게 해석하기 위해 난류응력 및 난류 부력플럭스를 직접 계산하는 대수응력모델을 도입하여 수치계산을 실시하였는데, 난류의 비등방성이 클 것으로 예상되는 하류의 각종 난류량이 실험치와 잘 일치함을 확인하였다. 특히, 밀도Froude수가 작은 경우(밀도차가 큰 경우)에 실험결과의 재현성은 아주 우수하였으며, 다만 밀도Froude수가 큰 경우(밀도차가 작은 경우)에는 약간의 차를 보였는데, 이것은 흐름방향의 운동량 및 스칼라량의 확산이 경계층근사로 인해 생략되었기 때문인 것으로 판단된다.

5. 참고문헌

1. Celik, I. and W. Rodi, 1984, Simulation of Free Surface Effects in Turbulent Channel Flows, Physico-Chem., Hydrodyn., Vol.5 : 217-227
2. Daly, B.J. and F. H. Harlow, 1970, Transport Equations of Turbulence, Phys. Fluids Vol. 13 : p2364
3. Gibson, M.M. and B.E. Launder, 1976, On the calculation of Horizontal Turbulent, Free Shear Flows under Gravitational Influence, J. Heat Transfer, Trans. ASME, C98 : 81-87
4. Launder B.E., 1975, On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol.67 : 569-581
5. Launder, B.E., Reece, G.I. and W. Rodi, 1976, Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure, J. Fluid Mech., Vol.68 : 537-566
6. Ljuboja, M. and W. Rodi, 1980, Calculation of Turbulence Wall Jet with an Algebraic Stress Model, J. Fluid Eng., Vol.102 : 350-356
7. McGuiirk, J.J. and W.Rodi, 1979, Mathematical modelling of Three-dimensional Heated Surface Jets, J. Fluid Mech., Vol.102 : 138-145
8. 中辻啓二, 1984, 表層密度噴流の混合機構と擴がりに関する基礎的研究, 大阪大學博士學位論文 : 56-60
9. Rodi W., 1980, Turbulence Models and their Application in Hydraulics, IAHR, Delft : 14-46
10. 金基興, 1995, 代數應力모델에 의한 密度流場의 解析에 관한 研究, 慶尙大學校博士學位論文 : 34-127