

# 모달필터 오차가 진동제어 특성에 미치는 영향

황재혁\*, 김준수\*\*, 김두만\*\*\*

## Effect of Modal Filter Error on the Vibration Control Characteristics

Jai-Hyuk Hwang, Joon-Soo Kim, Doo-Man Kim

### 1. 서론

우주구조물과 같은 본포계의 진동을 모드제어 기법을 통해 제어하고자 하면 반드시 모달변위와 모달속도를 알아야 한다. 즉 진동을 억제하기 위한 피드백 제어력을 계산하기 위해 모달상태의 추정이 필요하게 된다. 일반적으로 실제 센서는 진동계의 실제 변위를 측정하므로 센서의 정보로부터 모달상태를 알아내는 작업이 필요하게 된다. 이 작업을 가능하게 하는 장치로는 관측기(observer)와 모달필터(modal filter)[1-4]가 있다. 관측기를 사용하여 이산화(discretized)된 본포계의 제어모드(controlled mode)의 상태를 추정하면, 잔류모드(residual mode)와 관련된 관측 스피로오버와 작동기에 의한 제어 스피로오버가 발생하여 전체 시스템이 불안정해지는 결과를 초래하게 된다. 그러나, 확장의 원리(expansion theorem)를 이용한 모달필터를 사용하면 센서에서 측정된 값을 본포된 출력으로 근사화시킬 수 있으므로 관측 스피로오버를 최소화할 수 있다. 만일 센서의 수를 증가시키면 결과는 점점 정확하게 되는 장점이 있다. 모달필터는 Meirovitch와 Baruh[1-2]에 의해 제안되었으며, 후에 여러 연구에 의해 발전되어 사용되어지고 있다[3-4]. 그러나, 사용되는 고유함수의 부정확성, 센서의 갯수, 보간함수등에 의

한 오차에 의해 모달필터는 오차를 가지게 된다. 만약 이와 같이 오차를 갖고 있는 모달필터가 추정된 정보를 근거로 하여 제어력을 계산하고 그 제어력을 실제계에 적용했을 때, 페루프의 성능이 어떻게 변할것인가 하는 자연스런 질문을 할 수 있다. 즉 제어계가 모달필터의 오차에 대해 강인한가 하는 문제이다.

지금까지 많은 제어기법들이 유연성을 갖는 구조물의 진동제어기법으로 제안되었으나, 대부분의 제어기법은 계의 자유도가 증가할수록 제어계인을 계산하고 실제로 적용하는데 어려움이 많다. Meirovitch와 공동연구자[5-7]들은 구조물의 진동제어를 위해 독립된 모달공간에서 제어기를 간단하고 쉽게 설계할 수 있는 독립모달공간 제어기법(Independent Modal Space Control)을 제안하였다. 이 기법은 모달행렬을 변환행렬로 하여 구조물의 운동방정식을 모달좌표계의 비결합된 방정식으로 분리시킨 후 모달공간에서 제어를 설계한다. 이 경우, 제어기의 설계는 각 모드별로 모달 상태를 이용하여 독립적으로 수행되므로 모델의 자유도 수에 관계없이 설계가 항상 간단하다. 이 제어기법에서는 모달 제어력을 먼저 설계하고, 좌표변환을 통해 실제 제어력을 계산하게 된다.

최근 황재혁[8-10]은 독립모달공간 제어기법의 강인성에 대한 연구를 수행하였다. 따라서, 본

\* 정회원, 한국항공대학교 항공기계공학과

\*\* 한국항공대학교 대학원

\*\*\* 한국항공대학교 항공우주공학과

연구에서는 모달필터의 오차가 독립모달공간 제어기법의 특성에 미치는 영향을 연구하고자 한다. 먼저 모달필터의 오차로 인한 모달상태 추정오차가 페루프의 안정성에 미치는 영향을 고찰하고자 하며, 접근안정성(asymptotic stability)을 얻기 위한 필요충분 조건을 유도하고자 한다. 또한 모달필터의 오차가 존재할 때 진동제어 성능이 실제로 부터 벗어나는 응답오차의 상한(upper bound)을 인산자 이론(operator techniques)을 사용하여 유도한다. 일반적으로 페루프의 응답오차의 상한은 모달필터의 오차의 크기에 비례한다. 독립된 모달공간에서 설계된 제어기에 대해 모달필터의 오차가 미치는 영향을 고찰한 연구는 국내외를 막론하고 본 연구가 처음이라고 생각된다.

## 2. 모달필터를 가진 시스템 설계

제어모드의 모달상태를 추정하는 모달필터(modal filter)[1-2]는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{q}_c(t) = Dy(t) \quad (1)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = D\dot{y}(t) \quad (2)$$

여기서  $\hat{q}_c(t)$ 는 추정된 모달변위 벡터(estimated modal displacement vector)를,  $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 추정된 모달속도 벡터(estimated modal velocity vector)를,  $y(t)$ 는 변위 센서출력 벡터를,  $\dot{y}(t)$ 는 속도 센서출력 벡터를 나타낸다.

변위 센서출력 벡터를 확장이론에 의해 다음과 같이 정의한다[11,12].

$$y_j(t) = w(x_j, t) = \sum_{r=1}^n \phi_r(x_j) q_r(t), \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (3)$$

이 식을 벡터와 행렬을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$y(t) = Cq(t) \quad (4)$$

여기서

$$C_r = \phi_r(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad r = 1, 2, \dots$$

이제 전체 모드를 제어하고자 하는 제어모드  $q_c(t)$ 와 나머지 모드인 잔류모드  $q_r(t)$ 로 구분할 때 변위 센서출력 벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$y(t) = C_c q_c(t) + C_r q_r(t) \quad (5)$$

같은 방법으로 속도 센서출력 벡터는 다음과 같다.

$$\dot{y}(t) = C_c \dot{q}_c(t) + C_r \dot{q}_r(t) \quad (6)$$

식(1), 식(2)에 각각 식(5), 식(6)을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\hat{q}_c(t) = DC_c q_c(t) + DC_r q_r(t) \quad (7)$$

$$\dot{\hat{q}}_c(t) = DC_c \dot{q}_c(t) + DC_r \dot{q}_r(t) \quad (8)$$

만일  $D$ 가 정확하다면 모달필터는 정확한 모달상태를 출력할 것이고  $\hat{q}_c(t)$ ,  $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 각각  $q_c(t)$ ,  $\dot{q}_c(t)$ 와 같아지게 된다. 그 조건은 다음과 같다.

$$DC_c = I_c, \quad DC_r = 0$$

여기서  $I_c$ 는  $n$ 차의 단위행렬을 나타낸다. 그러나  $D$ 가 부정확하다면 정확한 값을 출력하지 못하게 되고  $\hat{q}_c(t)$ ,  $\dot{\hat{q}}_c(t)$ 는 각각  $q_c(t)$ ,  $\dot{q}_c(t)$ 와 차이가 생기게 된다. 또한 이 값을 피드백시키는 경우 시스템성능을 저해시키게 된다.

다음과 같은 제어모드의 모달방정식을 고려하자.

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = f_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

여기서  $q_r(t)$ 와  $f_r(t)$ 는 각각  $r$ 번째 모드의 모달 좌표와 모달힘(modal force)을 나타내고, 모달힘은 다음과 같이 정의된다.

$$f_r(t) = \int_D \phi_r f(x, t) dD, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

여기서  $f(x, t)$ 는 실제 분포힘을 나타낸다. 식(9)를 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + A_c q_c(t) = f(t) \quad (11)$$

여기서

$$A_c = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2]$$

$$f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)]$$

이제 독립된 모달공간 제어기법을 적용하여 각 모드들이 서로 독립적으로 제어되도록 한다. 모달힘벡터  $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t) = -K_r q_c(t) - K_r \dot{q}_c(t) \quad (12)$$

이거시 제어게인행렬  $K_p$ 와  $K_v$ 는 양한정(positive definite)하며 다음과 같다.

$$K_p = \text{diag}[k_{p1} \ k_{p2} \ \dots \ k_{pn}]$$

$$K_v = \text{diag}[k_{v1} \ k_{v2} \ \dots \ k_{vn}]$$

그러나 모달변위  $q_c(t)$ 와 모달속도  $\dot{q}_c(t)$ 는 실제로 측정할 수 없으므로 모달필터에 의해 추정된 모달변위  $\hat{q}_c(t)$ 와 모달속도  $\hat{\dot{q}}_c(t)$ 를 사용해야 한다. 따라서 위의 제어러은 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$f(t) = -K_p \hat{q}_c(t) - K_v \hat{\dot{q}}_c(t) \quad (13)$$

이제 모달필터 오차를 고려해보자. 오차가 생기는 원인으로는 첫째, 고유함수  $\phi$ , 을 부정확하게 선정함으로써 생기는 오차, 둘째, 구간을 유한개로 분할함에 기인한 오차, 셋째, 보간함수에 의한 오차가 있다. 모달필터의 오차는 모달필터 행렬에 포함되므로 모달필터 행렬  $D$ 를  $D + \Delta D$ 로 바꾸면 오차를 갖는 모달필터 방정식은 다음과 같다.

$$\hat{q}_c(t) = (D + \Delta D)y(t) \quad (14)$$

$$\hat{\dot{q}}_c(t) = (D + \Delta D)\dot{y}(t) \quad (15)$$

여기서  $D$ 는 정확한 모달필터 행렬이며,  $\Delta D$ 는 모달필터의 오차를 나타내는 행렬이다. 식(14), 식(15)에 각각 식(5), 식(6)을 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{q}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c)q_c(t) + \Delta DC_c q_R(t) \quad (16)$$

$$\hat{\dot{q}}_c(t) = (I_c + \Delta DC_c)\dot{q}_c(t) + \Delta DC_c \dot{q}_R(t) \quad (17)$$

모달필터 오차가 존재하지 않는 경우의 제어러 벡터는 식(12)와 동일한 모양으로 나타낼 수 있으므로 제어모드의 페루프 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_v \dot{q}_c(t) + [A_c + K_p]q_c(t) = 0 \quad (18)$$

그러나 모달필터 오차가 존재하는 경우 페루프 방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_v (I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + [A_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)]q_c(t) = -K_v \Delta DC_c \dot{q}_R(t) - K_p \Delta DC_c q_R(t) \quad (19)$$

위 방정식에서 보는 바와 같이 모달필터 오차가 존재하는 경우에는 모달필터 오차 행렬  $\Delta D$ 와 잔류모드와의 조합으로 표현되는 우변의 항들에 의해서 계속 가진됨을 알 수 있다. 또한  $\Delta DC_c$ 는 비대각 행렬이므로 식(19)는 다시 결합(coupled)되어 더이상 독립모달공간 제어기법(IMSC)의 특성을 갖지 못한다. 또한 잔류모드가 제어모드의 측정에 포함되는 관측 스피로버(observation spillover)[2]가 발생하여 시스템 특성에 심각한 영향을 끼치게 될 수도 있다. 이 경우 페루프의 안정성과 성능을 해석하기 위해서는 잔류모드의 지배방정식도 함께 고려해야 하므로 매우 복잡하게 된다. 본 연구에서는 제어모드의 모달상태에 대한 모달필터의 추정오차가 시스템에 미치는 영향에 우선 관심이 있으므로 관측 스피로버 현상은 배제할 수 있다고 가정한다. 보통 잔류모드는 고주파(high frequency)영역에 존재하므로 측정된 출력을 저주파 필터(low-pass filter)에 통과시킴으로써 관측 스피로버는 실제로 배제시킬 수 있다. 따라서 앞의 모달필터 오차가 존재하는 시스템의 페루프 방정식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$I_c \ddot{q}_c(t) + K_v (I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c(t) + [A_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)]q_c(t) = 0 \quad (20)$$

이 제어 시스템의 블럭선도는 다음 Fig. 1 과 같다.

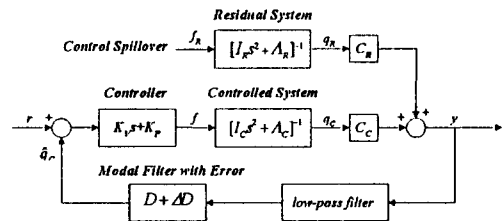


Fig. 1 Block Diagram of Closed-loop System with Modal Filter

### 3. 페루프의 안정성 해석

본 절에서는 페루프 시스템의 안정성에 대해 고려해 보기로 하자. 모달필터 오차가 존재하는 시스템의 점근적 안정조건을 구하기 위해 다음과 같은 Lyapunov 후보함수(candidate function)를 정

의한다.

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T I_c \dot{q}_c + \frac{1}{2} q_c^T [A_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)] q_c \quad (21)$$

위 식에서 첫번째 항은 운동에너지를 나타내고, 두번째 항은 위치에너지를 나타낸다. 또한  $I_c$ 가 양한정한 대각행렬이므로 두번째 항만 양한정하면  $V(t)$ 가 양한정하게 됨을 알 수 있다. 그 조건은 다음과 같다.

$$A_c + K_p (I_c + \Delta DC_c) \succ 0 \quad (22)$$

Lyapunov 후보함수의 시간에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\dot{V}(t) = \dot{q}_c^T I_c \dot{q}_c + q_c^T [A_c + K_p (I_c + \Delta DC_c)] \dot{q}_c \quad (23)$$

식(20)을 식(23)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}_c^T K_v (I_c + \Delta DC_c) \dot{q}_c \quad (24)$$

여기서  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 즉 위 식의 우변이 음의 반한정(negative semi-definite)할 조건은 다음과 같다.

$$K_v (I_c + \Delta DC_c) \succ 0 \quad (25)$$

그런데,  $I_c$ ,  $A_c$ ,  $K_p$ ,  $K_v$ 가 양한정한 대각행렬이므로  $V(t) > 0$ 를 만족시키는 조건과  $\dot{V}(t) \leq 0$ 를 만족시키는 조건은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$I_c + \Delta DC_c \succ 0 \quad (26)$$

위 조건만 만족한다면  $V(t)$ 가 상태 전 영역에 걸쳐서 양한정하고  $\dot{V}(t)$ 가 음의 반한정하므로 위의 Lyapunov 후보함수는 Lyapunov 함수가 되고, 시스템은 Lyapunov 안정성을 갖는다. 또한  $v_c = \dot{v}_c = 0$  일 때만  $\dot{V}(t) = 0$ 이 되므로 La Salle의 Invariant Set Theorem[13]에 의해 시스템은 점근적 안정성을 갖음을 알 수 있다. 위의 결과에서 보는 바와 같이 모달필터 오차를 포함하는 행렬,  $I_c + \Delta DC_c$ 가 양한정하다면 시스템은 점근적 안정성이 보장되지만 양한정하지 못하면 시스템이 불안정하게 되는 것을 알 수 있다.

#### 4. 모달필터 오차가 진동제어 응답성능에 미치는 영향

모달필터 오차가 시스템의 페루프 성능에 미치는 영향을 알아보기 위해 정확한 모달필터를 사용한 경우의 제어모드 변위벡터와 부정확한 모달필터를 사용한 경우의 제어모드 변위벡터와의 오차를  $e_c(t)$ 라고 정의하면,  $e_c(t)$ 에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$I_c \ddot{e}_c(t) + K_v \dot{e}_c(t) + (A_c + K_p) e_c(t) = K_v \Delta DC_c \dot{q}_c(t) + K_p \Delta DC_c q_c(t) \quad (27)$$

이 식을 해석함으로써 모달필터의 오차를 무시하고 진동제어기를 설계하는 경우 페루프가 갖는 응답성능의 오차  $e_c(t)$ 를 예측할 수 있다. 위 식에서 보는 바와 같이  $e_c(t)$ 는  $\Delta D$ 에 의해 가진되고 있음을 알 수 있다. 만약 모달필터 오차가 없다면  $\Delta D = 0$ 이 되고  $e_c(t) = 0$ ,  $t \geq 0$ 이 된다.

초기조건을  $e(t) = \dot{e}(t) = 0$ 이라고 놓고 식(27)을 라플라스 변환시키면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\bar{e}_c(s) = [I_c s^2 + K_v s + A_c + K_p]^{-1} (K_v s + K_p) \Delta DC_c \bar{q}_c(s) \quad (28)$$

여기서  $\bar{e}_c(s)$  및  $\bar{q}_c(s)$ 는 각각  $e_c(t)$  및  $q_c(t)$ 의 라플라스 변환된 벡터를 나타낸다. 위 식을 다음과 같이 표현할 때

$$\bar{e}_c(s) = \bar{H}(s) \bar{q}_c(s) \quad (29)$$

여기서  $n \times n$ 행렬  $\bar{H}(s)$ 의 각 요소는 다음과 같이 정의 된다.

$$\bar{H}_{ij}(s) = \frac{K_{n_j} s + K_{n_j}}{s^2 + K_{n_j} s + \omega_i^2 + K_{n_j}} d_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$d_{ij}$ 는  $\Delta DC_c$ 의 요소들을 뜻한다. 식(28)을 라플라스 역변환시키면 다음과 같은 컨볼루션(convolution) 적분으로 나타낼 수 있다.

$$e_c(t) = [H * q_c](t) = \int_0^t H(t-\tau) q_c(\tau) d\tau \quad (30)$$

여기서  $H(t) = L^{-1}[\bar{H}(s)]$ 이고, 위 식의 우변은 컨볼루션 적분을 나타낸다. 식(30)을 간단히 표현하기 위해 다음과 같은 선형 연산자(linear

operator)를 정의한다.

$$\hat{H}(q_c) = [H * q_c](t) \quad (31)$$

식(30)과 식(31)을 이용하여  $e_c(t)$ 의 상한(upper bound)  $\|e_c\|$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\|e_c\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} |e_i(t)| \leq \left[ \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sigma_i}{\hat{\omega}_i^2} \left( K_n + K_n X_u \frac{\exp(X_u + X_y)}{1 - \exp(X_y)} \right) \right] \|q_c\| \quad (32)$$

여기서

$$\begin{aligned} X_u &= 2\sqrt{\alpha_i^2 - 2\alpha_i \zeta_i \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_i^2} \\ X_y &= \frac{\zeta_i}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\alpha_i - \zeta_i \hat{\omega}_i} \\ X_y &= -\frac{\zeta_i \pi}{\sqrt{1 - \zeta_i^2}} \\ \hat{\omega}_i &= \sqrt{\omega_i^2 + K_n}, \quad \zeta_i = \frac{K_n}{2\sqrt{\omega_i^2 + K_n}} \\ \theta_i &= \tan^{-1} \frac{\hat{\omega}_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}{\alpha_i - \zeta_i \hat{\omega}_i}, \quad \alpha_i = K_n / K_n \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

위의 부등식은  $\|e_c\| = m \|q_c\|$ 의 형태로 표현할 수 있으며[15], 여기서  $m$ 은  $\|\hat{H}\|$ 이다.  $\|\hat{H}\|$ 는  $\sigma_i$  및 고유진동수  $\omega_i$ 에 의존하고 있다. 따라서 모달 필터 오차가 매우 작다면, 즉  $\sigma_i \ll 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 이라면,  $\|\hat{H}\|$ 는 매우 작게 된다. 또한 식(32)에서 알 수 있듯이,  $\|e_c\|$ 와 모달 필터 오차의 크기 사이에는 선형관계를 이루고 있으며, 비례계수는 제어기법의 구조에 의존하고 있다. 결과적으로 모달 필터 오차가 존재하는 경우, 진동 제어 응답성능에 오차가 존재하게 되고 그 크기는 항상  $\|\hat{H}\| \|q_c\|$ 보다 적다. 따라서  $e_c(t)$ 는 항상  $\pm \|\hat{H}\| \|q_c\|$ 의 밴드(band) 안에 있게 된다.

## 5. 예 제

본 절에서는 지금까지 얻어진 결과를 설명하기 위해 외팔보(cantilever beam)를 예제로 사용하였다. 외팔보를 베르누이-오일러 보 모델로 간주할 때, 지배방정식은 다음과 같다.

$$EI[\partial^4 w(x,t) / \partial x^4] + M[\partial^2 w(x,t) / \partial t^2] = f(x,t)$$

여기서 단위 길이당 질량은  $M=1$ 로, 물성치는  $EI=10$ 으로, 길이  $l=10$ 으로 가정한다. 제어모드의 갯수와 작동기의 갯수는 각각 6개로 선정하였다. 즉  $n=6$ 이 된다. 센서의 위치는 다음과 같이 선정한다.

$$x_j = \frac{l}{K-1}(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, K$$

여기서  $x_j$ 는 센서의 위치를,  $K$ 는 센서의 갯수를 나타낸다. 또한 보간함수를 다음과 같이 선정한다.

$$L_1(\xi) = \xi, \quad L_2(\xi) = 1 - \xi$$

만약 시스템의 고유함수를 정확하게 알고 있다고 가정하면 모달필터 오차는 센서의 갯수와 보간함수에 의해 발생한다. 센서의 갯수에 의해 발생하는 모달필터 오차이든 혹은 보간함수에 의해 발생하는 모달필터 오차이든 간에 모두  $\Delta D$ 에 나타난다. 따라서 본 연구에서는 일반성을 잃지 않으면서 계산의 단순성을 위해 센서의 갯수에 기인하는 오차만 예로 들어 고찰하고자 한다. 다음 세가지 경우의 모달필터 오차행렬과  $C_c$ 와의 곱은 아래와 같다.

$K=10$ 인 경우 :

$$\Delta DC_c = \begin{bmatrix} 0.0009 & -0.0121 & 0.0283 & -0.0385 & 0.0537 & -0.0652 \\ 0.0019 & -0.0135 & -0.0093 & 0.0314 & -0.0350 & 0.0567 \\ 0.0016 & 0.0033 & -0.0455 & -0.0086 & 0.0383 & -0.0329 \\ 0.0011 & 0.0057 & 0.0044 & -0.0952 & -0.0082 & 0.0462 \\ 0.0009 & 0.0039 & 0.0118 & 0.0050 & -0.1584 & -0.0081 \\ 0.0008 & 0.0042 & 0.0068 & 0.0187 & 0.0054 & -0.2306 \end{bmatrix}$$

$K=5$ 인 경우 :

$$\Delta DC_c = \begin{bmatrix} 0.0046 & -0.0613 & 0.1452 & -0.2024 & 0.3053 & -0.4099 \\ 0.0098 & -0.0631 & -0.0488 & 0.1850 & -0.2097 & 0.6214 \\ 0.0083 & 0.0174 & -0.1860 & -0.0494 & 0.4442 & -0.2155 \\ 0.0059 & 0.0337 & 0.0252 & -0.2164 & -0.0500 & -0.3432 \\ 0.0054 & 0.0231 & 0.1371 & 0.0303 & -0.9310 & -0.0406 \\ 0.0048 & 0.0459 & 0.0445 & -0.1390 & 0.0272 & -0.9180 \end{bmatrix}$$

$K=2$  인 경우 :

$$\begin{aligned} \Delta DC_c = & \\ \begin{bmatrix} 0.1376 & -1.1376 & 1.1376 & -1.1376 & 1.1376 & -1.1376 \\ 0.1815 & -1.1815 & 0.1815 & -0.1815 & 0.1815 & -0.1815 \\ 0.0648 & -0.0648 & -0.9352 & -0.0648 & 0.0648 & -0.0648 \\ 0.0331 & -0.0331 & 0.0331 & -1.0331 & 0.0331 & -0.0331 \\ 0.0200 & -0.0200 & 0.0200 & -0.0200 & -0.9800 & -0.0200 \\ 0.0134 & -0.0134 & 0.0134 & -0.0134 & 0.0134 & -1.0134 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위에서 보는 바와 같이  $K$ 의 값이 증가할수록 모달필터 오차가 감소함을 확인할 수 있다. 각 시스템의 안정성을 알아보기 위해 식(26)을 사용하면 다음과 같다.

$$K=10 \text{ 인 경우 : } I_c + \Delta DC_c > 0$$

$$K=5 \text{ 인 경우 : } I_c + \Delta DC_c > 0$$

$$K=2 \text{ 인 경우 : } I_c + \Delta DC_c < 0$$

즉 센서가 10개와 5개인 경우는  $I_c + \Delta DC_c$ 가 양한정하므로 접근 안정성을 갖지만 센서가 2개인 경우는  $I_c + \Delta DC_c$ 가 음한정하므로 접근 안정하기 위한 조건인 식(26)을 만족하지 못하여 시스템이 불안정해짐을 예상할 수 있다.

정확한 모달필터를 가진 시스템과 부정확한 모달필터를 가진 시스템의 고유치는 Table 1과 같다.

**Table 1** Comparison of the Closed-loop Eigenvalues between with Exact Modal Filter and with Inaccurate Modal Filter

Mode	Exact	$K=10$	$K=5$	$K=2$
1	-0.073±1.233i	-0.073±1.234i	-0.073±1.237i	-0.048±0.840i
2	-0.307±1.479i	-0.302±1.472i	-0.287±1.443i	0.035±1.064i
3	-0.447±2.357i	-0.427±2.341i	-0.362±2.294i	-0.045±1.999i
4	-0.484±4.046i	-0.438±4.028i	-0.379±4.004i	0.018±3.814i
5	-0.494±6.457i	-0.416±6.438i	-0.037±6.327i	-0.010±6.323i
6	-0.497±9.533i	-0.383±9.515i	-0.042±9.447i	0.007±9.440i

Table 1에서 보는 바와 같이 센서의 갯수가 충분히 많은 경우 모달필터의 오차는 매우 적으므로 고유치의 오차 또한 매우 적게 된다. 그러나 센서의 갯수가 불충분할 경우 모달필터 오차가 커지게 되어 고유치에 양의 실수부가 등장하게 된다. 즉 시스템이 불안정하게 된다. 이를 다시 표현하면 모달필터의 오차가 클수록 페루프 진동 제어계의 안정성은 나빠지고 있음을 의미하며, Table 1에서 확인할 수 있다.

이제 모달필터 오차에 기인한 진동 제어 응답 오차의 상한을 구해보자. 모달좌표 오차의 범위

에 관한 식은 전 절에서 다음과 같이 정의하였다.

$$\|e_c\| \leq \|\hat{H}\| \|q_c\|$$

식(32)를 이용하여 구한  $\|\hat{H}\|$ 는 Table 2와 같다.

**Table 2.** Upper Bound of Deviation Vector

$K$	10	5
$\ \hat{H}\ $	0.2442	1.0807

진동 제어 응답의 오차는 항상  $\|\hat{H}\| \|q_c\|$ 보다 적으며, 따라서  $e_c(t)$ 는 항상  $\pm \|\hat{H}\| \|q_c\|$  범위 내에서만 존재하게 된다. 또한 센서가 적을수록 즉 모달필터 오차가 클수록 진동 제어 응답의 오차는 그에 비례하게 커짐을 확인할 수 있다.

$x = 9.8$  지점에 단위 임펄스가 가해졌다고 가정하고 시뮬레이션을 수행한 결과를 Fig. 2 ~ 7에 나타내었다. Fig. 2에서는 센서가 10개인 경우 각 모드의 모달변위와 모달속도를, Fig. 3에서는 모달 제어력을 모드별로 나타내었다. Fig. 4에서는 시간에 대한 보 전체의 변위를 나타내었다. 또한 Fig. 5에서는 센서가 2개인 경우 각 모드의 모달변위와 모달속도를, Fig. 6에서는 모달 제어력을 모드별로 나타내었다. Fig. 7에서는 시간에 대한 보 전체의 변위를 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 모달필터 오차가 크게 존재하는 경우 외팔보의 변위가 발산함을 확인할 수 있다. 또한 모달필터 오차가 존재하는 경우에는 IMSC에 의해 비결합된 페루프 방정식이 다시 오차에 의해 결합되어 안정적인 모드마저도 불안정하게 됨을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서 얻어진 주된 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 모달필터의 오차로 인해 모달상태 추정에 오차가 발생할 때, 페루프 진동 제어계가 Lyapunov 접근 안정성을 갖기 위한 필요충분 조건식(26)을 유도하였다.
- (2) 모달필터의 오차가 클수록 페루프 진동 제어계의 안정성은 점점 나빠지게 된다.
- (3) 모달필터의 오차  $\Delta D$ 가 존재할 때,  $L_c$ -놈 이론을 적용하여 진동 제어 응답 성능의 오차의 상한, 식(32)를 유도하였다.

- (4) 응답성능 오차의 상한은 모달필터 오차  $\Delta D$ 의 크기에 비례하고 있으며, 비례계수는 모달공간에서의 제어기법의 종류에 따라 다르다.

### 참 고 문 헌

- [1] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1981, "Effect of Damping on Observation Spillover Instability," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 35, No. 1, pp. 31~44.
- [2] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1982, "On the Problem of Observation Spillover in Distributed-Parameter Systems," *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 39, No. 2, pp. 319~341.
- [3] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1985, "On the Implementation of Modal Filters for Control of Structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 6, pp. 707~716.
- [4] Choe, K., and Baruh, H., 1993, "Sensor Failure Detection in Flexible Structures Using Modal Observers," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 115, Sep., pp. 411~418.
- [5] Meirovitch, L., and Baruh, H., 1982, "Control of Self-Adjoint Distributed-Parameter Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 60~66.
- [6] Meirovitch, L., 1990, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York.
- [7] Meirovitch, L., Baruh, H. and Oz, H., 1983, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems," *J. Guidance and Control*, Vol. 6, pp. 302~310.
- [8] 황 제혁, 1993, "독립된 모달공간에서 분포계의 진동제어기법의 강인성," *한국항공우주학회지*, 제21권 2호, pp. 37~49.
- [9] 황 제혁, 백 승호, 1994, "독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법의 강인성," *한국소음진동학회지*, 제 4권, 제 2호, pp. 177~185.
- [10] Hwang, J. H., Kim, D. M., Lim, K. H., 1995, "Robustness of Natural Controls of Distributed-Parameter Systems," To be appeared in *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol, 117.
- [11] Meirovitch, L., 1980, *Computational Methods in Structural Dynamics*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B.V., Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- [12] Inman, D. J., 1989, *Vibration with Control, Measurement, and Stability*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [13] Slotine, J.E., Li, W., 1991, *Applied Nonlinear*

Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

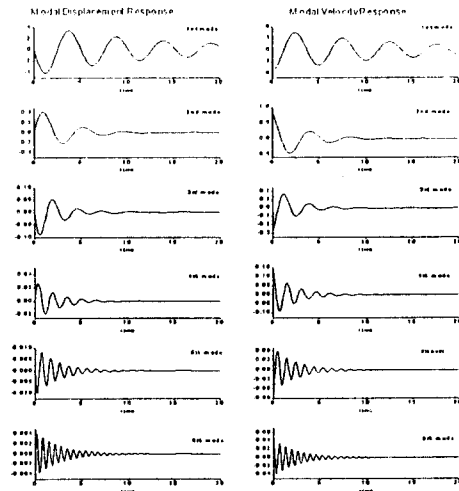


Fig. 2 Modal Responses of System with 10 Sensors

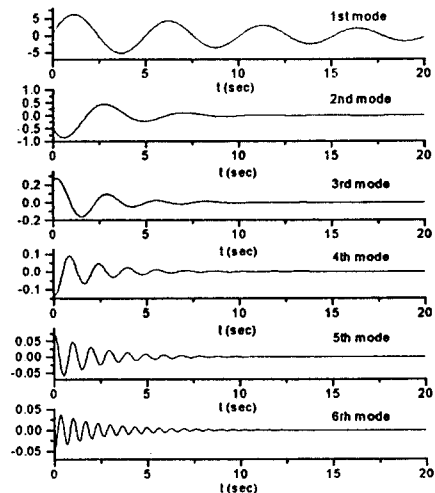
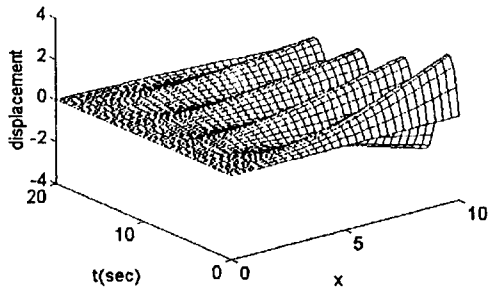
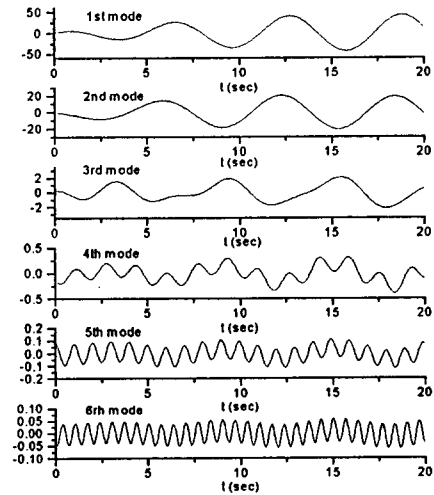


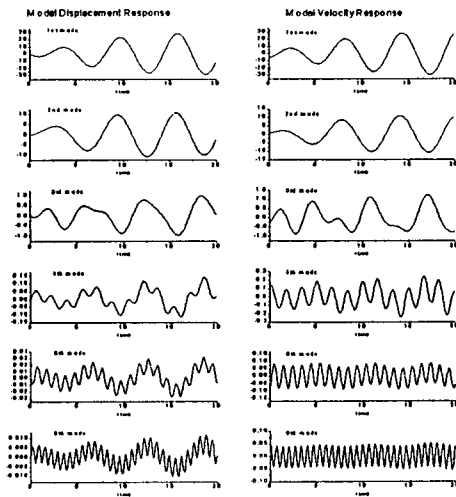
Fig. 3 Modal Control Forces of System with 10 Sensors



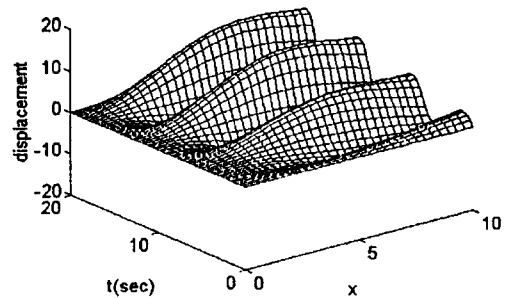
**Fig. 4** Displacement Response of Model with 10 Sensors



**Fig. 6** Modal Control Forces of System with 2 Sensors



**Fig. 5** Modal Responses of System with 2 Sensors



**Fig. 7** Displacement Response of Model with 2 Sensors