

이며, 분계B의 결합점에서의 응답은

$$\begin{pmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^B & & & \text{SYM.} \\ G_{21}^B & G_{22}^B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^B & G_{n2}^B & \cdots & G_{nn}^B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

이다. 한편, 결합점에서의 반력은

$$(k_i + j\omega c_i)(X_i^B - X_i^A) = R_i \quad (i=1 \sim n) \quad (3)$$

이므로 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1 + j\omega c_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{k_n + j\omega c_n} & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^B \\ X_2^B \\ \vdots \\ X_n^B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1^A \\ X_2^A \\ \vdots \\ X_n^A \end{pmatrix} \quad (4)$$

(1)식과 (2)식을 (4)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \left[\begin{matrix} \frac{1}{k_1 + j\omega c_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \frac{1}{k_n + j\omega c_n} & \end{matrix} \right] + \begin{bmatrix} G_{11}^A & & & \text{SYM.} \\ G_{21}^A & G_{22}^A & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^A & G_{n2}^A & \cdots & G_{nn}^A \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} G_{11}^B & & & \text{SYM.} \\ G_{21}^B & G_{22}^B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^B & G_{n2}^B & \cdots & G_{nn}^B \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G_{11}^A \\ G_{21}^A \\ \vdots \\ G_{n1}^A \end{pmatrix} F_f \quad (5)$$

이 연립방정식을 풀면 결합점에서의 반력 $\{R\}$ 이 구해지며, 결합 후의 응답점 및 r에서의 응답도 다음과 같이 구해진다.

$$X_s^A = [G_{s1}^A \ G_{s2}^A \ \cdots \ G_{sn}^A] \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} + [G_{sr}^A] F_f \quad (6)$$

$$X_r^B = [G_{r1}^B \ G_{r2}^B \ \cdots \ G_{rn}^B] \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

만일 i점이 강결합이면 $k_i \rightarrow \infty$, $c_i \rightarrow \infty$ 임을 고려하면 된다. 부가질량이 N개인 경우에는 다음과 같이 확장시킬 수 있다. 즉 i번째 부가질량에 대한 식(1), (2), (4)를 다음과 같은 식(8), (9), (10)으로 간단히 표현

한다.

$$(X_m^A)_i = [G_{mm}^A]_{ii} (R)_i + [G_{mf}^A]_i F_f \quad (8)$$

$$(X_m^B)_i = - [G_{mm}^B]_{ii} (R)_i \quad (9)$$

$$[k + j\omega c]_{ii} (R)_i = (X_m^B)_i - (X_m^A)_i \quad (10)$$

표현한다. 그리고 부가질량 i의 결합점 가진에 대한 부가질량 j의 결합점 응답들을

$$(X_m)_j = [G_{mm}]_{ji} (R)_i \quad (11)$$

이라고 하자. 그러면 N개의 부가질량에 대한 반력들은 다음과 같이 표현되어

$$\begin{bmatrix} [k + j\omega c]_{11}^{-1} + [G_{mm}^A]_{11} & \cdots & [G_{mm}^A]_{1N} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{SYM.} & & [k + j\omega c]_{NN}^{-1} + [G_{mm}^A]_{NN} \\ & & & + [G_{mm}^B]_{NN} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (R)_1 \\ (R)_2 \\ \vdots \\ (R)_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (G_{mf}^A)_1 \\ (G_{mf}^A)_2 \\ \vdots \\ (G_{mf}^A)_N \end{bmatrix} F_f \quad (12)$$

합성후 본래 구조물(분계A)의 응답점에서의 응답은

$$(X_r) = [[G_{rm}]_1 \ \cdots \ [G_{rm}]_N] \begin{pmatrix} (R)_1 \\ (R)_2 \\ \vdots \\ (R)_N \end{pmatrix} + [G_{rf}] F_f \quad (13)$$

이고, 합성후 본래 구조물(분계A)의 i번째 부가질량의 결합점에서의 응답은

$$(X_m^A)_i = \sum_{j=1}^N [G_{mm}]_{ij} (R)_j + [G_{mf}^A]_i F_f, \quad i=1 \sim N \quad (14)$$

이며, 합성후 i번째 부가질량(분계B)의 결합점에서의 응답은

$$\{X_m^B\}_i = -[G_{mm}^B]_{ii} \{R\}_i, \quad i=1\sim N \quad (15)$$

이다.

2.2 부가장착물의 이론적 모델링

만일 부가질량을 강체로 가정할 수 있으면 식(2)의 결합점 i가진에 대한 결합점 j의 응답 전달함수 $[G_{ji}^B]$ 는 이론적으로 계산할 수 있다. 부가질량의 종류는 1자유도 집중 질량, 2자유도 강체 보, 3자유도 강체 평판, 6자유도 강체를 고려할 수 있다.

① 1자유도 집중 질량

$$\text{Accelerance} : G_{ji}^B = \ddot{w}_j/F_i = \frac{1}{m}$$

$$\text{Compliance} : G_{ji}^B = w_j/F_i = -\frac{1}{\omega^2 m} \quad (16)$$

② 2자유도 강체 보

결합점 i가진에 대한 2자유도 강체 보의 중심점에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_G \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_i(x_i - x_G) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서 x_i 및 x_G 는 결합점 i 및 질량중심의 위치좌표이다. 그러므로 질량중심점에서의 변위 가속도 \ddot{w}_G 및 각가속도 $\dot{\theta}$ 는

$$\begin{aligned} \ddot{w}_G &= F_i/m \\ \dot{\theta} &= F_i(x_i - x_G)/I_G \end{aligned} \quad (18)$$

이다. 임의점 j에서의 변위 가속도는

$$\begin{aligned} \ddot{w}_j &= \ddot{x}_G + (x_j - x_G)\dot{\theta} \\ &= F_i/m + F_i(x_i - x_G)(x_j - x_G)/I_G \end{aligned} \quad (19)$$

이다. 그러므로

$$\text{Accelerance} \quad G_{ji}^B = \ddot{w}_j/F_i = 1/m + (x_i - x_G)(x_j - x_G)/I_G$$

$$\begin{aligned} \text{Compliance} \quad G_{ji}^B &= w_j/F_i = -\frac{1}{\omega^2} [1/m + (x_i - x_G)(x_j - x_G)] \\ & \quad (20) \end{aligned}$$

③ 3자유도 강체 평판

결합점 i가진에 대한 3자유도 강체 평판의 중심점에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gx} & -I_{Gxy} \\ 0 & -I_{Gxy} & I_{Gy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_G \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{zi} \\ -y_{iG}F_{zi} \\ x_{iG}F_{zi} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

단,

$$x_{iG} = x_G - x_i$$

$$y_{iG} = y_G - y_i$$

질량중심점에서의 변위가속도 응답 \ddot{w}_G 및 각가속도 응답 $\dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ 는

$$\begin{aligned} \ddot{w}_G &= F_{zi}/m \\ \dot{\theta}_x &= (y_{Gi}F_{zi}I_{Gy} - x_{Gi}F_{zi}I_{Gxy})/\Delta \end{aligned} \quad (22)$$

$$\dot{\theta}_y = (-x_{Gi}F_{zi}I_{Gx} + y_{Gi}F_{zi}I_{Gxy})/\Delta$$

단,

$$\Delta = I_{Gx}I_{Gy} - I_{Gxy}^2$$

이다. 임의점 j에서의 변위가속도는

$$\begin{aligned} \ddot{w}_j &= [1 \quad y_{Gj} - x_{Gj}] \begin{Bmatrix} \ddot{w}_G \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} \\ &= \frac{F_{zi}}{m} + \frac{F_{zi}}{\Delta} [y_{Gj} (y_{Gi}I_{Gy} \\ & \quad - x_{Gi}I_{Gxy}) - x_{Gj} (-x_{Gi}I_{Gx} + y_{Gi}I_{Gxy})] \end{aligned} \quad (23)$$

이므로 Accelerance는

$$\begin{aligned} G_{ji}^B &= \ddot{w}_j/F_i \\ &= \frac{1}{m} + \frac{1}{\Delta} [y_{Gj} (y_{Gi}I_{Gy} - x_{Gi}I_{Gxy}) \\ & \quad - x_{Gj} (-x_{Gi}I_{Gx} + y_{Gi}I_{Gxy})] \end{aligned}$$

이고 Compliance는

$$G_{ji}^B = w_j/F_i = -\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\ddot{w}_j}{F_i} \right) \quad (24)$$

이다.

④ 6자유도 강체

결합점 i가진에 대한 6자유도 강체의 중심점에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_G \\ \ddot{v}_G \\ \ddot{w}_G \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{Gx} & -I_{Gxy} & -I_{Gxz} \\ & I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ \text{SYM.} & & I_{Gz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_G F_{zi} - z_G F_{yi} \\ z_G F_{xi} - x_G F_{zi} \\ x_G F_{yi} - y_G F_{xi} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

단,

$$\begin{aligned} x_{Gi} &= x_i - x_G \\ y_{Gi} &= y_i - y_G \\ z_{Gi} &= z_i - z_G \end{aligned}$$

이다. 간단히

$$\begin{aligned} \{m\} \{a_G\} &= \{F_i\} \\ [I_G] \{a\} &= \{M_{Gi}\} \end{aligned} \quad (26)$$

로 표시한다. 질량중심점에서의 변위가속도 응답 $\{a_G\}$ 및 각가속도 응답 $\{a\}$ 는

$$\begin{aligned} \{a_G\} &= \{m\}^{-1} \{F_i\} \\ \{a\} &= [I_G]^{-1} \{M_{Gi}\} \end{aligned} \quad (27)$$

임의점 (x_j, y_j, z_j) 에서의 변위가속도 응답 $\{a_j\}$ 는

$$\begin{aligned} \{a_j\} &= [[I] [T]] \begin{Bmatrix} a_G \\ a \end{Bmatrix} \\ &= \{a_G\} + [T] \{a\} \\ &= \{m\}^{-1} \{F_i\} + [T] [I_G]^{-1} \{M_{Gi}\} \end{aligned} \quad (28)$$

이다. 단, $[I]$ 는 단위행렬이며,

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & z_j - z_G & -(y_j - y_G) \\ -(z_j - z_G) & 0 & x_j - x_G \\ y_j - y_G & -(x_j - x_G) & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

이다.

⑤ 탄성체

부가질량이 강체가 아닌 경우에는 ① - ④와 같이 모델링 할 수 없다. 결합점 i가진에 대한 임의점 j에서의 응답은 유한요소해석이나 진동시험으로 구할 수

있다. 진동시험시에는 가진성분 및 변위응답성분 방향으로 자유상태가 되도록 부가질량을 공중에 매달아. 그리고 결합점 i를 impact hammer로 가진하고 응답점의 변위를 가속도계로 측정한다.

Acceleration

$$G_{ji}^B = \ddot{w}_j / F_i = F [\ddot{w}_j(t) / f_i(t)]$$

Compliance

$$G_{ji}^B = w_j / F_i = -\frac{1}{\omega^2} F [\ddot{w}_j(t) / f_i(t)] \quad (30)$$

2.3 위상수정 전달함수합성(MTFS.)

진동시험시에는 노이즈가 필연적으로 혼입된다. 이 노이즈는 복소수인 주파수응답 함수를 왜곡시킨다. 주파수응답함수의 크기(magnitude)는 비교적 노이즈에 강인하지만 위상(phase)은 노이즈에 매우 민감하며 왜곡된 위상은 주파수응답함수의 실수부와 허수부를 틀리게 한다. 전달함수합성법은 주파수응답함수의 복소수데이터를 이용한 연산을 하므로 coherence가 떨어지는 주파수 범위에서 전달함수합성 후의 진동특성 예측의 신뢰도가 낮아질 수 있다. 특히 진동시험시 공진진동수 부근의 주파수에서는 resolution error때문에 coherence가 낮아진다. 이런 경우 전달함수합성 후 이동하여 소멸되어야 할 공진(resonance)이 그대로 남아있을 수가 있다.

본 연구에서는 신뢰도가 떨어진 주파수범위에 대해서는 위상을 보정한다. 공진진동수에서의 위상은 감쇠에 관계없이 +90° 또는 -90° 가 되어야 하므로 진동시험에서 얻어진 주파수응답함수의 크기(magnitude)는 그대로 유지하면서 위상 $\phi(\omega)$ 는 +90° 또는 -90° 가 되도록 다음과 같이 $\Delta\phi$ 만큼 이동(shift)시킨다.

$$\phi_{mod}(\omega) = \phi_{exp}(\omega) + \Delta\phi \quad (31)$$

여기서 첨자 exp는 실험(experimented)을 의미하며 첨자 mod는 보정(modified)을 의미한다. 공진진동수는 실험모우드해석(Curve Fit)으로 구한다. 보정된 전달함수 $G_{mod}(\omega)$ 는 실험전달함수 $G_{exp}(\omega)$ 로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} G_{mod}(\omega) &= |G_{exp}(\omega)| \angle \phi_{mod}(\omega) \\ &= |G_{exp}(\omega)| \cos \phi_{mod}(\omega) + j |G_{exp}(\omega)| \sin \phi_{mod}(\omega) \end{aligned} \quad (32)$$

이와같이 위상수정된 전달함수를 이용하는 합성법을 본 논문에서는 이후 위상수정 전달함수합성법을

(MTFS.)라 정의한다.

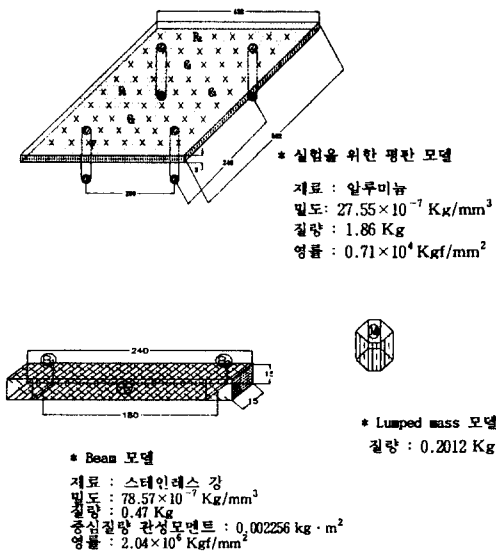
3. 평판구조를 진동시험에 의한 검증

<그림 2>와 같이 알루미늄 재질의 사각평판 4곳을 실리콘으로 지지하고, 평판위에 Beam이나 Lumped Mass를 부가한 경우의 응답특성을 전달함수합성법으로 예측하고, 실제 진동시험에 의한 응답과 비교한다.

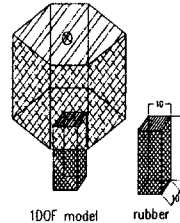
<그림 2>에서 F는 가진점이고, R₁, R₂는 응답점이며, C₁, C₂, C₃는 부가질량 결합점이다. 결합 방법은 가로 10mm, 세로 10mm, 높이 15mm인 사각 고무로 마운트 결합하였다. 전달함수합성을 위해서 결합부인 고무의 강성 K와 감쇠 C값은 <그림 3>과 같이 1자유도 모델에 대한 진동시험 F.R.F로부터 M=0.2012Kg, C=39.71N·s/m, K=60050N/m로 규명되었다. Lumped Mass 모델을 저울로 측정한 질량이 0.19Kg임을 고려하면 고무의 규명된 강성 K와 감쇠 C값의 타당성이 짐작된다.

평판에 Beam을 부가한 경우의 전달함수합성 결과를 <그림 4>에, 평판에 Lumped Mass와 Beam을 동시에 부가한 경우의 전달함수합성 결과를 <그림 5>에 나타낸다.

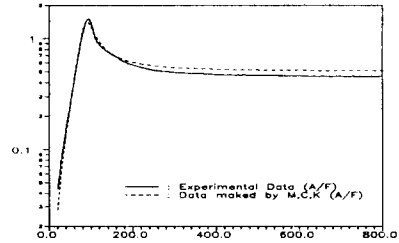
전달함수합성 후의 결과는 대체적으로 실제로 부가 질량 부착 후의 시험과 잘 일치함을 알 수 있으나 본래 구조물의 Peak이 현저히 높았던 주파수 범위에서는 부가질량을 부가하기 전 Peak의 영향이 남아 있음을 알 수 있으며, 위상수정 전달함수합성법에 의해 그 영향이 현저히 줄었음을 알 수 있다.



<그림 2> 실험을 위한 기본요소

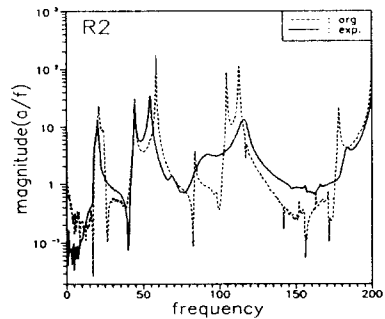


(a) 시험모델

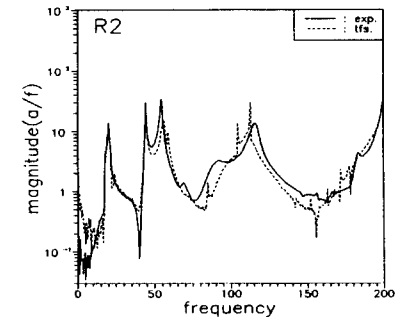


(b) 주파수 응답 특성

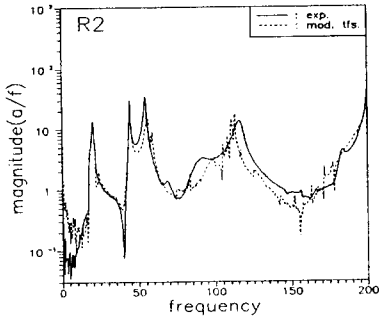
<그림 3> 결합고무의 특성규명을 위한 실험FRF.



(a) 부가질량 부가전과 후의 실험비교

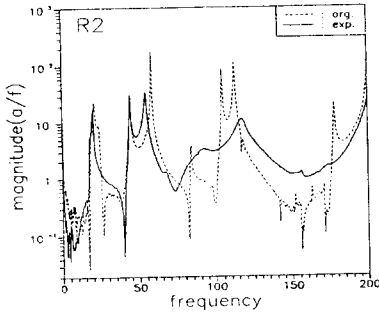


(b) 부가질량 부가후 실험과 TFS. 비교

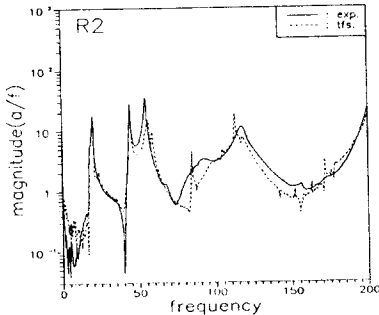


(c) 부가질량 부가후 실험과 MIFS. 비교

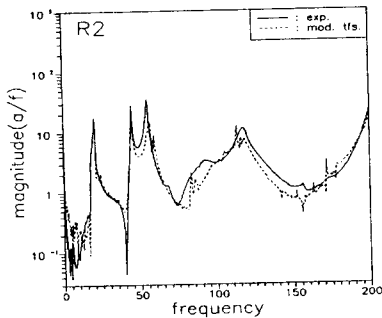
<그림 4> 평판에 Beam을 부가한 경우



(a) 부가질량 부가전과 후의 실험비교



(b) 부가질량 부가후 실험과 TFS. 비교



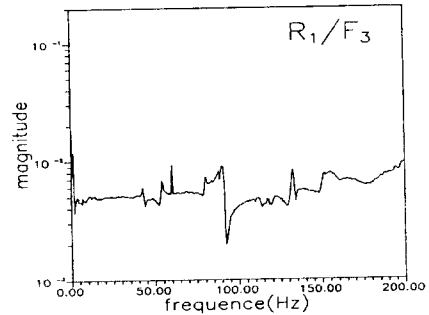
(c) 부가질량 부가후 실험과 MIFS. 비교

<그림 5> 평판에 Lumped Mass와 Beam을 부가한 경우

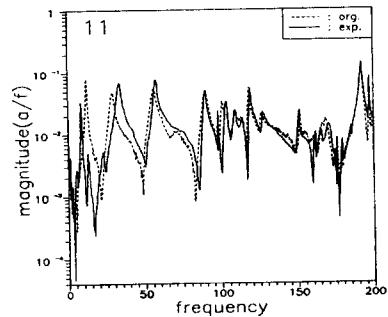
4. 실차에의 적용

실제차량을 차체와 엔진을 분리하고 엔진은 공중에 매달아 자유상태에 대한 차체결합점에서의 주파수 응답함수를 Impact Hammer실험으로 얻었으며 그 결과의 한 예는 <그림 6>과 같다. 그리고 차체 위에 엔진결합점을 포함한 여러점의 주파수응답함수를 Impact Hammer실험으로 얻었으며 그결과의 한 예는 <그림 7(a)>의 점선과 같다.

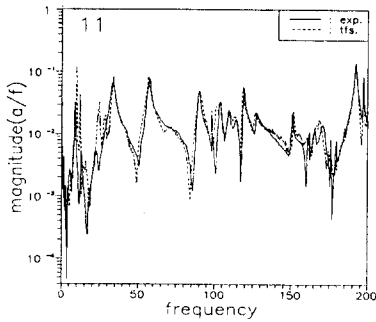
차체와 엔진을 고무마운트로 결합시킨 후에 Impact Hammer실험으로 얻은 주파수응답함수는 <그림 7(a)>의 실선(차체쪽) 및 <그림 8(a)>의 실선(엔진쪽)과 같다. 개발된 전달함수합성법(TFS. 법)으로 예측한 주파수응답함수의 결과를 <그림 7(b)>와 <그림 8(a)>에 나타낸다. 27Hz 부근에 소멸되어야 할 Peak가 약간 남아 있는 것을 제외하고는 전 주파수 영역에서 예측치는 실험치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 위상수정 전달함수합성법(MTFS. 법)에 의한 주파수응답함수 예측결과를 <그림 7(c)>와 <그림 8(b)>에 나타낸다. TFS. 법에서 예측이 어려웠던 27Hz 부근도 잘 예측함을 알 수 있다.



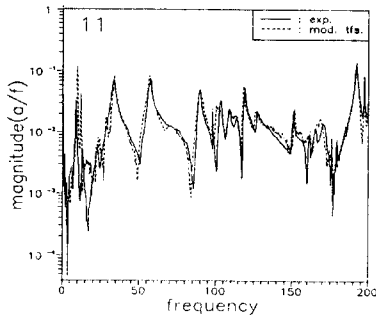
<그림 6> 엔진만의 주파수응답함수(R₃/F₁)



(a) 엔진 부가전과 후의 실험비교

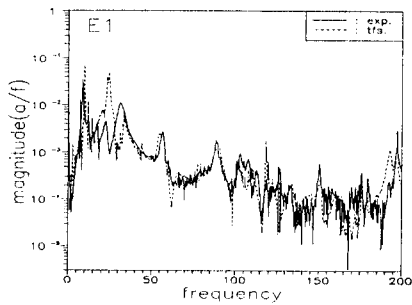


(b) 엔진 부가후 실험과 TFS. 비교

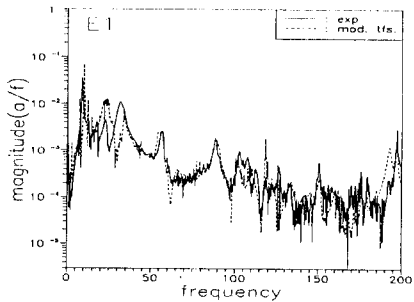


(c) 엔진 부가후 실험과 MTFs. 비교

<그림 7> 차체+엔진에 대한 결과 (차체쪽)



(a) 엔진 부가후 실험과 TFS. 비교



(b) 엔진 부가후 실험과 MTFs. 비교

<그림 8> 차체+엔진에 대한 결과 (엔진쪽)

6. 결론

- 1) 전달함수합성법 이론을 바탕으로 부분구조물들에 대한 진동시험데이터와 결합특성으로부터 결합후 전체 구조물의 진동특성을 예측하기 위한 프로그램 package를 개발하였다.
- 2) 평판구조물에 대한 진동시험데이터에 개발된 프로그램을 적용한 결과 응답스펙트럼의 특정한 peak부근을 제외한 전 주파수영역에서 예측과 시험이 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.
- 4) 응답스펙트럼의 특정한 peak부근에 대해 정확한 예측을 위한 위상보정법을 제시하였으며, 제시전 결과에 비해 좀 더 좋은 결과를 얻었다.
- 5) 실제 건설차량의 차체-엔진 결합계에 대하여 개발된 프로그램을 응용한 결과 개발된 프로그램의 실용성이 입증되었다.

참고 문헌

- [1] Y. Fujimura, Y. Kuronuma and O. Sakai, 1977, " Dynamic Strength Analysis of Construction Machines " (Report No. 1), Komatsu Technical Review, Vol. 23, No. 3, pp.1-11
- [2] Y. Fujimura, Y. Kuronuma, O. Sakai and K. Shimasu, 1977, " Dynamic Strength Analysis of Construction Machines " (Report No. 2), Komatsu Technical Review, Vol. 23, No. 3, pp.12-24
- [3] S. Murai, H. Ito, Y. Yoshioka and Y. Ogasawara, 1979, "Study of Dynamic Analysis", Komatsu Tech. Review, Vol. 25, No. 2, pp.11-19
- [4] 長松昭男, 1985, " 모드 해석 ", 培風館, pp.189-250
- [5] M. Petyt, 1990, " Introduction to Finite Element Vibration Analysis ", Cambridge University Press
- [6] Huang Dishan, " Phase Error in Fast Fourier Transform Analysis ", Mechanical Systems and Signal Processing(1995), Vol. 9, No. 2, pp.113-118